

О ПРОБЛЕМЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПЕТРЕ

А. Г. Багдасарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 35, № 3, 2000

В статье доказываются некоторые утверждения, относящиеся к проблеме пересечения Петре. Для произвольной интерполяционной пары получены некоторые условия на пространство, обеспечивающие выполнение равенства Петре. Объясняется роль равенств, дуальных к равенствам Петре.

ВВЕДЕНИЕ

Интерполяционное пространство, полученное методом вещественной интерполяции (см. [2], [3]) обычно обозначают через $(\cdot, \cdot)_{\theta, q}$. В [1] Петре поставил вопрос : при каких условиях справедливо равенство

$$(A, A_0 \cap A_1)_{\theta, q} = (A, A_0)_{\theta, q} \cap (A, A_1)_{\theta, q}, \quad 0 < \theta < 1, \quad 1 \leq q \leq \infty. \quad (1)$$

В той же статье [1] (см. также Теорему 1.12.1 из [2] и литературу в [1], [2]) указаны некоторые достаточные условия для выполнения равенства (1) в терминах “квазилинеаризуемости” соответствующих интерполяционных пар. Равенства (1) изучались в [4] – [6].

В настоящей статье вместе с равенством (1) и его дуальным равенством

$$(A, A_0 + A_1)_{\theta, q} = (A, A_0)_{\theta, q} + (A, A_1)_{\theta, q}, \quad (2)$$

рассматриваются также следующие соотношения :

$$A + (A_0 \cap A_1) = (A + A_0) \cap (A + A_1), \quad (3)$$

$$A \cap (A_0 + A_1) = (A \cap A_0) + (A \cap A_1). \quad (4)$$

Оказывается, что существует тесная связь между равенствами (1), (2) и (3), (4). Равенства (1) и (2) будем называть равенствами Петре, а (3) и (4) – равенствами типа Петре.

§1. О РАВЕНСТВАХ ТИПА ПЕТРЕ

Определение 1 (см. [2], [3]). Интерполяционная пара $\{A_0, A_1\}$ является парой банаховых пространств A_0 и A_1 , линейно и непрерывно вложенных в линейное топологическое пространство T . Аналогично определяется интерполяционная тройка.

Теорема 1. Пусть $\{A, B, C\}$ – интерполяционная тройка. Если одно из пространств тройки вложено в другое, то равенства типа Петре (3) и (4) выполняются.

Доказательство : Ясно, что для произвольной тройки имеем вложения

$$(A \cap B) + (A \cap C) \subset A \cap (B + C), \quad (5)$$

$$A + (B \cap C) \subset (A + B) \cap (A + C). \quad (6)$$

Обратные вложения к (5) и (6) легко проверяются при $C \subset B$ (или $B \subset C$). Кроме того вложение, обратное к (5), очевидно при $A \subset B$ (или $A \subset C$), а вложение, обратное к (6), очевидно при $B \subset A$ (или $C \subset A$).

Пусть теперь $B \subset A$. Тогда вложение, обратное к (5), имеет вид

$$A \cap (B + C) \subset B + (A \cap C). \quad (7)$$

Докажем (7). Пусть $a \in A \cap (B + C)$, тогда $a \in A$ и $a = a_0 + a_1$, $a_0 \in B$, $a_1 \in C$. Так как $a_1 = a - a_0$, $a_0 \in B \subset A$ и $a \in A$, то имеем $a_1 \in A$ и, следовательно, $a_1 \in A \cap C$. Таким образом, $a \in B + (A \cap C)$. Вложение (7) доказано.

Для доказательства непрерывности вложения (7) заметим, что при $B \subset A$ имеем

$$\begin{aligned} \|a\|_{B+(A \cap C)} &= \inf_{a=a_0+a_1, a_0 \in B, a_1 \in C} (\|a_0\|_B + \|a_1\|_{A \cap C}) \leq \\ &\leq c (\|a'_0\|_B + \|a'_1\|_A + \|a'_1\|_C) \leq c' (\|a\|_A + \|a'_0\|_B + \|a'_1\|_C). \end{aligned}$$

Беря нижнюю грань по всем $a = a'_0 + a'_1$, $a'_0 \in B$, $a'_1 \in C$, получим (7). Аналогично можно доказать вложение, обратное к (6) при $A \subset B$ (или $A \subset C$). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть $\{A_0, A_1\}$ – интерполяционная пара, $A = (A_0, A_1)_{\theta, q}$, $0 < \theta < 1$, $1 \leq q \leq \infty$. Для тройки $\{A, A_0, A_1\}$ имеют место равенства (3) и (4), т.е.

$$(A_0, A_1)_{\theta, q} = [A_0 + (A_0, A_1)_{\theta, q}] \cap [A_1 + (A_0, A_1)_{\theta, q}], \quad (8)$$

$$(A_0, A_1)_{\theta, q} = [A_0 \cap (A_0, A_1)_{\theta, q}] + [A_1 \cap (A_0, A_1)_{\theta, q}]. \quad (9)$$

Доказательство : Согласно следствию 3.6.2 из [3], для функционала Петре

$$K(s, a; A_0, A_1) = \inf_{a=a_0+a_1, a_j \in A_j} (\|a_0\|_{A_0} + s\|a_1\|_{A_1}), \quad s > 0$$

имеем

$$K(t, a; A_0, A) \sim t \left[\int_{t^{1/\theta}} s^{-\theta q} K^q(s, a; A_0, A_1) \frac{ds}{s} \right]^{1/q}, \quad (10)$$

$$K(t, a; A, A_1) \sim \left[\int_0^{t^{1/(1-\theta)}} s^{-\theta q} K^q(s, a; A_0, A_1) \frac{ds}{s} \right]^{1/q}. \quad (11)$$

Здесь знак $\sim$ означает двустороннюю оценку. Суммируя (10) и (11), при $t = 1$ получим

$$\begin{aligned} \|a\|_{(A+A_0) \cap (A+A_1)} &\sim \|a\|_{A+A_0} + \|a\|_{A+A_1} \sim K(1, a; A_0, A) + K(1, a; A_1, A) \sim \\ &\sim \left[\int_0^\infty s^{-\theta q} K^q(s, a; A_0, A_1) \frac{ds}{s} \right]^{1/q} = \|a\|_A. \end{aligned}$$

Равенство (8) доказано. Теперь докажем (9). Так как $A_0 \cap A \subset A$, то применим Теорему 1 к тройке $\{A_0 \cap A, A_1, A\}$. Применяя равенство (3) к этой тройке, получаем

$$(A_0 \cap A) + (A \cap A_1) = [(A \cap A_0) + A_1] \cap A. \quad (12)$$

На основании (8), из (12) получаем

$$(A_0 \cap A) + (A \cap A_1) = ([A_0 \cap (A + A_1)] + A_1) \cap A. \quad (13)$$

Так как $A_1 \subset A_1 + A$, то к тройке $\{A_1, A_0, A_1 + A\}$ можно применить Теорему 1. Тогда из (13) получаем $(A_0 \cap A) + (A \cap A_1) = (A_0 + A_1) \cap (A + A_1) \cap A = A$. В последнем равенстве использовали свойство промежуточности пространства A , т.е. $A \subset A_0 + A_1$. Доказательство завершено.

§2. О РАВЕНСТВАХ ПЕТРЕ

Определение 2. Пусть $\{A_0, A_1\}$ – интерполяционная пара. Банахово пространство A обладает свойством (P) относительно $\{A_0, A_1\}$, если для всех $\theta \in (0, 1)$ и $q \in [1, \infty]$ имеют место равенства Петре (1) и (2).

Предложение 1. Пространства A_0, A_1 обладают свойством (Р) относительно $\{A_0, A_1\}$.

Доказательство : Как отмечено в [6], равенство (1) выполняется, если A совпадает с A_0 или A_1 . Достаточно проверить, что равенство (2) также имеет место. По Следствию 3.6.2 из [3] имеем

$$\|a\|_{(A_0, A_1)_{\theta, q} + A_1} = K(1, a; (A_0, A_1)_{\theta, q}, A_1) \sim \left[\int_0^1 s^{-\theta q} K^q(s, a; A_0, A_1) \frac{ds}{s} \right]^{1/q} \quad (14)$$

Используя Теорему 2 из [7] и обозначая $\Sigma = A_0 + A_1$, получим

$$\begin{aligned} \|a\|_{(\Sigma, A_1)_{\theta, q}} &= \left[\int_0^\infty s^{-\theta q} K^q(s, a; \Sigma, A_1) \frac{ds}{s} \right]^{1/q} \geq \\ &\geq \left[\int_0^1 s^{-\theta q} K^q(s, a; A_0, A_1) \frac{ds}{s} \right]^{1/q} \sim \|a\|_{(A_0, A_1)_{\theta, q} + A_1}. \end{aligned}$$

Следовательно, $(\Sigma, A_1)_{\theta, q} \subset (A_0, A_1)_{\theta, q} + A_1$. Так как обратное вложение очевидно, то равенство (2) выполняется при $A = A_1$. Аналогично, можно доказать (2) для $A = A_0$. Предложение 1 доказано.

Теорема 3. Пусть $\{A_0, A_1\}$ – интерполяционная пара. Пространства $\Sigma = A_0 + A_1$ и $\Delta = A_0 \cap A_1$ обладают свойством (Р) относительно $\{A_0, A_1\}$.

Доказательство : Докажем, что (2) выполняется при $A = \Delta$. Используя (1) при $A = A_j$, $j = 0, 1$ и Теорему 3.4.1 из [3], получим $(A_0, \Delta)_{\theta, q} + (A_1, \Delta)_{\theta, q} = A_0 \cap (A_0, A_1)_{\theta, q} + A_1 \cap (A_0, A_1)_{1-\theta, q}$. Из Теоремы 2 вытекает

$$\begin{aligned} (A_0, \Delta)_{\theta, q} + (A_1, \Delta)_{\theta, q} &= (A_0 \cap [(A_0, A_1)_{\theta, q} + A_0] \cap [(A_0, A_1)_{\theta, q} + A_1]) + \\ &+ (A_1 \cap [(A_0, A_1)_{1-\theta, q} + A_0] \cap [(A_0, A_1)_{1-\theta, q} + A_1]) = \\ &= (A_0 \cap [(A_0, A_1)_{\theta, q} + A_1]) + (A_1 \cap [(A_0, A_1)_{1-\theta, q} + A_0]). \end{aligned} \quad (15)$$

Применяя Теорему 1 к тройке $\{A_0 \cap [(A_0, A_1)_{\theta, q} + A_1], A_1, (A_0, A_1)_{1-\theta, q} + A_0\}$ и используя (3), из (15) получим

$$\begin{aligned} (A_0, \Delta)_{\theta, q} + (A_1, \Delta)_{\theta, q} &= \left(A_0 \cap [(A_0, A_1)_{\theta, q} + A_1] + A_1 \right) \cap \\ &\cap \left(A_0 \cap [(A_0, A_1)_{\theta, q} + A_1] + [(A_0, A_1)_{1-\theta, q} + A_0] \right) = \\ &= \left(A_0 \cap [(A_0, A_1)_{\theta, q} + A_1] + A_1 \right) \cap \left((A_0, A_1)_{1-\theta, q} + A_0 \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Применяя Теорему 1 к тройке $\{A_0, (A_0, A_1)_{\theta, q} + A_1, A_1\}$, из (16) получим

$$(A_0, \Delta)_{\theta, q} + (A_1, \Delta)_{\theta, q} = [(A_0, A_1)_{\theta, q} + A_1] \cap [(A_0, A_1)_{1-\theta, q} + A_0].$$

Применяя (2) при $A = A_j$, $j = 0, 1$ и Теорему 3.4.1 из [3], находим

$$(A_0, \Delta)_{\theta, q} + (A_1, \Delta)_{\theta, q} = (\Sigma, A_1)_{\theta, q} \cap (\Sigma, A_0)_{\theta, q} \supset (\Sigma, \Delta)_{\theta, q}.$$

Так как обратное вложение очевидно, то приходим к равенству (2) при $A = \Delta$. Равенство (1) при $A = \Sigma$ было доказано в [6]. Для завершения доказательства заметим, что

$$(\Sigma, A_1)_{\theta, q} + (\Sigma, A_0)_{\theta, q} = A_0 + (A_0, A_1)_{\theta, q} + A_1 + (A_0, A_1)_{\theta, q} = \Sigma = (\Sigma, \Sigma)_{\theta, q}.$$

Следовательно, (2) имеет место при $A = \Sigma$. Аналогично получаем

$$(\Delta, A_1)_{\theta, q} + (\Delta, A_0)_{\theta, q} = A_0 \cap (A_0, A_1)_{\theta, q} \cap A_1 \cap (A_0, A_1)_{\theta, q} = \Delta = (\Delta, \Delta)_{\theta, q}.$$

Следовательно, (1) имеет место при $A = \Delta$. Теорема 3 доказана.

Определение 3 (см. [2], [3]). Пусть $\{A_0, A_1\}$ – интерполяционная пара. Банахово пространство A принадлежит классу $B(\eta, A_0, A_1)$, если

$$(A_0, A_1)_{\eta, 1} \subset A \subset (A_0, A_1)_{\eta, \infty}, \quad 0 < \eta < 1. \quad (17)$$

Предположим, что $A_j \in B(j, A_0, A_1)$, $j = 0, 1$.

Теорема 4. Пусть $\{A_0, A_1\}$ – интерполяционная пара. Если пространство $A \in B(\eta, A_0, A_1)$, $0 < \eta < 1$, то A обладает свойством (P) относительно пары $\{A_0, A_1\}$.

Доказательство : Имеем

$$(A_0, \Delta)_{\theta, q} \supset ((A \cap A_0) + (A \cap A_1), \Delta)_{\theta, q} \supset (A \cap A_0, \Delta)_{\theta, q} + (A \cap A_1, \Delta)_{\theta, q}, \quad (18)$$

и поскольку $A \in B(\eta, A_0, A_1)$, то $(A_0, \Delta)_{\eta, 1} = A_0 \cap (A_0, A_1)_{\eta, 1} \subset A_0 \cap A_1$, $(A_0, \Delta)_{\eta, \infty} = A_0 \cap (A_0, A_1)_{\eta, \infty} \supset A_0 \cap A_1$. Следовательно

$$A_0 \cap A \in B(\eta, A_0, \Delta), \quad 0 < \eta < 1. \quad (19)$$

Аналогично получаем

$$A_1 \cap A \in B(\eta, \Delta, A_1), \quad 0 < \eta < 1. \quad (20)$$

Соотношения (19), (20) и вложения $\Delta \in B(1, A_0, \Delta)$, $\Delta \in B(0, \Delta, A_1)$ показывают, что можно применить теорему рентерации (см. Теорему 3.5.3 из [3]). Из этой теоремы и (18) имеем

$$(A, \Delta)_{\theta, q} \supset (A_0, \Delta)_{\eta(1-\theta)+\theta, q} + (\Delta, A_1)_{\eta(1-\theta), q}. \quad (21)$$

Применяя равенство (1) к правой части (21), получим

$$(A, \Delta)_{\theta, q} \supset [A_0 \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta, q}] + [A_1 \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta), q}]. \quad (22)$$

Согласно Теореме 3.4.1 из [3] имеем

$$[A_0, \Delta]_{\eta(1-\theta)+\theta, q} \subset (A_0, \Delta)_{\eta(1-\theta), q} = A_0 \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta), q} \subset (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta), q}. \quad (23)$$

Итак, можно применить Теорему 1 к $\{A_0 \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta, q}, A_1, (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta), q}\}$.

Из (9), (22) и (23) следует, что

$$\begin{aligned} (A, \Delta)_{\theta, q} &\supset \left([A_0 \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta, q}] + A_1 \right) \cap ([A_0 \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta, q}] + \\ &+ (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta), q}) = \left([A_0 \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta, q}] + A_1 \right) \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta), q} \supset (24) \\ &\supset \left([A_0 \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta, q}] + [A_1 \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta, q}] \right) \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta), q} = \\ &= (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta, q} \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta), q}. \end{aligned}$$

Ещё раз используя рентерационную теорему, получаем

$$(A_0, \Delta)_{\theta, q} \supset (A, A_0)_{\theta, q} \cap (A, A_1)_{\theta, q}.$$

Так как обратное вложение очевидно, то приходим к равенству (1). Равенство (2) доказывается аналогично. Теорема 4 доказана.

Теорема 5. Пусть $\{A_0, A_1\}$ – интерполяционная пара, Δ плотно в $A_0 \sqcup A_1$. Если A – интерполяционное пространство типа $\eta \in (0, 1)$ (см. [2], [3]) относительно пары $\{A_0, A_1\}$, то A обладает свойством (P) относительно этой пары.

Доказательство : На основании Теоремы 3.9.1 из [3] заключаем, что $A \in B(\eta, A_0, A_1)$. Остаётся применить Теорему 4.

Теорема 6. Пусть $\{A_0, A_1\}$ – интерполяционная пара. Положим

$$B_0 = (A_0, A_1)_{\alpha, q_0}, \quad (\text{или } [A_0, A_1]_{\alpha}), \quad 0 < \alpha < 1, \quad 1 \leq q_0 \leq \infty,$$

$$B_1 = (A_0, A_1)_{\beta, q_1}, \quad (\text{или } [A_0, A_1]_{\beta}), \quad 0 < \beta < 1, \quad 1 \leq q_1 \leq \infty.$$

Если A – интерполяционное пространство типа $\eta \in (0, 1)$ относительно пары $\{B_0, B_1\}$, то A обладает свойством (P) относительно $\{A_0, A_1\}$.

Доказательство : Согласно реитерационной теореме

$$(B_0, B_1)_{\eta, r} = (A_0, A_1)_{\alpha(1-\eta)+\beta\eta, r}, \quad 1 \leq r \leq \infty. \quad (25)$$

Теорема 3.4.2 из [3] (Теорема 4.2.2 для метода комплексного интерполирования) утверждает, что $A_0 \cap A_1$ плотно как в B_0 так и в B_1 . Тогда пространство $B_0 \cap B_1$ плотно в B_0 и B_1 . Из Теоремы 3.9.1, [3] следует, что

$$(B_0, B_1)_{\eta, 1} \subset A \subset (B_0, B_1)_{\eta, \infty}. \quad (26)$$

Учитывая (25), вложения (26) можно переписать в виде $(A_0, A_1)_{\alpha(1-\eta)+\beta\eta, 1} \subset A \subset (A_0, A_1)_{\alpha(1-\eta)+\beta\eta, \infty}$. Следовательно, $A \in B(\alpha(1-\eta)+\beta\eta, A_0, A_1)$. Теперь Теорема 6 следует из Теоремы 4.

В заключение приведем одно следствие равенства (1), которое обращает классический результат о вложении интерполяционных пространств (см. Теоремы 3.4.1 и 4.2.1 из [3]).

Теорема 7. Пусть $\{A_0, A_1\}$ – интерполяционная пара. Если для некоторого $q \in [1, \infty]$ и $\eta, \theta \in (0, 1)$, $\eta < \theta$ имеет место одно из вложений

$$(A_0, A_1)_{\theta, q} \subset (A_0, A_1)_{\eta, q} \quad (27)$$

или

$$[A_0, A_1]_{\theta} \subset [A_0, A_1]_{\eta}, \quad (28)$$

то $A_1 \subset A_0$.

Доказательство : Пусть имеет место вложение (27). Тогда из (1) при $A = A_1$ (см. [6]) имеем

$$(\Delta, A_1)_{\theta, q} = A_1 \cap (A_0, A_1)_{\theta, q} \subset A_1 \cap (A_0, A_1)_{\eta, q} = (\Delta, A_1)_{\eta, q}. \quad (29)$$

Так как $1 - \theta < 1 - \eta$ и $\Delta \subset A_1$, то согласно Теореме 3.4.1 из [3] получим

$$(\Delta, A_1)_{\theta, q} = (A_1, \Delta)_{1-\theta, q} \supset (A_1, \Delta)_{1-\eta, q} = (\Delta, A_1)_{\eta, q}. \quad (30)$$

Из вложений (29) и (30) вытекает $(\Delta, A_1)_{\theta, q} = (\Delta, A_1)_{\eta, q}$, следовательно (см. §3.13 из [3]) $\Delta = A_1$. Таким образом, $A_1 \subset A_0$.

Теперь пусть имеет место вложение (28). Используя Теорему 1.10.3/2 из [2], получаем

$$(A_0, A_1)_{(1+\theta)/2, q} = ([A_0, A_1]_{\theta}, A_1)_{1/2, q} \subset ([A_0, A_1]_{\eta}, A_1)_{1/2, q} = (A_0, A_1)_{(1+\eta)/2, q}.$$

Следовательно, $A_1 \subset A_0$. Теорема 7 доказана.

Используя Теорему 7 и Теоремы 3.4.1 и 4.2.1 из [3], получим следующее утверждение.

Предложение 2. Для выполнения каждого из вложений (27) и (28) необходимо и достаточно, чтобы $A_1 \subset A_0$.

ABSTRACT. The paper proves some assertions concerning Peetre intersection problem. For any interpolation pair some conditions on the space, which guarantee the validity of Peetre equality, are obtained. The role of equalities dual to Peetre's is revealed.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Peetre, "Ueber den Durchschnitt von Interpolationsräumen", Arch. Math., vol. 25, pp. 511 – 513, 1974.
2. Х. Трибель, Теория Интерполяции. Функциональные Пространства. Дифференциальные Операторы, Мир, Москва, 1980.
3. Й. Берг, Й. Лёфстрём, Интерполяционные Пространства. Введение, Мир, Москва, 1980.
4. P. Grisvard, "Interpolation non commutative", Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., vol. 52, pp. 11 – 15, 1972.
5. J. Peetre, "Non-commutative interpolation", Le Matematiche, vol. 25, pp. 1 – 15, 1970.
6. L. Maligranda, "On commutativity of interpolation with intersection", 13th Winter School on Abstract Analysis, pp. 113 – 118, 1985.
7. L. Maligranda, "The K -functional for symmetric spaces", Lecture Notes in Math., vol. 1070, pp. 169 – 182, 1988.

22 октября 1998

Ереванский государственный университет