ЕДИНСТВЕННОСТЬ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

Г. С. Акопян, Л. П. Тепоян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 2, 2000

§1. ВВЕДЕНИЕ

В статье рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение

$$\mathcal{A}u \equiv -(t^{\alpha}(b-t)^{\beta}u'(t))' + a(t,u) = f(t), \tag{1}$$

где $\alpha,\beta \geq 0$, $\alpha,\beta \neq 1$, $t \in (0,b)$, $f(t) \in L_{2,-\alpha,-\beta}$, а функция $a(t,\xi)$ непрерывна по ξ и при любых комплексных ξ и η удовлетворяет условиям

$$|a(t,\xi)| \leq ct^{\alpha}(b-t)^{\beta}(1+|\xi|), \tag{2}$$

$$[a(t,\xi)-a(t,\eta)]\overline{(\xi-\eta)} \geq ct^{\alpha}(b-t)^{\beta}|\xi-\eta|^2). \tag{3}$$

Докажем, что при условиях (2), (3), оператор $\mathcal{A}$ является сильно монотонным и полунепрерывным (см. ниже Теорему 1). При $f \in W^{*}_{\alpha,\beta}$ основная Теорема о монотонных операторах (см. [5] или [6]) гарантирует существование обобщенного решения уравнения (1) в классе $W_{\alpha,\beta}$ (определения классов $W_{\alpha,\beta}$ и $W^{*}_{\alpha,\beta}$ см. следующий параграф). Теорема 2 доказывает единственность в классе $W_{\alpha,\beta}$ обобщенного решения уравнения (1) при $f \in W^{*}_{\alpha,\beta}$. В линейном случае с вырождением на одном конце уравнение (1) было исследовано в [1], [2].

§2. ПРОСТРАНСТВА $W_{\alpha,\beta}$

Пусть $\dot{C}^1$ - множество непрерывно дифференцируемых вещественных функций на отрезке $[0,b]$, удовлетворяющих условиям

$$u(0) = u(b) = 0. \tag{4}$$

Обозначим через $\dot{W}^1$ пополнение $\dot{C}^1$ по норме $\left|u, \dot{W}^1\right|^2 = \int_0^b |u'(t)|^2\,dt$, и через $W_{\alpha,\beta}$ пополнение $\dot{W}^1$ по норме

$$|u, W_{\alpha,\beta}|^2 = \int_0^b \left[t^\alpha (b-t)^\beta |u'(t)|^2 + t^\alpha (b-t)^\beta |u(t)|^2\right]\,dt. \tag{5}$$

Очевидно, что $\dot{W}^1 \subset W_{\alpha,\beta}$, элементы $\dot{W}^1$ являются абсолютно непрерывными функциями, удовлетворяющими (4), и нормы пространств $\dot{W}^1$ и $W_{\alpha,\beta}$ на отрезке $[\eta, b-\eta]$, $\eta > 0$ эквивалентны. Следовательно, достаточно изучить свойства $u(t) \in W_{\alpha,\beta}$ вблизи точек $t = 0$ и $t = b$.

Предложение 1. Для элементов $u(t) \in W_{\alpha,\beta}$ имеет место неравенство

$$|u(t)|^2 \le ct^{1-\alpha}(b-t)^{1-\beta}\,|u, W_{\alpha,\beta}|^2. \tag{6}$$

Доказательство : Так как $\dot{C}^1$ плотно в $W_{\alpha,\beta}$, то достаточно доказать неравенство (6) только при $u \in \dot{C}^1$. Отметим, что для любого $u \in W_{\alpha,\beta}$ существуют положительные постоянные c_1, c_2 такие, что

$$c_1\,|u, W_{\alpha,\beta}|^2 \le |u, W_{\alpha,0}(0, b/2)|^2 + |u, W_{0,\beta}(b/2, b)|^2 \le c_2\,|u, W_{\alpha,\beta}|^2. \tag{7}$$

Оценим $|u(t)|^2$ в отдельности для $t \in (0, b/2)$ и $t \in (b/2, b)$. Пусть $t \in (0, b/2)$ и $\alpha < 1$. Тогда

$$|u(t)|^2 = \left|\int_0^t u'(\tau)\,d\tau\right|^2 \le \int_0^t \tau^{-\alpha}\,d\tau \int_0^t \tau^\alpha |u'(\tau)|^2\,d\tau \le ct^{1-\alpha}\,|u, W_{\alpha,0}(0, b/2)|^2.$$

Пусть теперь $\alpha > 1$. Умножая равенство

$$u(t) = u(b/2) - \int_0^{b/2} u'(\tau)\,d\tau \tag{8}$$

на $t^{\alpha/2}$, получим

$$\frac{1}{2}\int_0^{b/2} |t^\alpha u(b/2)|^2\,dt \le \int_0^{b/2} \left(|t^\alpha u(t)|^2 + t^\alpha \left|\int_t^{b/2} u'(\tau)\,d\tau\right|^2\right)\,dt.$$

Согласно неравенству Коши–Буняковского, получим

$$\int_0^{b/2} t^\alpha \left|\int_t^{b/2} u'(\tau)\,d\tau\right|^2 dt \le \int_0^{b/2} t^\alpha \left[\int_t^{b/2} \tau^{-\alpha}\,d\tau \int_t^{b/2} \tau_1^\alpha |u'(\tau_1)|^2\,d\tau_1\right] dt.$$

С другой стороны

$$\left|\int_t^{b/2} u'(\tau)\,d\tau\right|^2 \le \int_t^{b/2} \tau^{-\alpha}\,d\tau \int_t^{b/2} \tau_1^\alpha |u'(\tau_1)|^2\,d\tau_1 \le ct^{1-\alpha}\,|u, W_{\alpha,0}(0, b/2)|^2.$$

Из (8) следует, что $|u(t)|^2 \leq 2\left(|u(b/2)|^2 + \left|\int_t^{b/2} u'(\tau)\,d\tau\right|^2\right)$, и следовательно при $\alpha > 1$ получим

$$|u(t)|^2 \leq ct^{1-\alpha}\,|u, W_{\alpha,0}(0,b/2)|^2. \tag{9}$$

Таким образом, мы доказали, что неравенство (9) выполняется при любых $\alpha \geq 0$, $\alpha \neq 1$. Аналогично, при $t \in (b/2, b)$ получим

$$|u(t)|^2 \leq c(b-t)^{1-\beta}\,|u, W_{0,\beta}(b/2,b)|^2. \tag{10}$$

Из (7), (9) и (10) следует (6). Доказательство завершено.

Из Предложения 1 имеем, что

из $\alpha < 1$ и $\beta < 1$ следует (4),

из $\alpha < 1$ и $\beta > 1$ (или $\alpha > 1$ и $\beta < 1$) следует только $u(0) = 0$ (или $u(b) = 0$),

при $\alpha > 1$ и $\beta > 1$ значения $u(t)$ при $t = 0, b$ могут обращаться в бесконечность.

Замечание 1. При $\alpha < 1$ (или $\beta < 1$) в определении нормы (5) можно взять только первое слагаемое.

Доказательство : Из равенства $|u, W_{\alpha,\beta}| = 0$ следует, что $u(t)$ - постоянное число. Так как $u(0) = 0$ (или $u(b) = 0$), то получим $u(t) \equiv 0$.

Замечание 1 означает, что при $\alpha < 1$ (или $\beta < 1$) пространство $W_{\alpha,\beta}$ не содержит отличные от нуля постоянные функции. Однако, при $\alpha > 1$ и $\beta > 1$, $u(t) \equiv 1$ принадлежит пространству $W_{\alpha,\beta}$. Действительно, пусть $u_h(t) \in \dot{C}^1$, $0 < h < b/2$ определяются согласно равенству

$$u_h(t) = \begin{cases} t^2(3h-2t)/h^3 & \text{при} \quad 0 \leq t \leq h, \\ 1 & \text{при} \quad h \leq t \leq b-h, \\ (b-t)^2(2t+3h-2b)/h^3 & \text{при} \quad b-h \leq t \leq b. \end{cases}$$

Используя (7), получим

$$|1-u_h(t), W_{\alpha,\beta}|^2 \leq c\big(|1-u_h(t), W_{\alpha,0}(0,b/2)|^2+$$

$$+|1-u_h(t), W_{0,\beta}(b/2,b)|^2\big) \leq c_1(h^{\alpha-1}+h^{\beta-1}).$$

Поэтому $|1-u_h(t), W_{\alpha,\beta}|$ стремится к нулю при $h \to 0$. Следовательно, $u(t) \equiv 1$ принадлежит пространству $W_{\alpha,\beta}$.

Замечание 2. В пространстве $W_{\alpha,\beta}$ существует эквивалентная норма

$$||u||^2_{\alpha,\beta} = \int_0^b \left(([t^{\alpha/2}(b-t)^{\beta/2}u(t)])^2 + t^\alpha (b-t)^\beta |u(t)|^2 \right) dt. \tag{11}$$

Доказательство : следует из неравенства Харди, см. [3], [4].

Из Замечания 2 следует (ср. [2]), что

$$W_{\alpha,\beta} = t^{-\alpha/2}(b-t)^{-\beta/2}\dot{W}^1, \quad W^*_{\alpha,\beta} = t^{\alpha/2}(b-t)^{\beta/2}W^{-1}, \tag{12}$$

где $W^*_{\alpha,\beta}$ – пространство, сопряженное к $W_{\alpha,\beta}$. Пусть $L_{2,\alpha,\beta}$ – пространство функций с конечной нормой $|u, L_{2,\alpha,\beta}|^2 = \int_0^b t^\alpha (b-t)^\beta |u(t)|^2 dt$. Вложения $L_{2,-\alpha,-\beta} \subset W^*_{\alpha,\beta}$, $W_{\alpha,\beta} \subset L_{2,\alpha,\beta}$ и $\dot{W}^1 \subset L_2(0,b)$ вытекают из (12).

§3. НЕЛИНЕЙНОЕ ВЫРОЖДАЮЩЕЕСЯ УРАВНЕНИЕ

Определение 1. Пусть X – рефлексивное сепарабельное банахово пространство. Оператор $B : X \longmapsto X^*$ называется **сильно монотонным**, если

$$\langle Bu - Bv, u - v \rangle \geq m||u - v||^2, \quad m > 0. \tag{13}$$

и **коэрцитивным**, если

$$\langle Bu - Bv, u - v \rangle \geq \gamma(||u||)||u||, \quad \lim_{s\to\infty} \gamma(s) = +\infty. \tag{14}$$

Замечание 3. Каждый сильно монотонный оператор коэрцитивен.

Доказательство : Из (13) при $v = 0$ получим

$$\langle Bu, u \rangle \geq \langle B0, u \rangle + m||u||^2 \geq m||u||^2 - ||B0||_*||u|| = (m||u|| - ||B0||_*)||u||.$$

Определение 2. Оператор $B : X \longmapsto X^*$ называется **полунепрерывным**, если из $x_n \to x$ следует, что $Bx_n \rightharpoonup Bx$ (слабая сходимость).

Определим теперь оператор $\mathcal{A} : W_{\alpha,\beta} \longmapsto W^*_{\alpha,\beta}$ по формуле

$$\langle \mathcal{A}u, v \rangle = \int_0^b \left[t^\alpha (b-t)^\beta u'(t)\overline{v'(t)} + a(t,u)\overline{v(t)} \right] dt, \quad u, v \in W_{\alpha,\beta}. \tag{15}$$

Теорема 1. Оператор $\mathcal{A} : W_{\alpha,\beta} \longmapsto W^*_{\alpha,\beta}$ является сильно монотонным и полунепрерывным.

Доказательство : Сначала докажем, что оператор $\mathcal{A}$ определен корректно. Существование первого слагаемого (15) следует из $u, v \in W_{\alpha,\beta}$. Оценим теперь второе слагаемое, используя условие (2)

$$\left| \int_0^b a(t,u)\overline{v(t)}\, dt \right|^2 \leq \int_0^b t^\alpha (b-t)^\beta |v(t)|^2 dt \int_0^b t^{-\alpha}(b-t)^{-\beta}|a(t,u)|^2 dt \leq$$

$$\le c\int_0^b t^\alpha(b-t)^\beta|v(t)|^2dt\int_0^b t^\alpha(b-t)^\beta|u(t)|^2dt.$$

Из условия (3) следует, что

$$\langle \mathcal{A}u-\mathcal{A}v, u-v\rangle=\langle \mathcal{A}u, u-v\rangle-\langle \mathcal{A}v, u-v\rangle=\int_0^b t^\alpha(b-t)^\beta|u'(t)-v'(t)|^2dt+$$

$$+\int_0^b t^\alpha(b-t)^\beta[a(t,u)-a(t,v)]\overline{[u(t)-v(t)]}\,dt\ge c|u-v, W_{\alpha,\beta}|^2. \tag{16}$$

Следовательно, $\mathcal{A}$ – сильно монотонный. Докажем теперь, что $\mathcal{A}$ полунепрерывен. Пусть $u_n\to u$ в $W_{\alpha,\beta}$. Тогда

$$|\langle \mathcal{A}u_n-\mathcal{A}u, v\rangle|\le\left|\int_0^b t^\alpha(b-t)^\beta[u_n'(t)-u'(t)]\overline{v'(t)}\,dt\right|+$$

$$+\left|\int_0^b[a(t,u_n)-a(t,u)]\overline{v(t)}\,dt\right|,$$

который стремится к нулю, так как $a(t,\xi)$ непрерывна по ξ. Теорема 1 доказана.

Определение 3. Функция $u\in W_{\alpha,\beta}$ называется **обобщенным решением** уравнения (1), если для любого $v\in W_{\alpha,\beta}$ имеем $\langle \mathcal{A}u, v\rangle=\int_0^b f(t)\overline{v(t)}\,dt$.

Теорема 2. Для любого $f\in W^*_{\alpha,\beta}$ существует единственное обобщенное решение уравнения (1).

Доказательство : Существование обобщенного решения уравнения (1) следует из Теоремы 1 и основной теоремы теории монотонных операторов (см. [5] или [6]). Докажем теперь единственность. Пусть $u_1, u_2\in W_{\alpha,\beta}$ – два обобщенных решения уравнения (1). Тогда при любых $v\in W_{\alpha,\beta}$ имеем

$$\int_0^b\left[t^\alpha(b-t)^\beta(u_1'(t)-u_2'(t))\overline{v'(t)}+(a(t,u_1)-a(t,u_2))\overline{v(t)}\right]\,dt=0. \tag{17}$$

Подставляя $v(t)=u_1(t)-u_2(t)$ в (17) и используя (3), получим

$$\int_0^b\left[t^\alpha(b-t)^\beta|u_1'(t)-u_2'(t)|^2+ct^\alpha(b-t)^\beta|u_1(t)-u_2(t)|^2\right]\,dt\le 0.$$

Следовательно, $u_1(t)\equiv u_2(t)$. Доказательство завершено.

Замечание 4. При $\alpha<1$ (или $\beta<1$) условие (3) можно заменить условием $[a(t,\xi)-a(t,\eta)]\overline{(\xi-\eta)}\ge 0$.

Доказательство : следует из (16) и Замечания 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Дезин, "Вырождающиеся операторные уравнения", Мат. сборник. том 43, № 3, стр. 287 – 298, 1982.
2. Л. П. Тепоян, "Об одном вырождающемся дифференциально–операторном уравнении высокого порядка", Изв. АН Армении. Математика, том 34, № 5, стр. 48 – 56, 1999.
3. Г. Х. Харди, Д. Е. Литтльвуд, Г. Полиа, Неравенства, Москва, 1948.
4. R. Duduchava, D. Eliott, W. L. Wendland, "The spline collocation method for Mellin convolution equations", Univ. Stuttgart, Sonderforsch. 404, Mehrfeldprobleme in der Kontinuumsmechanik, Bericht 96/04, 1996.
5. Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас, Нелинейные Операторные Уравнения и Операторные Дифференциальные Уравнения, Мир, Москва, 1978.
6. Д. Л. Лионс, Некоторые Методы Решения Нелинейных Краевых Задач, Мир, Москва, 1972.

30 января 2000

Ереванский государственный университет