СХОДИМОСТЬ ПОЧТИ ВСЮДУ РЯДОВ ПО ОБЩЕЙ СИСТЕМЕ ФРАНКЛИНА

М. П. Погосян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 2, 2000

Получен критерий почти всюду сходимости рядов по общей системе Франклина, обобщающий результат Г. Г. Геворкяна для классической системы Франклина (Analysis Math., том 16, стр. 87 — 114, 1990).

§1. ВВЕДЕНИЕ

Определение. Последовательность $\{\mathcal{P}_j : j \geq 0\}$ конечных подмножеств $\mathcal{P}_j = \{t_{j,i} : 0 \leq i \leq 2^j\}$ отрезка $[0, 1]$ называется квазидвоичным разбиением этого отрезка, если $\mathcal{P}_0 = \{0; 1\}$; $\mathcal{P}_j \subset \mathcal{P}_{j+1}$ для всех $j \geq 0$; $0 = t_{j,0} < t_{j,1} < \dots < t_{j,2^j} = 1$ и $t_{j+1,2k} = t_{j,k}$, когда $j \geq 0$, $k = 0, \dots, 2^j$, т.е. $\mathcal{P}_{j+1}$ получается из $\mathcal{P}_j$ прибавлением по одной точке в каждом интервале $(t_{j,k-1}; t_{j,k})$ для всех $k = 1, \dots, 2^j$. Положим $I_{j,k} = [t_{j,k-1}; t_{j,k}]$; $\mathcal{I}_j = \{I_{j,k} : 1 \leq k \leq 2^j\}$ и $\mathcal{I} = \bigcup_{j=0}^{\infty} \mathcal{I}_j$. Элементы множества $\mathcal{I}_j$ называются интервалами порядка j . Пусть $\{\tau_n : n \geq 0\} = \{t_{j,i} : j \geq 0; 0 \leq i \leq 2^j\}$, где $\tau_0 = t_{0,0}$, $\tau_1 = t_{0,1} = 1$ и при $n = 2^k + m$, $m = 1, 2, \dots, 2^k$, $k = 0, 1, \dots$, $\tau_n = t_{k+1,2m-1}$.

Обозначим через S_n линейное пространство кусочно-линейных функций

$$S_n = \{f \in C[0, 1] : f''(x) = 0 \text{ if } x \notin \{\tau_k\}_{k=0}^n\}.$$

Тогда размерность S_n равна $n + 1$, $S_n \subset S_{n+1}$ и коразмерность $[S_{n+1} : S_n] = 1$. Отсюда следует существование единственной функции $f_{n+1} \in S_{n+1}$ такой, что $f_{n+1} \perp S_n$ в смысле $L_2(0, 1)$, $\|f_{n+1}\|_{L_2(0,1)} = 1$ и $f_{n+1}(\tau_{n+1}) > 0$. Ниже положим $f_0 \equiv 1$.

Определение. Система функций $\{f_n(x) : n \geq 0\}$ называется общей системой Франклина, соответствующей квазидвоичному разбиению $\{\mathcal{P}_j : j \geq 0\}$ отрезка $[0, 1]$. Классическая система Франклина получается, если $\{\mathcal{P}_j : j \geq 0\}$ совпадает с двоичным разбиением отрезка $[0, 1]$. Она впервые была рассмотрена Ф.

Франклином [1], который доказал, что эта ортонормальная система является базисом в пространстве непрерывных функций $C[0, 1]$. З. Чисельским [2], [3] были получены так называемые экспоненциальные оценки для функций классической системы Франклина. Эти оценки сыграли фундаментальную роль почти во всех исследованиях классических систем Франклина. Используя систему Франклина, С. В. Бочкарев [4] построил первый базис в пространстве функций, аналитических в единичном открытом круге и непрерывных в его замыкании. Система Франклина обладает многими свойствами системы Хаара (см. [4]–[7], [9]). В 1990 Г. Геворкьяном [5] была доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $E \subset [0, 1]$ – множество положительной меры Лебега $\mu(E) > 0$. Для почти всюду (п.в.) сходимости на E ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ по классической системе Франклина необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 f_n^2(x)$ п.в. сходилась бы на E .

В работах [8], [10] многие результаты, касающиеся классической системы Франклина, были обобщены на общие системы Франклина. Однако, для функций общей системы Франклина отсутствуют экспоненциальные оценки. В работе [8] были введены понятия слабого и сильного регулярного разбиения отрезка $[0, 1]$.

Обозначим $\lambda_{j,k} = |I_{j,k}| = t_{j,k} - t_{j,k-1}$. Для $n = 2^j + k$, $k = 1, \dots, 2^j$ обозначим $\{n\} = [t_{j,k-1}; t_{j,k}]$ и $[n] = j$. $\{n\}$ называется интервалом пика функции f_n .

Определение. Квазидвоичное разбиение $\{\mathcal{P}_j : j \geq 0\}$ отрезка $[0, 1]$ называется сильно регулярным, если существует $\gamma \geq 1$ такое, что

$$\frac{1}{\gamma} \leq \frac{\lambda_{j,k+1}}{\lambda_{j,k}} \leq \gamma \quad \text{для всех } k = 1, \dots, 2^j - 1 \text{ и } j \geq 0.$$

Напомним (см. [8]), что общая система Франклина $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ является базисом в $H_1[0, 1]$ тогда и только тогда, когда она порождена сильно регулярным разбиением отрезка $[0, 1]$.

В настоящей работе Теорема 1 распространяется на общие системы Франклина, порожденные сильно регулярными квазидвоичными разбиениями отрезка $[0, 1]$.

Теорема 2. Пусть $\{\mathcal{P}_j : j \geq 0\}$ – сильно регулярное разбиение отрезка $[0, 1]$ и $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ – соответствующая система Франклина. Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ п.в. сходится на множестве $E \subset [0, 1]$ с $\mu(E) > 0$ тогда и только тогда, когда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 f_n^2(x)$ п.в. сходится на E .

§2. НЕКОТОРЫЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Предложение 1, [8]. Пусть $\{\mathcal{P}_j : j \geq 0\}$ – сильно регулярное разбиение отрезка $[0, 1]$ с коэффициентом $\gamma \geq 1$. Тогда

1. для всех $j \geq 0$ и $k = 1, \dots, 2^j$

$$\frac{1}{\gamma+1} |I_{j,k}| \leq |I_{j+1,i}| \leq \frac{\gamma}{\gamma+1} |I_{j,k}|, \quad i = 2k-1, 2k;$$

2. если $I_{m,l} \subset I_{j,k}$ для некоторых j, k, m, l , то

$$\left(\frac{1}{\gamma+1}\right)^{m-j} |I_{j,k}| \leq |I_{m,l}| \leq \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^{m-j} |I_{j,k}|;$$

3. для всех $j \geq 0$ и $1 \leq k \leq 2^j, 1 \leq l \leq 2^j$

$$\gamma^{-2} (|k-l|+1)^{-\log_2 \gamma} |I_{j,k}| \leq |I_{j,l}| \leq \gamma^2 (|k-l|+1)^{\log_2 \gamma} |I_{j,k}|.$$

Предложение 2, [8]. Для сильно регулярного разбиения $\{\mathcal{P}_j : j \geq 0\}$ отрезка $[0, 1]$ и для $n = 2^j + k; 1 \leq k \leq 2^j$

$$f_n(t_{j+1,i}) = (-1)^{2k-1-i} |f_n(t_{j+1,i})|; |f_n(t_{j+1,i-1})| \leq \frac{1}{2} |f_n(t_{j+1,i})| \text{ при } i \leq 2k-2.$$

и (для $i \geq 2k$ и $i = 2l$)

$$f_n(t_{j+1,i}) = (-1)^{k-1-i/2} |f_n(t_{j+1,i})|; |f_n(t_{j+1,i+2})| \leq \frac{1}{2} |f_n(t_{j+1,i})|.$$

Предложение 3, [8]. Пусть $\{\mathcal{P}_j : j \geq 0\}$ – квазидвоичное разбиение отрезка $[0, 1]$, $n = 2^j + k$ и $m = 2^j + l$, где $1 \leq k < l \leq 2^j$. Тогда существуют числа α, β , зависящие только от n и m такие, что

$$f_n(u) = \alpha f_m(u) \text{ при } u \leq t_{j+1,2k-2} \text{ и } f_n(u) = \beta f_m(u) \text{ при } u \geq t_{j+1,2l}.$$

Предложение 4, [9]. Для любого натурального числа m и любого $0 < \varepsilon \leq 1$ существует постоянная $C(m, \varepsilon)$ такая, что для любого полинома $P(x)$ степени m , для всякого множества $A \subset [a, b]$, удовлетворяющего условию $\mu(A) \geq \varepsilon(b-a)$, имеем

$$\max_{u \in [a,b]} |P(u)| \leq C(m, \varepsilon) \sup_{u \in A} |P(u)|.$$

§3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ И ЛЕММЫ

Определение. Функция

$$M^*(f, x) = \sup_{\substack{I \in \mathcal{I} \\ x \in I}} \frac{1}{|I|} \int_I |f(u)| du$$

называется максимальной функцией, соответствующей f и квазидвоичному разбиению $\{\mathcal{P}_j : j \geq 0\}$.

Положим $E^c = [0, 1] \setminus E$, E° — внутренность множества E , а $\chi_E = \chi_E(x)$ — характеристическая функция множества E .

Предложение 5. Пусть $M > 0$, $0 < \delta < 1$ и $A \subset [0, 1]$ — множество, на котором $\sup_N \left| \sum_{n=0}^N a_n f_n(x) \right| < M$. Положим $B = \{x \in [0, 1] : M^*(\chi_{[0,1] \setminus A}, x) > 1 - \delta\}$. Тогда

- $B = \cup_{j,k} I_k^{(j)}$, где $I_k^{(j)} \in \mathcal{I}_k$ имеют непересекающиеся внутренности;
- для любого j, k имеем $\mu(I_k^{(j)} \cap A) < \delta \mu(I_k^{(j)})$, где $I_k^{(j)}$ — множество из пункта а);
- если $\{n\}^\circ \cap B = \emptyset$, то $\|a_n f_n(x)\|_{L_\infty(0,1)} < C_0(M, \delta)$.

Доказательство : а) Пусть $x_0 \in B$. По определению максимальной функции, существует $I_0 \in \mathcal{I}$ такое, что $x_0 \in I_0$ и $\frac{1}{|I_0|} \mu(I_0 \cap ([0, 1] \setminus A)) > 1 - \delta$, т.е. для любого $x \in I_0$ имеем $M^*(\chi_{[0,1] \setminus A}, x) > 1 - \delta$.

б) Так как $I_k^{(j)} \subset B$, то имеем $\mu(I_k^{(j)} \cap ([0, 1] \setminus A)) > (1 - \delta) \mu(I_k^{(j)})$. Следовательно,

$$\mu(I_k^{(j)} \cap A) = \mu(I_k^{(j)}) - \mu(I_k^{(j)} \cap ([0, 1] \setminus A)) < \mu(I_k^{(j)}) - (1 - \delta) \mu(I_k^{(j)}) = \delta \mu(I_k^{(j)}).$$

в) Так как $\sup_{x \in A} |a_n f_n(x)| \leq 2M$ и $\{n\}^\circ \cap B = \emptyset$, то имеем $\mu(\{n\} \cap A) \geq \delta \mu(\{n\})$ и в силу Предложения 4, $\|a_n f_n(x)\|_{L_\infty(\{n\})} \leq C_0(M, \delta)$. Следовательно, в) вытекает из Предложения 2.

Лемма 1. Пусть $I \in \mathcal{I}_{j_0}$ и $W = \{n : \{n\} \cap I^\circ = \emptyset; [n] \geq j_0; \|a_n f_n(x)\|_{L_\infty(0,1)} \leq C\}$ для некоторого постоянного $C > 0$. Тогда существует $C_1(\gamma)$ такое, что

$$\int_I \sum_{n \in W} |a_n f_n(x)| dx \leq C_1(\gamma) \cdot |I|.$$

Доказательство : Пусть $I = I_{j_0, k_0}$. Положим $k > k_0$ и оценим интеграл

$$\int_{I_{j_0, k_0}} \sum_{\substack{\{n\} \subset I_{j_0, k} \\ n \in W}} |a_n f_n(x)| dx.$$

Если $\{n\} \subset I_{j_0, k}$, то $n = 2^j + m$ ($j \geq j_0$) и $\{n\} = [t_{j, m-1}; t_{j, m}]$. Так как $\{n\} \subset I_{j_0, k} = [t_{j, 2^{j-j_0}(k-1)}; t_{j, 2^{j-j_0}k}]$, то $2^{j-j_0}(k-1) < m \leq 2^{j-j_0}k$. Пусть $x \in I_{j, l} \subset I_{j_0, k_0}$. Из Предложения 2 следует, что

$$\sum_{\substack{2^j < n < 2^{j+1} \\ \{n\} \subset I_{j_0, k} \\ n \in W}} |a_n f_n(x)| \leq C \sum_{2^{j-j_0}(k-1) < m \leq 2^{j-j_0}k} 2^{-|m-l|} \leq C_2 \cdot 2^{-|2^{j-j_0}k-l|}.$$

Следовательно

$$\int_{I_{j, l}} \sum_{\substack{2^j < n < 2^{j+1} \\ \{n\} \subset I_{j_0, k} \\ n \in W}} |a_n f_n(x)| dx \leq C_2 \cdot |I_{j, l}| 2^{-|2^{j-j_0}k-l|}. \quad (1)$$

Так как $|I_{j, p}| \leq \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^{j-j_0} |I_{j_0, k_0}|$ for $I_{j, p} \subset I_{j_0, k_0}$, то из (1) получаем

$$\begin{aligned} \int_{I_{j_0, k_0}} \sum_{\substack{2^j < n < 2^{j+1} \\ \{n\} \subset I_{j_0, k} \\ n \in W}} |a_n f_n(x)| dx &= \sum_{p=2^{j-j_0}(k_0-1)}^{2^{j-j_0}k_0} \int_{I_{j, p}} \sum_{\substack{2^j < n < 2^{j+1} \\ \{n\} \subset I_{j_0, k} \\ n \in W}} |a_n f_n(x)| dx \leq \\ &\leq C_2 \cdot \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^{j-j_0} |I_{j_0, k_0}| \sum_{p=2^{j-j_0}(k_0-1)}^{2^{j-j_0}k_0} 2^{-|2^{j-j_0}k-p|}. \end{aligned}$$

Так как $k > k_0$, получим

$$\sum_{p=2^{j-j_0}(k_0-1)}^{2^{j-j_0}k_0} 2^{-|2^{j-j_0}k-p|} = 2^{-2^{j-j_0}k} \sum_{p=2^{j-j_0}(k_0-1)}^{2^{j-j_0}k_0} 2^p \leq C_3 \cdot 2^{-2^{j-j_0}(k-k_0)}.$$

Следовательно

$$\int_{I_{j_0, k_0}} \sum_{\substack{\{n\} \supset I_{j_0, k} \\ \{n\} \subset \cup_{k > k_0} I_{j_0, k} \\ n \in W}} |a_n f_n(x)| dx \leq C_4 \cdot |I_{j_0, k_0}| \sum_{j=j_0}^{\infty} \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^{j-j_0} \leq C_5(\gamma) \cdot |I_{j_0, k_0}|.$$

Аналогично имеем

$$\int_{I_{j_0, k_0}} \sum_{\substack{\{n\} \supset I_{j_0, k} \\ \{n\} \subset \cup_{k < k_0} I_{j_0, k} \\ n \in W}} |a_n f_n(x)| dx \leq C_6(\gamma) \cdot |I_{j_0, k_0}|.$$

Лемма 1 доказана.

Пусть A и B – как и в Предложении 5. Из представления а) множества B вытекает, что существуют некоторые замкнутые интервалы $I_q = [t_q, t'_q]$, удовлетворяющие условию $I_q \cap I_{q'} = \emptyset$ для $q \neq q'$ и $B = \bigcup_{q=1}^{\infty} I_q$.

Лемма 2. Пусть $\eta > 0$ и пусть J'_q — интервал концентрический с I_q такой, что $\mu(J'_q) = (1 + 2\eta)\mu(I_q)$, $D = [0, 1] \setminus \cup_{q=1}^{\infty} J'_q$. Тогда

$$\int_D \sum_{\{n\} \subset B} |a_n f_n(x)| dx < +\infty.$$

Доказательство :

$$\begin{aligned} \int_D \sum_{\{n\} \subset B} |a_n f_n(x)| dx &\leq \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{\{n\} \subset I_q \\ [n]=k}}^{\infty} \int_{[0,1] \setminus J'_q} \sum_{\substack{\{n\} \subset I_q \\ [n]=k}} |a_n f_n(x)| dx \leq \\ &\leq \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{k=k_0}^{\infty} \int_{[0,1] \setminus J'_q} S_k(x) dx, \end{aligned}$$

где k_0 — минимальное натуральное число, для которого $I_{k_0}^{(j)} \subset I_q$ и $S_k(x) =$

$$\sum_{\substack{\{n\} \subset I_q \\ [n]=k}} |a_n f_n(x)|.$$

Пусть $I_q = [t_q, t'_q]$ и $I_{k,p} \in \mathcal{I}_k$ — ближайший интервал слева от t_q , и удовлетворяющий условию $I_{k,p} \not\subset B$. Ясно, что $\mu(I_{k,p} \cap A) \geq \delta \mu(I_{k,p})$. Так как $|a_n f_n(x)| \leq 2M$ при $x \in A$ и $a_n f_n(x)$ является линейной функцией на $I_{k,p}$ (при $[n] = k$), из Предложения 4 получаем $|a_n f_n(x)| < C_7(M, \delta)$ на $I_{k,p}$, когда $\{n\} \subset I_q$ и $[n] = k$. Отсюда следует, что $S_k(x) \leq C_7(M, \delta) 2^{k-k_0}$ для $x \in I_{k,p}$.

Следовательно, $S_k(x) \leq C_7(M, \delta) 2^{k-k_0} \frac{1}{2^{p-v}}$ для $x \in I_{k,p} : v = 1, \dots, p$ (см. Предложение 2). Теперь мы хотим показать, что

$$S_k(x) \leq C_7(M, \delta) 2^{k-k_0} \left(\frac{1}{2}\right)^{|x-t_{k,p}|} \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^{-k} =: R(x) \quad \text{для } x \leq t_{k,p}. \quad (2)$$

Из Предложения 3 следует, что оценку (2) достаточно доказать для $x = t_{k,v}$, $v = 1, \dots, p$.

Неравенство $S_k(t_{k,p-1}) \leq R(t_{k,p-1})$ следует из $|t_{k,p} - t_{k,p-1}| \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^{-k} \leq 1$, которое является одним из свойств сильно регулярного разбиения (см. Предложение 1).

Пусть $J'_q = [\bar{t}_q; \bar{t}'_q]$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\bar{t}_q} S_k(x) dx &\leq C_7(M, \delta) 2^{k-k_0} \int_{\eta|I_q|}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{t} \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^{-k} dt \leq \\ &\leq C_7(M, \delta) 2^{k-k_0} \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{\eta \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^{-k} |I_q|}. \end{aligned}$$

Так как мы имеем аналогичную оценку для $\int_{\bar{t}'_q}^1 S_k(x) dx$, то из неравенства

$$\int_{[0,1] \setminus J'_q} S_k(x) dx \leq C_7(M, \delta) 2^{k-k_0} \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{\eta \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^{-k} |I_q|}$$

вытекает

$$\int_D \sum_{\{n\} \subset B} |a_n f_n(x)| dx \leq C_7(M, \delta) \sum_{q=1}^{\infty} 2^{-k_0} \sum_{k=k_0}^{\infty} \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{\eta \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^{-k} |I_q|} \leq \\ \leq C_8(M, \delta, \gamma) \sum_{I_q} 2^{-k_0}.$$

Теперь покажем, что $\sum_{I_{k_0}^{(j)}} 2^{-k_0} < +\infty$. Обозначим через $\{P_j' : j \geq 0\}$ двоичное разбиение отрезка $[0, 1]$. Тогда существует непрерывное и взаимно-однозначное отображение $\varphi_n : [0, 1] \leftrightarrow [0, 1]$, линейное на интервалах из $\mathcal{I}_n$, сильно монотонное и $\varphi_n(t_{n,k}) = \frac{k}{2^n}$. Если или $k_0 \neq k_1$ или $k_0 = k_1$, но не $j_0 \neq j_1$, то $\varphi_{k_0}(I_{k_0}^{(j_0)}) \cap \varphi_{k_1}(I_{k_1}^{(j_1)}) = \emptyset$ (так как φ_0 - сильно монотонное и $I_{k_0}^{(j_0)} \cap I_{k_1}^{(j_1)} = \emptyset$. Следовательно, из $k_0 = k_1$ и $j_0 \neq j_1$ следует, что $\varphi_{k_0}(I_{k_0}^{(j_0)}) \cap \varphi_{k_1}(I_{k_1}^{(j_1)}) = \emptyset$.) Пусть теперь $k_0 \neq k_1$. Предположим, что $k_0 > k_1$. Если $I_{k_0}^{(j_0)}$ лежит слева от $I_{k_1}^{(j_1)}$, и t_0 - левый конец интервала $I_{k_1}^{(j_1)}$, то $\varphi_{k_0}(x) < \varphi_{k_0}(t_0)$ для $x \in I_{k_0}^{(j_0)}$ и $\varphi_{k_1}(t_0) < \varphi_{k_1}(y)$ для $y \in I_{k_1}^{(j_1)}$. Так как $\varphi_{k_0}(t_0) = \varphi_{k_1}(t_0)$, то необходимо $\varphi_{k_0}(I_{k_0}^{(j_0)}) \cap \varphi_{k_1}(I_{k_1}^{(j_1)}) = \emptyset$. Имеем $\mu(\cup_{I_{k_0}^{(j)}} \varphi_{k_0}(I_{k_0}^{(j)})) = \sum_{k_0, j} \mu(\varphi_{k_0}(I_{k_0}^{(j)})) = \sum_{k_0, j} \frac{1}{2^{k_0}} \leq 1$. Лемма 2 доказана.

Следствие. $\sum_{\{n\} \subset B} |a_n f_n(x)| < +\infty$ п.в. на $[0, 1] \setminus B$.

Доказательство : Следует из Леммы 2 при $\eta \rightarrow 0$

§4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Доказательство Теоремы 2. Достаточность : Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 f_n^2(x) < +\infty$ п.в. на E и $\delta > 0$. Тогда существуют множество $A \subset E$ и $M > 0$ такие, что $\mu(A) > \mu(E) - \delta$ и

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 f_n^2(x) < M < +\infty, \quad x \in A. \quad (3)$$

Очевидно, что $[0, 1] \setminus B \subset A$, где B определено в Предложении 5. Пусть $N_1 = \{n : n = 0, 1, \dots; \{n\} \subset B\}$, и $N_2 =$ дополнение к N_1 в множестве неотрицательных целых чисел. Далее, если $\{n\} \notin B$, то $|a_n f_n(x)| < \sqrt{M}$ для $x \in A$. Следовательно, из Предложения 4 и Леммы 1, при $I = I_{k_0}^{(j)}$ получаем

$$\int_{I_{k_0}^{(j)}} \sum_{\substack{\{n\} \cap I_{k_0}^{(j)} = \emptyset \\ \{n\} \geq k_0 \\ n \in N_2}} a_n^2 f_n^2(x) dx \leq C_0(M, \delta) \int_{I_{k_0}^{(j)}} \sum_{\substack{\{n\} \cap I_{k_0}^{(j)} = \emptyset \\ \{n\} \geq k_0 \\ n \in N_2}} |a_n f_n(x)| dx \leq \\ \leq C_9(M, \delta, \gamma) |I_{k_0}^{(j)}|. \quad (4)$$

Так как $[0, 1] \setminus B \subset A$, то имеет место (3) при $[0, 1] \setminus B$. Следовательно

$$\int_0^1 \sum_{n \in N_2} a_n^2 f_n^2(x) dx \leq M + \int_{\cup_{k_0, j} I_{k_0}^{(j)}} \sum_{n \in N_2} a_n^2 f_n^2(x) dx =: M + V. \quad (5)$$

Используя (4) получим

$$\begin{aligned} V &= \sum_{k_0=0}^{\infty} \sum_j \left\{ \int_{I_{k_0}^{(j)}} \sum_{\substack{[n] \geq k_0 \\ n \in N_2}} a_n^2 f_n^2(x) dx + \int_{I_{k_0}^{(j)}} \sum_{\substack{[n] \leq k_0-1 \\ n \in N_2}} a_n^2 f_n^2(x) dx \right\} \leq \\ &\leq C_9(M, \delta, \gamma) + \sum_{k_0, j} \int_{I_{k_0}^{(j)}} \sum_{\substack{[n] \leq k_0-1 \\ n \in N_2}} a_n^2 f_n^2(x) dx. \end{aligned} \quad (6)$$

Пусть $J_{k_0, j}$ — интервал порядка $k_0 - 1$, удовлетворяющий условиям $I_{k_0}^{(j)} \subset J_{k_0, j}$ и $J = J_{k_0, j} \setminus I_{k_0}^{(j)}$. Тогда $J_{k_0, j} \not\subset B$ и $J \not\subset B$, и имеем $\mu(J \cap A) \geq \delta \mu(J)$, $\mu(J_{k_0, j} \cap A) \geq \delta \mu(J_{k_0, j})$. Следовательно, $\sum_{\substack{[n]=k_0-1 \\ n \in N_2}} a_n^2 f_n^2(x)$ является квадратичным

трехчленом на J . Из Предложения 4 и (3) получаем

$$\left\| \sum_{\substack{[n]=k_0-1 \\ n \in N_2}} a_n^2 f_n^2(x) dx \right\|_{L_{\infty}(J)} \leq C_{10}(M, \delta).$$

Аналогично, из $\left\| \sum_{\substack{[n]=k_0-2 \\ n \in N_2}} a_n^2 f_n^2(x) dx \right\|_{L_{\infty}(I_{k_0}^{(j)})} \leq C_{10}(M, \delta)$ и

$$\left\| \sum_{\substack{[n]=k_0-1 \\ n \in N_2}} a_n^2 f_n^2(x) dx \right\|_{L_{\infty}(I_{k_0}^{(j)})} \approx \left\| \sum_{\substack{[n]=k_0-1 \\ n \in N_2}} a_n^2 f_n^2(x) dx \right\|_{L_{\infty}(J)}$$

вытекает

$$\left\| \sum_{\substack{[n] \leq k_0-1 \\ n \in N_2}} a_n^2 f_n^2(x) dx \right\|_{L_{\infty}(I_{k_0}^{(j)})} \leq C_{11}(M, \delta). \quad (7)$$

Таким образом, из неравенств (5), (6) и (7) получаем

$$\int_0^1 \sum_{n \in N_2} a_n^2 f_n^2(x) dx \leq M + C_9(M, \delta, \gamma) + C_{11}(M, \delta) < +\infty.$$

Так как рассматриваем сходящуюся систему, то $\sum_{n \in N_2} a_n f_n(x)$ сходится п.в. на $[0, 1]$. Из следствия Леммы 2 получим, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ сходится п.в. на A . Устремив δ к нулю, получим сходимость п.в. ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ на множестве E .

Необходимость : вытекает из следующего утверждения.

Теорема 3. Пусть $\{\mathcal{P}_j : j \geq 0\}$ – сильно регулярное разбиение отрезка $[0, 1]$ с коэффициентом $\gamma \geq 1$ и $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ – соответствующая система Франклина. Если

$$\sup_N \left| \sum_{n=0}^N a_n f_n(x) \right| < +\infty \quad \text{п.в. на } E, \quad (8)$$

то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 f_n^2(x)$ сходится п.в. на множестве E .

Доказательство Теоремы 3 : Из (8) вытекает, что для любого $\delta > 0$ существуют множество $E_\delta \subset E$ и число $M > 0$ такие, что

$$\left\| \sum_{n=0}^N a_n f_n(x) \right\|_{L_\infty(E_\delta)} < M \quad \text{для любого } N, \quad (9)$$

а также $\|a_n f_n(x)\|_{L_\infty(E_\delta)} < M$ для любого n , и $\mu(E_\delta) > \mu(E) - \delta$.

Положим $B = \{x : \mathcal{M}^-(\chi_{[0,1] \setminus E_\delta}, x) > 1 - \delta\}$, $B = \bigcup_{k,j} I_k^{(j)}$. Рассмотрим функцию $f_n(x)$ с $n \in N_2$, которая соответствует B . По Лемме 1 и Предложению 5, при любом k_0 имеем

$$\int_{I_{k_0}^{(j)}} \sum_{\substack{(n) \cap I_{k_0}^{(j)} = \emptyset \\ [n] \geq k_0 \\ n \in N_2}} |a_n f_n(x)| dx \leq C_{12}(M, \delta) |I_{k_0}^{(j)}|,$$

и, следовательно

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 0, & x \notin B \\ \sum_{\substack{(n) \cap I_{k_0}^{(j)} = \emptyset \\ [n] \geq k_0 \\ n \in N_2}} |a_n f_n(x)|, & x \in I_{k_0}^{(j)} \end{cases}$$

корректно определена. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi_1(x) dx &= \sum_{k_0, j} \int_{I_{k_0}^{(j)}} \sum_{\substack{(n) \cap I_{k_0}^{(j)} = \emptyset \\ [n] \geq k_0 \\ n \in N_2}} |a_n f_n(x)| dx \leq \\ &\leq C_{12}(M, \delta) \sum_{k_0, j} |I_{k_0}^{(j)}| \leq C_{12}(M, \delta) < +\infty. \end{aligned}$$

Пусть теперь $n \in N_1$, $\{n\} \subset I_{k_0}^{(j)}$ и $[n] = k$. Предположим, что $I_{k_0, k}^{(j)}$ – наибольший интервал типа $[t_{k, p}; t_{k, q}]$, содержащий $I_{k_0}^{(j)}$ и $I_{k_0, k}^{(j)} \subset B$. Обозначим $J = [t_{k, q}; t_{k, q+1}]$. Легко убедиться, что $J^\circ \cap (\bigcup_{p \leq k} \bigcup_j I_p^{(j)}) = \emptyset$. Так как $J \not\subset B$, то из Предложения 4 получаем

$$|a_n f_n(x)| \leq C_{13}(M, \delta) \quad \text{при } x \in J \text{ и } n \in N_1. \quad (10)$$

Следовательно

$$|S_{j,k_0,k,m}(x)| \leq C_{13}(M, \delta) \quad \text{для } x \in J. \quad (11)$$

где $S_{j,k_0,k,m}(x) = \sum_{\substack{[n]=k \\ (n) \subset I_{k_0,k}^{(j)} \\ n \leq m \\ n \in N_1}} a_n f_n(x).$

Поэтому имеем $I_{k_0,k}^{(j)} \subset \cup_{p \leq k} \cup_j I_p^{(j)}$ и

$$\mu(I_{k_0,k}^{(j)}) \leq (\gamma^3 + \gamma^2 + \gamma + 1) \mu(I_{k_0}^{(j)}). \quad (12)$$

Положим

$$\varphi_{k_0}^{(j)}(x) = \begin{cases} 0, & x \in I_{k_0}^{(j)} \\ \sum_{k=k_0}^{p-1} \max_m |S_{j,k_0,k,m}(x)|, & x \in I_{k_0,p}^{(j)} \setminus I_{k_0,p-1}^{(j)}, \quad p > k_0. \\ \sum_{k=k_0}^{\infty} \max_m |S_{j,k_0,k,m}(x)|, & x \notin \cup_{k=k_0}^{\infty} I_{k_0,k}^{(j)} \end{cases}$$

Следовательно

$$\int_0^1 \varphi_{k_0}^{(j)}(x) dx = \sum_{p=k_0+1}^{\infty} \int_{I_{k_0,p}^{(j)} \setminus I_{k_0,p-1}^{(j)}} \sum_{k=k_0}^{p-1} \max_m |S_{j,k_0,k,m}(x)| dx + \\ + \int_{[\cup_{k=k_0}^{\infty} I_{k_0,k}^{(j)}]^c} \sum_{k=k_0}^{\infty} \max_m |S_{j,k_0,k,m}(x)| dx =: V_1 + V_2.$$

Пусть $R_p(x) = \sum_{k=k_0}^{p-1} \max_m |S_{j,k_0,k,m}(x)|$. Таким образом, имеем $R_{p+1}(x) = R_p(x) + \max_m |S_{j,k_0,p,m}(x)|$. Для $x \in I_{k_0,k_0+1}^{(j)} \setminus I_{k_0,k_0}^{(j)}$ имеем $R_{k_0+1}(x) = \max_m |S_{j,k_0,k_0,m}(x)| \leq C_{16}(M, \delta)$ и $R_{k_0+2}(x) = R_{k_0+1}(x) + \max_m |S_{j,k_0,k_0,m}(x)| \leq R_{k_0+1}(x) + C_{13}(M, \delta) \leq 2C_{13}(M, \delta)$ для $x \in I_{k_0,k_0+2}^{(j)} \setminus I_{k_0,k_0+1}^{(j)}$. Аналогично, получаем $R_{k_0+3}(x) \leq 2C_{13}(M, \delta)$ для $x \in I_{k_0,k_0+3}^{(j)} \setminus I_{k_0,k_0+2}^{(j)}$, и, вообще, для $x \in I_{k_0,v}^{(j)} \setminus I_{k_0,v-1}^{(j)}$ имеем $R_v(x) \leq 2C_{13}(M, \delta)$. Следовательно, из (12) находим

$$V_1 \leq 2C_{13}(M, \delta) \sum_{p=k_0+1}^{\infty} \mu(I_{k_0,p}^{(j)} \setminus I_{k_0,p-1}^{(j)}) \leq 2C_{13}(M, \delta) \mu(I_{k_0}^{(j)}) (\gamma^3 + \gamma^2 + \gamma + 1). \quad (13)$$

С другой стороны

$$V_2 \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} \int_{[I_{k_0,k}^{(j)}]^c} \max_m |S_{j,k_0,k,m}(x)| dx.$$

Положим $I_{k_0,k}^{(j)} = [t_{k,p}; t_{k,q}]$. Пусть $I_{k,v}$, $v = 1, \dots, 2^k$ - интервалы порядка k , и пусть p удовлетворяет условиям $I_{k,p}^c \cap I_{k_0,k}^{(j)} = \emptyset$ и $I_{k,p+1} \subset I_{k_0,k}^{(j)}$. Таким образом,

из (11) получаем, что $\max_m |S_{j,k_0,k,m}(x)| \leq C_{13}(M, \delta)$ на $I_{k,p}$. Поэтому необходимо $\max_m |S_{j,k_0,k,m}(x)| \leq \frac{1}{2^{p-v}} C_{16}(M, \delta)$ на $I_{k,v}$, $v = 1, \dots, p$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{t_{k,p}} \max_m |S_{j,k_0,k,m}(x)| dx &= \sum_{v=1}^p \int_{I_{k,v}} \max_m |S_{j,k_0,k,m}(x)| dx \leq \\ &\leq C_{13}(M, \delta) \sum_{v=1}^p \frac{1}{2^{p-v}} |I_{k,v}|. \end{aligned} \quad (14)$$

Пусть $I_{k_0}^{(j)} = I_{k_0,m_0}$. Тогда из $I_{k,p+1} \subset I_{k_0,k}^{(j)}$ вытекает или $I_{k,p+1} \subset I_{k_0,m_0-2}$ или $I_{k,p+1} \subset I_{k_0,m_0-1}$ или $I_{k,p+1} \subset I_{k_0,m_0}$. Предположим, что $I_{k,p+1} \subset I_{k_0,m_0-2}$. Тогда из условий $|I_{k,p+1}| \leq \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^{k-k_0} |I_{k_0,m_0-2}|$ и $|I_{k_0,m_0-2}| \leq \gamma^2 3^{\log_2 \gamma} |I_{k_0,m_0}|$ (см. Предложение 1), получаем

$$|I_{k,p+1}| \leq C_{14}(M, \delta, \gamma) \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^{k-k_0} |I_{k_0,m_0}| = C_{14}(M, \delta, \gamma) \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^{k-k_0} |I_{k_0}^{(j)}|.$$

С другой стороны, по Предложению 1, из $|I_{k,v}| \leq \gamma^2 (|v-p-1|+1)^{\log_2 \gamma} |I_{k,p+1}| = \gamma^2 (p+2-v)^{\log_2 \gamma} |I_{k,p+1}|$, $v = 1, \dots, p$ получаем

$$|I_{k,v}| \leq C_{15}(M, \delta, \gamma) \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^{k-k_0} (p+2-v)^{\log_2 \gamma} |I_{k_0}^{(j)}|. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (14), получим

$$\int_0^{t_{k,p}} \max_m |S_{j,k_0,k,m}(x)| dx \leq C_{16}(M, \delta, \gamma) \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^{k-k_0} |I_{k_0}^{(j)}|,$$

так как

$$\sum_{v=1}^p \frac{1}{2^{p-v}} (p+2-v)^{\log_2 \gamma} \leq 2^{\log_2 \gamma} + \dots + \frac{1}{2^{p-2}} p^{\log_2 \gamma} + \frac{1}{2^{p-1}} (p+1)^{\log_2 \gamma} + \dots < +\infty.$$

Аналогичные неравенства имеют место для $\int_{t_{k,v}}^1 \max_m |S_{j,k_0,k,m}(x)| dx$. Следовательно

$$V_2 \leq C_{16}(M, \delta, \gamma) |I_{k_0}^{(j)}| \sum_{k=k_0}^{\infty} \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^{k-k_0} \leq C_{17}(M, \delta, \gamma) |I_{k_0}^{(j)}|. \quad (16)$$

Из (13) и (16) получим

$$\int_0^1 \varphi_{k_0}^{(j)}(x) dx \leq C_{18}(M, \delta, \gamma) |I_{k_0}^{(j)}|.$$

Обозначая $\varphi(x) = \varphi_1(x) + \sum_{k,j} \varphi_k^{(j)}(x)$, имеем $\int_0^1 \varphi(x) dx < +\infty$.

Теперь рассмотрим ряд $\sum_{n \in N_2} a_n f_n(x)$. Для $x \notin B$ и любого m , из (9) получим

$$\left| \sum_{\substack{n \leq m \\ n \in N_2}} a_n f_n(x) \right| \leq \left| \sum_{n \leq m} a_n f_n(x) \right| + \left| \sum_{\substack{n \leq m \\ n \in N_1}} a_n f_n(x) \right| \leq M + \left| \sum_{\substack{n \leq m \\ n \in N_1}} a_n f_n(x) \right|.$$

Очевидно, из $x \notin B$ вытекает $x \notin \bigcup_{k=k_0}^{\infty} I_{k_0, k}^{(j)}$ для всех k_0 . Таким образом, $B = \bigcup_m I_m$, где I_m имеют не пересекающиеся внутренности. Имеем $N_1 = \bigcup_m \{n : n \in N_1; \{n\} \subset I_m\}$ и $\{n : n \in N_1; \{n\} \subset I_m\} = \bigcup_{k=k_0}^{\infty} \{n : n \in N_1; \{n\} \subset I_{k_0, k}^{(j)}; [n] = k\}$, где k_0 - минимальное число такое, что $I_m = \bigcup_{k=k_0}^{\infty} I_{k_0, k}^{(j)}$. Тогда из неравенства

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\substack{n \leq m \\ n \in N_1}} a_n f_n(x) \right| &= \left| \sum_p \sum_{\substack{\{n\} \subset I_p \\ n \leq m \\ n \in N_1}} a_n f_n(x) \right| \leq \\ &\leq \sum_{k_0, j} \sum_{k=k_0}^{\infty} \max_m |S_{j, k_0, k, m}(x)| \leq \sum_{k_0, j} \varphi_{k_0}^{(j)}(x) \leq \varphi(x) \end{aligned}$$

вытекает, что

$$\left| \sum_{\substack{n \leq m \\ n \in N_2}} a_n f_n(x) \right| \leq M + \varphi(x), \quad x \notin B. \quad (17)$$

Пусть теперь $x \in I_{k_0}^{(j)}$ и $m \leq 2^{k_0-1}$. Имеем $m \leq 2^{k_0-1}$, $n \in N_1$ и $n \leq m$, т.е. $[n] \leq k_0 - 1$. Откуда следует, что $\{n\} \subset I_{k_0}^{(j)}$ не существует. Пусть $\{n\} \subset I_{m_0} = \bigcup_{k=k_0}^{\infty} I_{k_0, k}^{(j)}$. Тогда существует $p_0 < k_0$ такое, что $\{n\} \subset I_{p_0}^{(j)}$ и $I_{p_0}^{(j)} \cap I_{k_0}^{(j)} = \emptyset$. Следовательно, из $x \in I_{k_0}^{(j)}$ и $\{n\} \subset I_{p_0}^{(j)}$ следует, что $x \in I_{p_0, k_0}^{(j)} \setminus I_{p_0, k_0-1}^{(j)}$ ($k_0 > p_0$) и получаем

$$\left| \sum_{\substack{\{n\} \subset I_{p_0}^{(j)} \\ n \leq m}} a_n f_n(x) \right| \leq \sum_{p=p_0}^{k_0-1} \left| \sum_{\substack{\{n\} \subset I_p^{(j)} \\ [n]=p \\ n \leq m}} a_n f_n(x) \right| \leq \sum_{p=p_0}^{k_0-1} \max_m |S_{j, k_0, k, m}(x)| \leq \varphi_{p_0}^{(j)}(x)$$

для $x \in I_{k_0}^{(j)}$. Если $m \leq 2^{k_0-1}$ и $x \in I_{k_0}^{(j)}$, то функция $\sum_{n \leq m} a_n f_n(x)$ - линейная на интервалах порядка $k_0 - 1$. Один из этих интервалов не есть интервал типа $I_{k_0-1}^{(j)}$ (в противном случае не было бы интервала $I_{k_0}^{(j)}$). Для этого интервала $\mu(I \cap E_\delta) \geq \delta \mu(I)$, откуда получим $\left| \sum_{n \leq m} a_n f_n(x) \right| \leq C_{19}(M, \delta)$ для $x \in I_{k_0}^{(j)}$.

Наконец

$$\left| \sum_{\substack{n \leq m \\ n \in N_2}} a_n f_n(x) \right| \leq C_{19}(M, \delta) + \varphi(x) \quad \text{при } x \in I_{k_0}^{(j)}. \quad (18)$$

Если же $x \in I_{k_0}^{(j)}$ и $m > 2^{k_0-1}$, то

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\substack{n \leq m \\ n \in N_2}} a_n f_n(x) \right| &\leq \left| \sum_{n=1}^{2^{k_0-1}} a_n f_n(x) \right| + \left| \sum_{\substack{n \leq 2^{k_0-1} \\ n \in N_1}} a_n f_n(x) \right| + \left| \sum_{\substack{2^{k_0-1} < n \leq m \\ n \in N_2}} a_n f_n(x) \right| \leq \\ &\leq C_{19}(M, \delta) + \sum_{k,j} \varphi_k^{(j)}(x) + \varphi_1(x). \end{aligned} \quad (19)$$

Таким образом, из (17), (18), (19) получаем $\sup_N \left| \sum_{\substack{n \leq N \\ n \in N_2}} a_n f_n(x) \right| \in L_1(0, 1)$.

Откуда имеем (см. [8])

$$\left[\sum_{n \in N_2} a_n^2 f_n^2(x) \right]^{1/2} \in L_1(0, 1)$$

и, следовательно,

$$\sum_{n \in N_2} a_n^2 f_n^2(x) < +\infty \text{ п.в. на } [0, 1]. \quad (20)$$

Согласно Следствию, на множестве $[0, 1] \setminus B$ имеем

$$\sum_{n \in N_1} a_n^2 f_n^2(x) \leq +\infty. \quad (21)$$

При $\delta \rightarrow 0$, из (20) и (21) вытекает, что $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 f_n^2(x) < +\infty$ п.в. на E . Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Следующие утверждения эквивалентны :

1. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 f_n^2(x) < +\infty$ п.в. на E ;
2. $\sup_N \left| \sum_{n=0}^N a_n f_n(x) \right| < +\infty$ п.в. на E ;
3. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ сходится п.в. на E ;
4. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ сходится по мере безусловно на E .

Доказательство : Условия 1., 2., 3. эквивалентны Теоремам 1, 2. Эквивалентность 3. и 4. очевидна.

В заключение хотел бы выразить благодарность профессору Г. Г. Геворкяну за постановку задачи и ценные советы.

ABSTRACT. A criterion for almost everywhere convergence of series by generalized Franklin systems is derived extending a result for classical Franklin system proved by G. G. Gevorkian (Analysis Math., vol. 16, pp. 87 — 114, 1990).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ph. Franklin, "A set of continuous orthogonal functions", *Math. Ann.*, vol. 100, pp. 522 — 529, 1928.
2. Z. Ciesielski, "Properties of the orthonormal Franklin system", *Studia Math.*, vol. 23, pp. 141 — 157, 1963.
3. Z. Ciesielski, "Properties of the orthonormal Franklin system II", *Studia Math.*, vol. 27, pp. 289 — 323, 1966.
4. С. В. Бочкарев, "Существование базиса в пространстве аналитических в круге функций и некоторые свойства системы Франклина", *Мат. сб.*, том 95, стр. 3 — 18, 1974.
5. G. G. Gevorgyan, "On series by Franklin systems", *Analysis Math.*, vol. 16, pp. 87 — 114, 1990.
6. Ф. Г. Арутюнян, "О рядах по системе Хаара", *Докл. АН Арм.ССР*, том 42, № 3, стр. 134 — 140, 1966.
7. R. Gundy, "Martingale theory и pointwise convergence of certain orthogonal series", *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 124, pp. 228 — 248, 1966.
8. G. G. Gevorgyan, A. Kamont, "On general Franklin systems", *Diss. Math.*, CCCLXXIV, 1998.
9. G. G. Gevorgyan, "Some theorems on unconditional convergence and a majorant of Franklin series and their application to the spaces ReH_p ", *Труды Матем. Инст. им. Стеклова*, том 190, стр. 49 — 76, 1989.
10. Б. Кашин, А. Саакян, *Ортогональные Ряды*. Наука, Москва, 1984.

15 января 2000

Ереванский государственный университет