СПЕКТРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ КАНОНИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ф. Э. Мелик-Адамян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 2, 2000

В статье рассматриваются так называемые канонические дифференциальные уравнения и дается описание их спектральных функций и ортогональных спектральных функций.

§1. ВВЕДЕНИЕ

1. Пусть $N = \mathbf{C}^n$ – n-мерное унитарное пространство, а J – сигнатурный оператор в $N : J^* = J = J^{-1}$. Его можно представить в виде $J = iP_+ + iP_-$, где $P_\pm = (I_n \mp iJ)/2$ суть взаимнодополнительные ортопроекторы : $P_\pm^* = P_\pm = P_\pm^{-1}$. Начнем с ортогонального разложения $N = P_+N \oplus P_-N \quad (N_\pm = P_\pm N)$, и рассмотрим операторы N в виде двумерных блочных матриц. Например

$$I_n = \begin{pmatrix} P_+ & 0 \\ 0 & P_- \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} iP_+ & 0 \\ 0 & -iP_- \end{pmatrix}.$$

Каноническими дифференциальными уравнениями порядка n являются уравнения вида

$$J\frac{dx(r)}{dr} - \lambda H(r)\, x(r) = f(r), \quad 0 < r < l, \quad \lambda \in \mathbf{C}, \tag{1}$$

где $H(r)$ – $n \times n$ самосопряженная (т.е. $H^*(r) = H(r)$) матрица-функция (м-функция), суммируемая на интервале $(0, l)$: $\int_0^l \|H(r)\| dr < \infty$; $x(r) \in N$ и $f(r) \in N$ – n-мерные вектор-функции (в-функции), а $\lambda \in \mathbf{C}$ – комплексный параметр.

Заметим, что к уравнению вида (1) приводится более общее уравнение

$$W^*(r)\, J\frac{d}{dr}(W(r)\,\tilde{x}(r)) - V(r)\,\tilde{x}(r) - \lambda\,\tilde{H}(r)\,\tilde{x}(r) = \tilde{f}(r), \tag{2}$$

где $W^*(r)\, J\, W(r) = J$ и $V^*(r) = V(r)$ для всех $r \in (0, l)$. Это достигается с помощью преобразования $\tilde{x}(r) = U_0(r)\, x(r)$, где $U_0(r)$ – J-унитарное решение задачи Коши :

$$W^*(r)\,J\,\frac{d}{dr}(W(r)\,U_0(r)) - V(r)\,U_0(r) = 0; \quad U_0(0) = I_n.$$

В результате приходим к уравнению (1) с $H(r) = U_0^*(r)\tilde{H}(r)\,U_0(r)$ и $f(r) = U_0^*\,\tilde{f}(r)$.

Работы [1] и [2] являются основной литературой канонических уравнений с элементами спектральной теории.

В этой статье дается полное описание всех спектральных функций канонического дифференциального уравнения (1) вместе с описанием ортогональных спектральных функций.

Эта задача связана с задачей описания спектральных функций самосопряженных операторов [3].

В частном случае каноническое уравнение преобразовывается в уравнение струны. Описание спектральных функций одномерного уравнения струны дано в [4]. Аналогичная задача для оператора, порожденного дифференциальным выражением $W^*(r)\,J\,d(W(r)\,x(r))/dr$ рассмотрена в [5], [6].

Мы основываемся на описании матрицанта $U(r,l)$ канонического уравнения (1), т.е. на матричное решение задачи Коши :

$$J\,\frac{dU(r,\lambda)}{dr} - \lambda\,H(r)\,U(r,\lambda) = 0, \quad U(0,\lambda) = I_n.$$

Как показано в [1], $U(r,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k\,A_k(r)$, где

$$A_k(r) = -J\int_0^r H(s)\,A_{k-1}(s)\,ds. \quad (k = 1, 2, \ldots); \quad A_0(r) = I_k.$$

Матрицант $U(r,\lambda)$ является целой функцией экспоненциального типа относительно $\lambda \in \mathbf{C}$: $\|U(r,\lambda)\| = 0\left(e^{c|\lambda|}\right)$. С другой стороны, при $r \in [0,l]$, $U(r,\lambda)$ удовлетворяет тождеству

$$U^*(r,\mu)\,J\,U(r,\lambda) - J = (\lambda - \bar{\mu})\int_0^r U^*(r,\mu)\,H(r)\,U(r,\lambda)\,dr.$$

Отсюда непосредственно следуют характеристические соотношения

$$U^*(r,\bar{\lambda})\,J\,U(r,\lambda) = J = U(r,\lambda)\,J\,U^*(r,\bar{\lambda}), \quad (\lambda \in \mathbf{C}), \tag{3}$$

$$\frac{U^*(r,\lambda)\,J\,U(r,\lambda) - J}{\lambda - \bar{\lambda}} > 0, \quad \frac{U(r,\lambda)\,J\,U^*(r,\lambda) - J}{\lambda - \bar{\lambda}} > 0, \quad \left(\Im\lambda = \frac{\lambda - \bar{\lambda}}{2i} \neq 0\right). \tag{4}$$

В дальнейшем предполагается, что эрмитиан $H(r)$ положительного типа, т.е. выполняются условия

$$1)\ (H(r)\,x,x) \geq 0, \quad 2)\ \int_0^l (H(r)\,x,x)\,dr > 0, \quad x \in N.$$

Как показано в [1], отсюда следует, что

$$\int_0^l U^*(r,\lambda)\,H(r,\lambda)\,U(r,\lambda)\,dr > 0, \quad l \in \mathbf{C}.$$

2. Пусть $C_H(0,l;N)$ – пространство n-мерных непрерывных в-функций со скалярным произведением

$$(f,g)_H = \int_0^l (H(r)\,f(r), g(r))_N\,dr.$$

Его можно пополнить до гильбертова пространства $L^2_H(0,l;N)$. Рассмотрим "линейное отношение" $\mathbf{W}$ в пространстве $L^2_H(0,l;N) \oplus L^2_H(0,l;N)$, определенное следующим образом. Пара $\{x,f\}$, $x,f \in L^2_H(0,l;N)$ принадлежит $\mathbf{W}$ тогда и только тогда, когда $x(r)$ абсолютно непрерывна и

$$J\,\frac{dx(r)}{dr} = H(r)\,f(r).$$

Если $\{x,f\}$ и $\{y,g\}$ принадлежат $\mathbf{W}$, то

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ g \end{pmatrix}\right)_{L^2_H \oplus L^2_H} = \left(\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(l) \\ x(0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(l) \\ y(0) \end{pmatrix}\right)_{N \oplus N}.$$

Следовательно, задача описания симметрических, диссипативных и аккумулятивных сужений линейного отношения $\mathbf{W}$ сводится к описанию J-нейтральных или J-дефинитных подпространств в индефинитном J-пространстве $\widehat{N} = N \oplus N$ с

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -iJ & 0 \\ 0 & iJ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_+ - P_- & 0 \\ 0 & P_- - P_+ \end{pmatrix}.$$

Известно (см. [7]), что такие подпространства задаются с помощью нерастягивающих "угловых" операторов

$$K_+ : \widehat{N}_+ \to \widehat{N}_- \quad \text{или} \quad K_- : \widehat{N}_- \to \widehat{N}_+, \quad (\widehat{N}_\pm = \widehat{P}_\pm \widehat{N}; \quad \widehat{P}_\pm = \frac{1}{2}(I_{2n} \pm \mathbf{J})).$$

Это приводит к следующему утверждению.

Предложение 1. Каждое максимальное диссипативное или аккумулятивное сужение W_K линейного отношения W определяется граничными условиями

$$(P_- x(l) + P_+ x(0)) + K_+(P_+ x(l) + P_- x(0)) = 0 \quad \text{диссипативное. л.о.,}$$

$$(P_+ x(l) + P_- x(0)) + K_-(P_- x(l) + P_+ x(0)) = 0 \quad \text{аккумулятивное. л.о.,} \tag{5}$$

где K_+ (K_-) – нерастягивающий оператор, действующий из пространства $\widehat{N}_+$ ($\widehat{N}_-$) в пространство $\widehat{N}_-$ ($\widehat{N}_+$). Если K унитарен, то эти условия определяют самосопряженное линейное отношение W_K.

В дальнейшем, будем рассматривать операторы K, принадлежащие единичному матричному кругу Θ или окружности Θ_0 :

$$\Theta = \{K \in [N]/K^* K \leq I_n\}; \quad \Theta_0 = \{K \in [N]/K^* K = I_n\}.$$

Для каждого элемента $f \in L^2_H(0,l;N)$ определим преобразование Фурье

$$F(\lambda, f) = \int_0^l U^*(r,\bar{\lambda})\, H(r)\, f(r)\, dr. \tag{6}$$

Для $f \in L^2_H(0,l;N)$ эти образы образуют пространство L целых в-функций, если скалярное произведение определить по $(F(\lambda,f), F(\lambda,g))_L \overset{def}{=\!=} (f,g)_H$. Ниже мы докажем, что L является пространством де Бранжа с порождающим ядром

$$\Phi(\lambda,\mu) = \int_0^l U^*(r,\bar{\lambda})\, H(r)\, U(r,\bar{\mu})\, dr = \frac{U^*(l,\bar{\lambda})\, J\, U(l,\bar{\mu}) - J}{\bar{\mu} - \lambda}. \tag{7}$$

Определение 1. Неубывающая матричная мера $\sigma(\xi)$ $(-\infty < \xi < \infty)$ называется спектральной функцией канонического уравнения (1) или линейного отношения W, если для всех $f \in L^2_H(0,l;N)$ выполняется тождество Парсеваля :

$$(f,g)_H = \int_{-\infty}^{\infty} (F(\xi,f), d\sigma(\xi)\, F(\xi,g)).$$

Пусть $L^2(-\infty,\infty;d\sigma)$ – гильбертово пространство в-функций $F(\xi)$, $-\infty < \xi < \infty$ со скалярным произведением

$$(F,G)_{L^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (F(\xi,f), d\sigma(\xi)\, F(\xi,g)).$$

Используя пространство $L^2(-\infty,\infty;d\sigma)$ можно дать эквивалентное определение.

Определение 2. Неубывающая матричная мера $\sigma(\xi)$ $(-\infty < \xi < \infty)$ называется спектральной функцией канонического уравнения (1) (или линейного отношения $\mathbf{W}$), если оператор сужения функций $F(l, f)$ на вещественную ось является изометрическим вложением $L^2_H(0, l; N)$ в $L^2_{d\sigma}(-\infty, \infty; N)$. Если это вложение является унитарным оператором из $L^2_H(0, l; N)$ на $L^2_{d\sigma}(-\infty, \infty; N)$, то $\sigma(\xi)$ $(-\infty < \xi < \infty)$ называется ортогональной спектральной функцией.

3. Рассмотрим теперь краевую задачу

$$\begin{cases} J\,\dfrac{dx(r,\lambda)}{dr} - \lambda\, H(r)\, x(r,\lambda) = H(r)\, f(r) \\ (P_+ x(l,\lambda) + P_- x(0,\lambda)) + K(P_- x(l,\lambda) + P_+ x(0,\lambda)) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Ее решение можно представить в виде

$$x(r,\lambda) = \int_0^l R_K(r, s, \lambda)\, f(s)\, ds, \tag{9}$$

где

$$R_K(r, s, \lambda) = \frac{1}{2} \begin{cases} U(r,\lambda)\,(\omega(\lambda) - J)\, U^*(s, \bar{\lambda})\, H(s) & s < r, \\ U(r,\lambda)\,(\omega(\lambda) + J)\, U^*(s, \bar{\lambda})\, H(s) & s > r. \end{cases} \tag{10}$$

Здесь м-функция $\omega(\lambda)$ определяется дробно–линейным преобразованием

$$\begin{aligned} \omega(\lambda) = \omega_K(\lambda) = [(P_+ U(l,\lambda) + P_-) + K(P_- U(l,\lambda) + P_+)]^{-1} \times \\ \times [(P_+ U(l,\lambda) - P_-)J + K(P_- U(l,\lambda) - P_+)J] \end{aligned} \tag{11}$$

и является матричной R–функцией. Вышеописанная конструкция сохраняет смысл, если нерастягивающие операторы K заменить нерастягивающими м-функциями $K(\lambda)$, аналитическими в верхней полуплоскости $\mathbf{C}_+ : K(\lambda) \in \Theta(\mathbf{C}_+)$. Дробно-линейное преобразование $\omega_K(\lambda)$ м-функции $K(\lambda) \in \Theta(\mathbf{C}_+)$ является матричной R-функцией и допускает интегральное представление с некоторой матричной мерой $\sigma(\xi)$ $(-\infty < \xi < \infty)$. Эта мера называется спектральной функцией м-функции $\omega_K(\lambda)$. В §3 доказана следующая теорема.

Теорема 1. Множество всех спектральных функций канонического уравнения (1) совпадает с множеством спектральных функций дробно-линейных преобразований $\omega_K(\lambda)$, отвечающих м-функциям $K(\lambda) \in \Theta(\mathbf{C}_+)$. Спектральная функция ортогональна тогда и только тогда, когда $K(\lambda) \in \Theta(\mathbf{C}_+)$ является постоянной унитарной матрицей.

В §4 рассмотрим краевые задачи с распадающимися краевыми условиями. В случае полуоси спектральные функции обладают определенной симметрией, что позволяет "вдвое" понизить размерность их спектральных функций. Теорема 2 дает соответствующее описание.

В заключение укажем на связь наших рассмотрений с теорией пространств де Бранжа.

Пусть $U(\lambda)$ - $(n \times n)$ целая м-функция, удовлетворяющая условиям

1) при всех вещественных λ, $U(\lambda)$ есть J-унитарная матрица : $U^*(\lambda)\, J\, U(\lambda) = J$,

2) при всех $l \in \mathbf{C}_+$, $U(l)$ является J-несжимающей матрицей : $U^*(\lambda)(-i\,J)\,U(\lambda) \geq (-iJ)$.

Тогда $U(\lambda)$ порождает пространство де Бранжа $B(U)$ с порождающим ядром $\Phi(\lambda, \mu)$, определенное формулой (7) (см. [9]). По теореме Потапова (см. [10])м-функцию $U(\lambda)$ можно рассматривать как значение матрицанта $U(l, \lambda)$ некоторого канонического уравнения. Тогда $B(U) = L$ - пространство преобразований Фурье, введенное по формуле (7).

Это позволяет описать все матричные меры, решающие задачу о равенстве Парсеваля в пространстве $B(U)$.

§2. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА И ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1. Докажем теперь, что решение краевой задачи (8) представляется формулой (9) (см. также (10) и (11)). Легко установить, что решение $x(r, l)$ уравнения

$$J\,\frac{dx(r,\lambda)}{dr} - \lambda\, H(r)\, x(r,\lambda) = H(r)\, f(r) \qquad (12)$$

допускает представление

$$x(r,\lambda) = U(r,\lambda)(c - J\int_0^r U^*(s,\bar\lambda)\, H(s)\, f(s)\, ds) \quad (c \in N). \qquad (13)$$

Граничное условие (8) запишем в виде

$$[(P_+U(l,\lambda) + P_-) + K(P_-U(l,\lambda) + P_+]c =$$
$$= (P_+ + KP_-)\,U(l,\lambda)\, J\int_0^l U^*(s,\bar\lambda)\, H(s)\, f(s)\, ds.$$

Так как при $K \in \Theta$ и $\lambda \in \mathbf{C}_+$ оператор слева обратим, то

$$c = \Phi(l,\lambda)\,(P_+ + KP_-)\,U(l,\lambda)\, J\int_0^l U^*(s,\bar\lambda)\, H(s)\, f(s)\, ds,$$

где $\Phi(l,\lambda) = [(P_+U(l,\lambda) + P_-) + K(P_-U(l,\lambda) + P_+)]^{-1}$.

Следовательно, решение $x(r,\lambda)$ краевой задачи (8) можно представить в виде

$$x(r,\lambda)=U(r,\lambda)\{\Phi(l,\lambda)(P_{+}+KP_{-})U(l,\lambda)J-J\}\int_0^r U^{*}(s,\bar\lambda)\,H(s)\,f(s)\,ds+$$
$$+U(r,\lambda)\{\Phi(l,\lambda)(P_{+}+KP_{-})U(l,\lambda)\,J\}\int_r^l U^{*}(s,\bar\lambda)\,H(s)\,f(s)\,ds.$$

Легко проверить, что выражения в скобках можно представить в виде $(\omega(\lambda)-J)/2$ и $(\omega(\lambda)+J)/2$, соответственно, где $\omega(\lambda)$ – дробно-линейное преобразование (11) оператора $K\in\Theta$.

Обозначим через $\Omega(\lambda)$ $(\Omega_0(\lambda))$ образ единичного матричного круга Θ (окружности Θ_0) при дробно-линейном преобразовании (11), $\lambda\in\mathbf{C}_{+}$.

Через $\Omega(\mathbf{C}_{+})$ обозначим образ множества нерастягивающих аналитических в $\mathbf{C}_{+}$ м-функций $K(\lambda)\in\Theta(\mathbf{C}_{+})$ при дробно-линейном преобразовании (11). Через $\Omega_0(\mathbf{C}_{+})$ обозначим образ унитарных м-функций K.

Рассмотрим дробно-линейное преобразование (11). Исходя из матрицанта $U(r,\lambda)$, введем "основную" $(2n\times 2n)$-матрицу $A(\lambda)$ по формуле

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}A_{11}(\lambda) & A_{12}(\lambda)\\ A_{21}(\lambda) & A_{22}(\lambda)\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}P_{+}U(l,\lambda)+P_{-} & (P_{+}U(l,\lambda)-P_{-})\,J\\ P_{-}U(l,\lambda)+P_{+} & (P_{-}U(l,\lambda)-P_{+})\,J\end{pmatrix}.$$

Положим $V(\mu,\lambda)=(U^{*}(l,\mu)\,J\,U(l,\lambda)-J)/2$. Непосредственным вычислением получим

$$V(\mu,\lambda)=V(\mu,\nu)+V(\bar\nu,\lambda)-2V(\mu,\nu)\,J\,V(\bar\nu,\lambda). \tag{14}$$

Следовательно

$$V^{-1}(\bar\lambda,\bar\lambda)+V^{-1}(\lambda,\lambda)=2\,J. \tag{15}$$

Из тождества

$$A^{*}(\mu)\begin{pmatrix}iI_n & 0\\ 0 & -iI_n\end{pmatrix}A(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & -I_n\\ I_n & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}V(\mu,\lambda) & V(\mu,\lambda)J\\ -JV(\mu,\lambda) & -JV(\mu,\lambda)J\end{pmatrix} \tag{16}$$

следует

$$A^{-1}(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & I_n\\ I_n & 0\end{pmatrix}A^{*}(\bar\lambda)\begin{pmatrix}iI_n & 0\\ 0 & -iI_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}iA_{12}^{*}(\bar\lambda) & -iA_{22}^{*}(\bar\lambda)\\ -iA_{11}^{*}(\bar\lambda) & iA_{21}^{*}(\bar\lambda)\end{pmatrix}. \tag{17}$$

Из (17), (3) и (4) вытекает

$$A_{11}^{*}(\lambda)\,A_{11}(\lambda)-A_{21}^{*}(\lambda)\,A_{21}(\lambda)=i\,V(\lambda,\lambda)\begin{cases}>0 & \lambda\in\mathbf{C}_{+},\\ =0 & \lambda\in R,\\ <0 & \lambda\in\mathbf{C}_{-}.\end{cases}$$

Предложение 2. Пусть при $\lambda \in \mathbf{C}_+$ существуют операторы $A_{21}(\lambda)\, A_{11}^{-1}(\lambda)$ и $A_{22}(\lambda)\, A_{12}^{-1}(\lambda)$ и являются строго сжимающими. Тогда для всех $K \in \Theta$ операторы $(A_{11}(\lambda)+K\, A_{21}(\lambda))$ и $A_{12}(\lambda)+K\, A_{22}(\lambda))$ обратимы. Кроме того, операторы $(A_{11}(\lambda)+K\, A_{21}(\lambda))^{-1}$ и $A_{12}(\lambda)+K\, A_{22}(\lambda))^{-1}$ равномерно ограничены относительно $K \in \Theta$. При $\lambda \in \mathbf{C}_-$ аналогичные утверждения справедливы относительно операторов $A_{21}(\lambda)\, A_{11}^{-1}(\lambda)$ и $A_{22}(\lambda)\, A_{12}^{-1}(\lambda)$.

Таким образом, при всех $\lambda \in \mathbf{C}_+$ и для всех $K \in \Theta$ существует дробно-линейное преобразование (11) :

$$\omega(\lambda) = \Delta(K) = (A_{11}(\lambda) + K\, A_{21}(\lambda))^{-1}(A_{12}(\lambda) + K\, A_{22}(\lambda)).$$

Из (17) следует, что оператор K однозначно восстанавливается :

$$K = -(A_{12}^*(\bar\lambda) - \omega(\lambda)\, A_{11}^*(\bar\lambda))^{-1}(A_{22}^*(\bar\lambda) - \omega(\lambda)\, A_{21}^*(\bar\lambda)). \tag{18}$$

Предложение 3. При каждом $\lambda \in \mathbf{C}_+$ дробно-линейное преобразование (11) взаимно-однозначно отображает единичный матричный круг Θ и окружность Θ_0 на образы $\Omega(\lambda)$ и $\Omega_0(\lambda)$, соответственно. Множество $\Omega(\lambda) = \{\omega(\lambda) = \Delta(K)/K \in \Theta\}$ является матричным кругом (окружностью $\Omega(\lambda) = \{\omega(\lambda) = \Delta(K)/K \in \Theta_0\}$), лежащим в верхней матричной полуплоскости $\Im\, \omega(\lambda) = -i\,(\omega(\lambda) - \omega^*(\lambda)) \geq 0$, и определяется соотношениями

$$2\Im\, \omega(\lambda) \geq (\omega^*(\lambda) + J)\{-i\, V(\lambda,\lambda)\}(\omega(\lambda) - J),$$

$$(2\Im\, \omega(\lambda) = (\omega^*(\lambda) + J)\{-i\, V(\lambda,\lambda)\}(\omega(\lambda) - J)). \tag{19}$$

Круг $\Omega(\lambda)$ (окружность $\Omega_0(\lambda)$) допускает параметрическое представление

$$\omega(\lambda) = C + (-i\, V(\lambda,\lambda))^{-1/2}\, Z(i\, V(\bar\lambda,\bar\lambda))^{-1/2},$$

где $Z \in \Theta$ $(Z \in \Theta_0)$ и $C = J - V^{-1}(\lambda,\lambda) = V^{-1}(\bar\lambda,\bar\lambda) - J$.

Доказательство : В силу (11) имеем

$$A(\lambda)\begin{pmatrix} -\omega(\lambda) \\ I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K \\ I_n \end{pmatrix}(A_{22}(\lambda) - A_{21}(\lambda)\omega(\lambda)).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} -\omega(\lambda) \\ I_n \end{pmatrix}^* A^*(\lambda)\begin{pmatrix} iI_n & 0 \\ 0 & -iI_n \end{pmatrix} A(\lambda)\begin{pmatrix} -\omega(\lambda) \\ I_n \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -\omega(\lambda) \\ I_n \end{pmatrix}^* \left\{\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V(\mu,\lambda) & V(\mu,\lambda)J \\ -JV(\mu,\lambda) & -JV(\mu,\lambda)J \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} -\omega(\lambda) \\ I_n \end{pmatrix} = \\
&= (\omega^*(\lambda) - \omega(\lambda)) + (\omega^*(\lambda) + J)\, V(\lambda,\lambda)(\omega(\lambda) - J).
\end{aligned} \tag{20}$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{pmatrix} -\omega(\lambda) \\ I_n \end{pmatrix}^* A^*(\lambda) \begin{pmatrix} iI_n & 0 \\ 0 & -iI_n \end{pmatrix} A(\lambda) \begin{pmatrix} -\omega(\lambda) \\ I_n \end{pmatrix} =$$
$$= (A_{22}(\lambda) - A_{21}(\lambda)\omega(\lambda))^* i(K^*K - I_n)(A_{22}(\lambda) - A_{21}(\lambda)\omega(\lambda)).$$

Отсюда следует соотношение (19), причем для $K \in \Theta_0$ имеет место равенство. Обратно, пусть $\omega(\lambda)$ удовлетворяет соотношению (19). Тогда в силу (20) для всех $x \in N$ имеем

$$\left(J \begin{pmatrix} A_{12}(\lambda) - A_{11}(\lambda)\omega(\lambda)x \\ A_{22}(\lambda) - A_{21}(\lambda)\omega(\lambda)x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_{12}(\lambda) - A_{11}(\lambda)\omega(\lambda)x \\ A_{22}(\lambda) - A_{21}(\lambda)\omega(\lambda)x \end{pmatrix} \right) \le 0.$$

Обозначим через $-K$ нерастягивающий оператор J-неположительного подпространства

$$\left\{ \begin{pmatrix} A_{12}(\lambda) - A_{11}(\lambda)\omega(\lambda)x \\ A_{22}(\lambda) - A_{21}(\lambda)\omega(\lambda)x \end{pmatrix} / \, x \in N \right\}$$

пространства $\widehat{N}$. Тогда $-K(A_{22}(\lambda) - A_{21}(\lambda)\omega(\lambda)) = A_{12}(\lambda) - A_{11}(\lambda)\omega(\lambda)$, т.е. $\omega(\lambda)$ определяется преобразованием (11). Заметим, что равенство в (20) дает J–нейтральность рассматриваемого подпространства. Тогда его угловой оператор унитарен, и $\omega(\lambda) \in \Omega_0(\lambda)$.

Из Предложения 3 следует, что м-функции $\omega(\lambda) \in \Omega(\mathbf{C}_+)$ являются матричными R-функциями. Следовательно, они допускают представление (см. [11])

$$\omega(\lambda) = A + \lambda B + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\xi - \lambda} - \frac{\xi}{1+\xi^2}\right) d\sigma(\xi),$$

где A эрмитова, B – положительная матрица, а $\sigma(\xi)$ $(-\infty < \xi < \infty)$ – неубывающая м-функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\xi)}{1+\xi^2} < \infty.$$

Матричная мера $\sigma(\xi)$ называется спектральной функцией R-функции $\omega(\lambda)$. Множество спектральных функций $\sigma(\xi)$ R-функций $\omega(\lambda) \in \Omega(\mathbf{C}_+)$ обозначим через T. Пусть также $T_0 = \{\sigma(\xi) \in T / \omega(\lambda) \in \Omega_0\}$.

§3. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ КАНОНИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Лемма 1. *Пусть $\sigma(\xi)$ – спектральная функция R-функции $\omega(\lambda) \in \Omega(\mathbf{C}_+)$ и оператор R_λ определяется соотношениями (12) и (13). Тогда для*

каждого фиксированного $f \in L^2(0,l;N)$ **функция** $(R_\lambda f, f)_H$ **является** R_0**–функцией (см. [11]) и**

$$(R_\lambda f, f)_H = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(F(\xi,f), d\sigma(\xi)\, F(\xi,f))}{\xi - \lambda}. \tag{21}$$

Доказательство : Для в-функции $x(r,l) = (R_\lambda f)(r)$, которая является решением краевой задачи (8), имеем

$$(f, R_\lambda f)_H = (f, x)_H = \int_0^l (H(r)f(r), x(r,\lambda))dr = \int_0^l (Jx'(r,\lambda), x(r,\lambda))dr - \lambda(x,x)_H.$$

Следовательно

$$\Im(R_\lambda f, f)_H = \Im\lambda(x,x)_H + \frac{i}{2}[(Jx(l,\lambda), x(l,\lambda)) - (Jx(0,\lambda), x(0,\lambda))].$$

В силу краевого условия получим

$$i/2[(Jx(l,\lambda), x(l,\lambda)) - (Jx(0,\lambda), x(0,\lambda))] \geq 0.$$

Следовательно, $\Im(R_\lambda f, f)_H \geq \Im\lambda(x,x)_H$. Это означает (см. [11]), что $(R_\lambda f, f)_H$ является R_0-функцией и

$$(R_\lambda f, f)_H = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau_f(\xi)}{\xi - \lambda}, \quad \text{где} \quad \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_f(\xi) = \lim_{\eta \nearrow 0} \eta \operatorname{Im}(R_{i\eta} f, f)_H \leq (f,f)_H.$$

Отсюда, в силу формулы обращения Стилтьеса, для каждых двух точек непрерывности a и b функции $\tau_f(\xi)$ имеем

$$\tau_f(b) - \tau_f(a) = \pi^{-1} \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_a^b \Im(R_{\xi+i\epsilon} f, f)_H\, d\xi. \tag{22}$$

С другой стороны, из представления (10) следует

$$(R_\lambda f, f)_H = (\frac{1}{2}\omega(\lambda)\, F(\lambda, f), F(\bar\lambda, f))_N + (G_\lambda f, f)_H, \tag{23}$$

где G_λ - оператор в $L^2(0,l;N)$, действующий по формуле

$$(G_\lambda f)(r) = \int_0^l G(r,s,\lambda)\, f(s)\, ds,$$

где

$$G(r,s,\lambda) = \frac{1}{2}\begin{cases} -U(r,\lambda)JU^*(s,\bar\lambda)H(s), & s < r \\ U(r,\lambda)JU^*(s,\bar\lambda)H(s), & s > r. \end{cases}$$

Легко установить, что $(G_\lambda f, f)_H)$ является вещественной целой функцией. Используя обобщенную формулу Стилтьеса (см. [10]), из (23) получим

$$\pi^{-1} \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_a^b \Im(R_{\xi+i\epsilon} f, f)\, d\xi = \int_a^b (F(\xi,f), d\sigma(\xi) F(\xi,f)), \tag{24}$$

где a и b – произвольные точки непрерывности функции $\sigma(\xi)$.

Сопоставляя равенства (22) и (24) и учитывая, что общие точки непрерывности функций $\tau_f(\xi)$ и $\sigma(\xi)$ плотны на вещественной оси, получим

$$\tau_f(b) - \tau_f(a) = \int_a^b (F(\xi,f), d\sigma(\xi) F(\xi,f)), \quad a,b \in (-\infty, \infty),$$

которое равносильно равенству (21). Лемма 1 доказана.

Замечание 1. Из равенства (23) следует, что при таких $\lambda \in \mathbb{C}_+$ и $f \in L^2(0,l;N)$ множество $(R_\lambda f, f)$ описывает круг $\Omega(\lambda, f)$ (окружность $\Omega_0(\lambda, f)$) в верхней полуплоскости, когда $\omega(\lambda)$ пробегает множество $\Omega(\mathbb{C}_+)$ $(\Omega_0(\mathbb{C}_+))$. Параметрическое представление круга $\Omega(\mathbb{C}_+)$ $(\Omega_0(\mathbb{C}_+))$ имеет вид

$$(R_\lambda f, f)_H = \frac{1}{2}((-iV(\lambda,\lambda)^{-1/2}Z(iV(\bar\lambda,\bar\lambda)^{-1/2}F(\lambda,f), F(\bar\lambda,f))_N +$$
$$+\frac{1}{2}(V^{-1}(\bar\lambda,\bar\lambda)F(\lambda,f), F(\bar\lambda,f))_N -$$
$$-\int_0^l (U(r,\lambda)J\int_0^r U^*(s,\bar\lambda,)H(s)f(s)ds, H(r)f(r))dr.$$

2. Рассмотрим гильбертово пространство L целых в-функций $F(\lambda, f)$ $(f \in L^2(0,l;N))$. Так как L является пространством с порождающим ядром $\Phi(\lambda,\mu)$, определяемым формулой (7), то для всех $F \in L$ и $x \in N$ имеем

$$\begin{aligned}(F(\lambda), \Phi(\lambda,\mu)x)_L &= \int_0^l (H(r)f(r), U(r,\bar\mu)x) = \\ &= \left(\int_0^l U^*(r,\bar\mu)H(r)f(r)dr, x\right)_N = (F(\mu), x)_N.\end{aligned} \tag{25}$$

В силу тождества (14) (см. [9]) L является пространством де Бранжа. Из (25) следует, что линейный оператор из L в N, отображающий $F(\lambda) \to F(\mu)$, непрерывен. Тогда множество $\{\Phi(\lambda,\mu_n)x\}$ при $x \in N$ и $\mu_n \not\to \infty$ $(\mu_n \in \mathbb{C})$ плотно в L. Таким образом, множество $\{U(r,\mu_n)x\}$ плотно в $L^2(0,l;N)$. Из (25) следует также, что многообразие $M_\mu = \{F \in L / F(\mu) = 0\}$ является подпространством и

$$M_\mu^\perp = N\mu = \{\Phi(\lambda,\mu)x / x \in N\}.$$

Следовательно, $L = M_\mu \oplus N_\mu$, и ортопроектор P_{M_μ} на подпространство M_μ имеет вид

$$P_{M_\mu} F(\lambda) = F(\lambda) - \Phi(\lambda,\mu)c, \quad \text{где} \quad c = \Phi^{-1}(\mu,\mu)F(\mu)(\in N).$$

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Предложение 4. При произвольном $F(\lambda) \in L$ и $\mu \in \mathbb{C}_+$ функция $G(\lambda) = (\lambda-\mu)^{-1}F(l) - \Phi(\lambda,\mu)c$ принадлежит L. Точнее, $G(\lambda) = F(\lambda, g)$, где $g(r)$ определяется равенством

$$\begin{aligned}g(r) &= -U(r,\mu)J\int_0^r U^*(s,\bar\mu)H(s)(f(s) - U(s,\bar\mu)c)ds = \\ &= -U(r,\mu)J\int_0^r U^*(s,\bar\mu)H(s)f(s)ds - \frac{U(r,\bar\mu)-U(r,\mu)}{\bar\mu-\mu}c.\end{aligned} \tag{26}$$

Функция $(\lambda-\mu)^{-1}F(\lambda)$ принадлежит L тогда и только тогда, когда $F \in M_\mu$.

Доказательство : Непосредственно проверяется, что в-функция $g(r)$, определенная равенством (26), является решением уравнения (12) при $\lambda = \mu$ с правой частью $H(r)\,(f(r) - U(r,\mu)\,c)$. Кроме того, имеем $g(l) = g(0) = 0$. Это равносильно равенству $G(\lambda) = (F(\lambda) - \Phi(\lambda,\mu)\,c)/(\lambda - \mu)$.

Обратимся теперь к рассмотрению множества Σ всех спектральных функций канонических дифференциальных уравнений (1) и его подмножества Σ_0 ортогональных спектральных функций. Отметим, что если $\sigma(\xi) \in \Sigma$, то обратное преобразование Фурье имеет вид

$$f(r) = \int_{-\infty}^{\infty} U(r,\lambda)\,d\sigma(\lambda)\,F(\lambda,f).$$

Действительно, имеем

$$(f(r), U(r,\bar\mu)x)_H = (F(\lambda,f), \Phi(\lambda,\mu)x)_L = \int_{-\infty}^{\infty} (d\sigma(\lambda)F(\lambda,f), \Phi(\lambda,\mu)x) =$$

$$= \int_0^l (\int_{-\infty}^{\infty} (U(r,\lambda)d\sigma(\lambda)F(\lambda,f), H(r)U(r,\bar\mu)x)dr =$$

$$= (\int_{-\infty}^{\infty} (U(r,\lambda)d\sigma(\lambda)F(\lambda,f), U(r,\bar\mu)x)_H.$$

Зафиксируем некоторую спектральную функцию $\sigma(\xi)$ и $\mu \in \mathbf{C}_+$, и в пространстве $L^2(R^1;d\sigma)$ рассмотрим оператор умножения на $(\xi - \bar\mu)/(\xi - \mu)$. Этот оператор является унитарным и отображает M_μ на $M_{\bar\mu}$. Функция $(\xi - \bar\mu)/(\xi - \mu)\,\Phi(\xi,\mu)\,x \in L^2(R^1;d\sigma)$ ортогональна подпространству $M_{\bar\mu}$, так как если $F \in M_{\bar\mu}$, то $(l - \bar\mu)/(l - \mu)\,F(l) \in M_\mu$. Следовательно

$$(\frac{\xi - \bar\mu}{\xi - \mu}\Phi(\xi,\mu)x, F(\xi))_{L^2} = (\Phi(\xi,\mu)x, \frac{\xi - \mu}{\xi - \bar\mu}F(\xi))_{L^2} = (\Phi(\lambda,\mu)x, \frac{\lambda - \mu}{\lambda - \bar\mu}F(\lambda))_L = 0.$$

Обозначим через P_L ортопроектор из $L^2(R^1;d\sigma)$ на L. Тогда для каждого $x \in N$ существует элемент $y \in N$ такой, что

$$P_L \frac{\lambda - \bar\mu}{\lambda - \mu}\Phi(\lambda,\mu)\,x = \Phi(\lambda,\bar\mu)\,y \quad (x, y \in N).$$

Сопоставим каждому $\sigma \in \Sigma$ оператор $C_\mu(\sigma)$, действующий в N по формуле $C_\mu(\sigma)\,x = y$. Тогда имеет место неравенство

$$\|\Phi(\lambda,\bar\mu)\,\mathbf{C}_\mu(\sigma)x\| \le \|\Phi(\lambda,\mu)x\|, \tag{27}$$

в смысле норм пространств $L^2(R^1;d\sigma)$ и L. Для всех $x \in N$ в неравенстве (27) имеет место равенство тогда и только тогда, когда $\sigma(\lambda)$ является ортогональной спектральной функцией. Следовательно

$$\int_0^l (H(r)\,U(r,\mu)\,\mathbf{C}_\mu(\sigma)\,x, U(r,\mu)\,\mathbf{C}_\mu(\sigma)\,x)\,dr \le \int_0^l (H(r)\,U(r,\bar\mu)\,x, U(r,\bar\mu)\,x)\,dr.$$

Таким образом, в силу (7) и (25) получим

$$\mathbf{C}^*_\mu(\sigma)\,\Phi(\bar\mu,\bar\mu)\mathbf{C}_\mu(\sigma) \le \Phi(\mu,\mu). \tag{28}$$

Последнее неравенство определяет круг $\Sigma(\mu)$. Окружность $\Sigma_0(\mu)$ получается в случае, когда в (28) имеем равенство. Параметрическое представление круга $\Sigma(\mu)$ (окружности $\Sigma_0(\mu)$) задается формулой

$$\Sigma(\mu) = \mathbf{C}_\mu(\sigma) = \{\Phi^{-1/2}(\bar\mu,\bar\mu)\,Z\,\Phi^{1/2}(\mu,\mu)\ /\ Z\in\Theta(Z\in\Theta_0)\}.$$

3. Обозначим через $\Sigma(F,\mu)$ $(\Sigma_0(F,\mu))$ множество функций

$$I_{F,\mu}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{(F(\xi),d\sigma(\xi)\,F(\xi))}{\xi-\mu},$$

получаемое при фиксированных $F\in\mathbf{L}$ и $\mu\in\mathbf{C}_+$, а $\sigma(\xi)$ пробегает множество всех спектральных функций (ортогональных спектральных функций) канонических дифференциальных уравнений.

Лемма 2. При произвольном $F\in\mathbf{L}$ и $\mu\in\mathbf{C}_+$ множество $\Sigma(F,\mu)$ $(\Sigma_0(F,\mu))$ совпадает с множеством $\Omega(\mu,f)$ $(\Omega_0(\mu,f))$.

Доказательство : Используя Предложение 4, представим $I_{F,\mu}(\sigma)$ в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{F(\xi,f)-\Phi(\xi,\mu)c_0}{\xi-\mu},d\sigma(\xi)F(\xi),f\right) = (F(\lambda,g),F(\lambda,f))_L = (g,f)_H =$$
$$= -\int_0^l (U(r,\mu)J\int_0^r U^*(s,\bar\mu)H(s)f(s)ds,H(r)f(r))dr-$$
$$-\frac{1}{\bar\mu-\mu}\int_0^l (U(r,\bar\mu)c_0,H(r)f(r))dr+\frac{1}{\bar\mu-\mu}\int_0^l (U(r,\mu)c_0,H(r)f(r)) =$$
$$= -\int_0^l (U(r,\mu)J\int_0^r U^*(s,\bar\mu)H(s)f(s)ds,H(r)f(r))dr+$$
$$+\frac{1}{\mu-\bar\mu}(c_0,F(\mu,f))+\frac{1}{\bar\mu-\mu}(c_0,F(\bar\mu,f)).$$

Далее

$$\frac{1}{\mu-\bar\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi-\bar\mu}{\xi-\mu}(\Phi(\xi,\mu)c_0,d\sigma(\xi)F(\xi,f)) =$$
$$= \frac{(\Phi(\lambda,\bar\mu)C_\mu(\sigma)c_0,F(\lambda,f))_L}{\mu-\bar\mu} = \frac{(C_\mu(\sigma)c_0,F(\bar\mu,f))_N}{\mu-\bar\mu},$$

и наконец

$$\frac{1}{\mu-\bar\mu}\int_{-\infty}^{\infty}(\Phi(\xi,\mu)c_0,d\sigma(\xi)F(\xi,f)) = \frac{1}{\mu-\bar\mu}(c_0,F(\mu,f))_N.$$

Таким образом

$$I_{F,\mu}(\sigma) = \frac{1}{\mu - \bar{\mu}}(C_\mu(\sigma)c_0, F(\bar{\mu}, f))_N + \frac{1}{\bar{\mu} - \mu}(c_0, F(\bar{\mu}, f)) -$$

$$- \int_0^l (U(r,\mu)J \int_0^r U^*(s,\bar{\mu})H(s)f(s)ds, H(r)f(r))dr.$$

Параметрическое представление $C_\mu(\sigma)$, равенства

$$c_0 = \Phi^{-1}(\mu,\mu)F(\mu), \quad \Phi((\mu,\mu) = \frac{2V(\bar{\mu},\bar{\mu})}{\bar{\mu} - \mu},$$

и параметрическое представление $(R_\lambda f, f)_H$ из Замечания 1, взятые вместе, завершают доказательство.

Рассмотрим теперь м-функции $\omega \in \Omega(\mathbf{C}_+)$ и $\sigma \in \Sigma$, определенные параметрами $iZ \in \Theta$ и $Z \in \Theta$, соответственно. По Лемме 2 выражения $I_{F,\lambda}(\sigma)$ и $(R_\lambda f, f)_H$ совпадают. Следовательно, их спектральные функции также совпадают. Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 2. Множества спектральных функций R-функций $\omega(\lambda) \in \Omega(\mathbf{C}_+)$ и канонических дифференциальных уравнений (1) совпадают. Спектральная функция ортогональна тогда и только тогда, когда $\omega(\lambda) \in \Omega_0(\mathbf{C}_+)$.

4. Из Теоремы 1 следует, что ортогональные спектральные функции порождаются краевой задачей

$$\begin{cases} J\dfrac{du(r,\lambda)}{Dr} & -\lambda H(r)u(r,\lambda) = 0 \\ (P_+u(l,\lambda) + P_-u(0,\lambda)) & +K(P_-u(l,\lambda) + P_+u(0,\lambda)) = 0, \end{cases} \tag{29}$$

где K – унитарный оператор ($K^*K = I_n$).

Число $\lambda_0 \in \mathbf{C}$, при котором существует нетривиальное решение $u(r,\lambda_0)$ краевой задачи (28), называется собственным значением этой задачи, а $u(r,\lambda_0)$ – собственной функцией. Множество собственных значений задачи (29) обозначим через $Sp\mathbf{W}_K$. Собственные значения задачи (29) вещественны и собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны в $L^2_H(0,l;N)$. Ясно также, что $\lambda_k \in \mathbb{R}$ будет собственным значением задачи (29) тогда и только тогда, когда существует нетривиальное решение $x_0 \in N$ уравнения

$$[(P_+U(l,\lambda_k) + P_-) + K(P_-U(l,\lambda_k) + P_+)]x_0 = 0.$$

Таким образом, $Sp\mathbf{W}_K$ определяется условием

$$\det[(P_+U(l,\lambda_k) + P_-) + K(P_-U(l,\lambda_k) + P_+)] = 0.$$

Собственные функции $u(r,\lambda_0)$ определяются равенством $u(r,\lambda_k) = U(l,\lambda_k)x_0$, где

$$x_0 \in \Pi_k = \mathrm{Ker}[(P_+U(l,\lambda_k) + P_-) + K(P_-U(l,\lambda_k) + P_+)],$$

кратность значения $\lambda_k \in Sp\mathbf{W}_K$ равна $\pi_k = \dim \Pi_k$.

Базис $\{x_p\}_{p=1}^{\pi_k}$ подпространства Π_k можно выбрать так, чтобы собственные функции $u_p(r,\lambda_k) = U(r,\lambda_k)x_{kp}$ $(p = 1,2,\dots,\pi_k)$ были ортонормированы (см. [2]). М-функция $\omega(\lambda) \in \Omega_0(\lambda)$, определенная преобразованием (11) при унитарном K, удовлетворяет условию $\omega^*(\lambda) = \omega(\bar{\lambda})$. Следовательно, мероморфная м-функция $\omega(\lambda)$ имеет простые полюса в точках $\lambda_n \in Sp\mathbf{W}_K$ и может быть представлена в виде

$$\omega(\lambda) = (\lambda - \lambda_k)^{-1}P_k + \text{члены. регулярные в окрестности точки } \lambda_k.$$

Матрица P_k эрмитова. поэтому λ можно устремить к λ_k по вещественной оси. Далее, $[(P_+U(l,\lambda_n) + P_-) + K(P_-U(l,\lambda_n) + P_+)]P_n = 0$. и. следовательно. $\mathrm{rank} P_k \le \pi_k$. Можно доказать (см. [2]), что

$$P_k = \sum_{p=1}^{\pi_k} x_{kp}\, x_{kp}^*,$$

где базис $\{x_{kp}\}_{p=1}^{\pi_k}$ подпространства Π_n удовлетворяет условию

$$(U(r,\lambda_k)\,x_{kp}, U(r,\lambda_k)\,x_{kq})_H = \delta_{pq}.$$

Предложение 5. Ортогональные спектральные функции $\sigma(\xi)$ уравнения (1) имеют вид

$$\sigma(\xi) = \sum_{\lambda_k (\in Sp\mathbf{W}_K) < \xi} P_k.$$

Система в-функций $\{u_p(r,\lambda_k) = U(r,\lambda_k)x_{kp}\,;\ p = 1,2,\dots,pi_k,\ \lambda_k \in Sp\mathbf{W}_K\}$ образует ортонормированный базис в $L^2_H(0,l;N)$.

Доказательство : Мероморфная в-функция $\omega(\lambda) \in \Omega_0(\mathbf{C}_+)$ вещественна : $\omega^*(\lambda) = \omega(\bar{\lambda})$. Тогда она имеет аналитическое продолжение вдоль интервалов $(\lambda_k, \lambda_{k+1})$ $(\lambda_k \in Sp\mathbf{W}_K)$. Следовательно. м-функция $\sigma(\xi)$ является шаговой функцией. которая постоянна на интервалах $(\lambda_k, \lambda_{k+1})$ $(\lambda_k \in Sp\mathbf{W}_K)$ и со скачком $\sigma(l_k + 0) - \sigma(l_k - 0) = P_k$ в точках $\lambda_k \in Sp\mathbf{W}_K$). Тождество Парсеваля вершает доказательство :

$$(f,f)_H = \int_{-\infty}^{\infty} (F(\xi,f), d\sigma(\xi)F(\xi,f)) = \sum_{\lambda_k \in Sp\mathbf{W}_K} (F(\lambda_k,f), P_k F(\lambda_k,f)) =$$

$$= \sum_{\lambda_k \in Sp\mathbf{W}_K} \left(\sum_{p=1}^{n_k} \int_0^l (U^*(r,\lambda_k)H(r)f(r)dr, x_{kp}x_{kp}^* \int_0^l (U^*(r,\lambda_k)H(r)f(r)dr \right) =$$

$$= \sum_{\lambda_k \in Sp\mathbf{W}_K} \sum_{p=1}^{n_k} |(f, u_p(r,\lambda_k))|^2.$$

§4. ОПИСАНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С РАСПАДАЮЩИМИСЯ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Предположим, что $\dim N_+ \geq \dim M_-$. Граничное условие является распадающимся, если в (5) оператор K удовлетворяет $P_+ K P_+ = P_- K P_- = 0$, т.е. в разложении $N = N_+ \oplus N_-$ имеет место представление

$$K = \begin{bmatrix} 0 & K_l \\ K_0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда (5) принимает следующий вид :

$$P_+ x(l) + K_l P_- x(l) = 0; \quad P_- x(0) + K_0 P_+ x(0) = 0,$$

где $K_l : N_- \to N_+$ и $K_0 : N_+ \to N_-$ – произвольные нерастягивающие операторы. Отсюда следует, что распадающиеся граничные условия определяют самосопряженные расширения $\mathbf{W}_K$ в том и только том случае, когда $\dim N_+ = \dim N_-$, а оба оператора K_0 и K_l унитарны. В этом случае

$$\omega(\lambda) = \begin{pmatrix} U_{11}(l,\lambda) + K_l U_{21}(l,\lambda) & U_{12}(l,\lambda) + K_l U_{22}(l,\lambda) \\ K_0 & P_- \end{pmatrix}^{-1} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} i(U_{11}(l,\lambda) + K_l U_{21}(l,\lambda)) & -i(U_{12}(l,\lambda) + K_l U_{22}(l,\lambda)) \\ -iK_0 & iP_- \end{pmatrix}.$$

Положим

$$T(\lambda) = [U_{11}(l,\lambda) + K_l U_{21}(l,\lambda)]^{-1}[U_{12}(l,\lambda) + K_l U_{22}(l,\lambda)]. \tag{30}$$

Из свойств матрицы $U(l,\lambda)$ следует, что для произвольного нерастягивающего оператора $K_l : N_- \to N_+$, дробно–линейное преобразование (30) хорошо определено, и $T(\lambda)$ является нерастягивающим оператором из N_- в N_+. Теперь функцию $\omega(\lambda)$ можно представить в виде

$$\omega(\lambda) = i \begin{pmatrix} P_+ & T(\lambda) \\ K_0 & P_- \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P_+ & -T(\lambda) \\ -K_0 & P_- \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\begin{pmatrix} P_+ & T(\lambda) \\ K_0 & P_- \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (P_+ - T(\lambda)K_0)^{-1} & -T(\lambda)(P_- - K_0T(\lambda))^{-1} \\ -K_0(P_+ - T(\lambda)K_0)^{-1} & (P_- - K_0T(\lambda))^{-1} \end{pmatrix},$$

то

$$\omega(\lambda) = \begin{pmatrix} \omega_+(\lambda) & -T(\lambda)(iP_- + \omega_-(\lambda)) \\ -K_0(iP_+ + \omega_+(\lambda)) & \omega_-(\lambda) \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \omega_+(\lambda) &= i(P_+ - T(\lambda)K_0)^{-1}(P_+ + T(\lambda)K_0), \\ \omega_-(\lambda) &= i(P_- - K_0T(\lambda))^{-1}(P_- + K_0T(\lambda)). \end{aligned} \tag{31}$$

Ясно, что $\omega_\pm(\lambda)$ являются матричными R-функциями, действующими в $N_\pm$.

Зафиксируем некоторое граничное условие в нуле, задав изопериметрический оператор $K_0 : N_+ \to N_-$ $(K_0K_0^* = P_-)$, и рассмотрим задачу описания спектральных функций линейного отношения $\mathbf{W}_{K_0} \subset \mathbf{W}$, действующего на многообразии

$$\mathcal{D}(\mathbf{W}_{K_0}) = \{x \in D(\mathbf{W})/P_-x(0) + K_0P_+x(0) = 0;\ x(l) = 0\}.$$

Так как $\omega_-(\lambda) = K_0\omega_+(\lambda)K_0^*$, то имеем $(P_- \pm K_0T(\lambda)) = K_0(P_+ \pm T(\lambda)K_0)K_0^*$. С другой стороны

$$-2T(\lambda)(P_- - K_0T(\lambda))^{-1} = -2(P_+ - T(\lambda)K_0)^{-1}T(\lambda)K_0K_0^* = (iP_+ - \omega_+(\lambda))K_0^*.$$

Следовательно

$$\omega(\lambda) = \begin{pmatrix} P_+ \\ -K_0 \end{pmatrix} \omega_+(\lambda) \begin{pmatrix} P_+ \\ -K_0 \end{pmatrix}^* + \begin{pmatrix} 0 & iK_0^* \\ -iK_0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Для нахождения соответственного резольвентного ядра рассмотрим следующую $(2n \times n)$ матрицу-функцию :

$$\begin{aligned} \Phi(r,\lambda) &= \begin{pmatrix} \phi_1(r,\lambda) \\ \phi_2(r,\lambda) \end{pmatrix} = U(r,\lambda)\begin{pmatrix} P_+ \\ -K_0 \end{pmatrix}, \\ \Psi(r,\lambda) &= \begin{pmatrix} \psi_1(r,\lambda) \\ \psi_2(r,\lambda) \end{pmatrix} = U(r,\lambda)\begin{pmatrix} -iP_+ \\ -iK_0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{33}$$

В силу (32) имеем

$$\begin{aligned} \omega(\lambda) - J &= \left(\begin{pmatrix} P_+ \\ -K_0 \end{pmatrix} \omega_+(\lambda) + \begin{pmatrix} -iP_+ \\ -iK_0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} P_+ \\ -K_0 \end{pmatrix}^*, \\ \omega(\lambda) + J &= \begin{pmatrix} P_+ \\ -K_0 \end{pmatrix} \left(\omega_+(\lambda) \begin{pmatrix} P_+ \\ -K_0 \end{pmatrix}^* + \begin{pmatrix} -iP_+ \\ -iK_0 \end{pmatrix}^* \right). \end{aligned}$$

Из (33) получим

$$R_K(r,s,\lambda) = \begin{cases} (\Psi(r,\lambda) + \Phi(r,\lambda)\omega_+(\lambda))\Phi^*(s,\bar\lambda))\,H(s) & s < r, \\ \Phi(r,\lambda)(\Psi^*(s,\bar\lambda) + \omega_+(\lambda)\Phi^*(s,\bar\lambda))\,H(s) & s > r. \end{cases} \tag{34}$$

Множество $\Omega(\lambda)$ матриц $\omega(\lambda)$ $(\lambda \in \mathbf{C}_+)$ описывается неравенством

$$\frac{2Im\omega(\lambda)}{Im\lambda} \geq (\omega^*(\lambda) + J)\int_0^l U^*(r,\lambda)H(r)U(r,\lambda)dr(\omega(\lambda) - J).$$

Следовательно, $\omega_+(\lambda)$ заполняет круг $\Omega_{K_0}(\lambda)$, задаваемый неравенством

$$\frac{2Im\omega_+(\lambda)}{Im\lambda} \geq \int_0^l (\Psi(r,\lambda) + \Phi(r,\lambda)\omega_+(\lambda))^* H(r)(\Psi(r,\lambda) + \Phi(r,\lambda)\omega_+(\lambda))dr.$$

Отметим, что если $\dim N_+ = \dim N_-$ и K_0 является унитарным оператором, то окружность $\Omega_0(\lambda, K_0)$ задается соответствующим равенством, когда K_l пробегает множество унитарных операторов. В силу (32) соотношение (23) в этом случае представляется в виде

$$(R_\lambda f, f) = 2^{-1}(\omega_+(\lambda)\,F_1(\lambda,f), F_1(\bar{\lambda},f))_H +$$
$$+\left(\begin{pmatrix} 0 & iK_0^* \\ -iK_0 & 0 \end{pmatrix} F(\lambda,f), F(\bar{\lambda},f)\right) + (G_\lambda f, f)_H,$$

где

$$F_1(\lambda,f) = [P_+ - K_0^*]\int_0^l U^*(r,\bar{\lambda})\,H(r)\,f(r)\,dr \quad f \in L^2(0,l;N).$$

Отсюда следует, что

$$(f,f) = \int_{-\infty}^{\infty} (F_1(\xi,f), d\sigma_+(\xi)F_1(\xi,f)),$$

где $\sigma_+(\xi)$ – спектральная функция матричной R-функции $\omega_+(\lambda)$. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 3. **Множество спектральных функций линейного отношения $\mathbf{W}_{K_0}$ совпадает с множеством всех спектральных функций $\sigma_+(\xi)$ матричных R–функций $\omega_+(\lambda)$, задаваемых дробно–линейным преобразованием (30), когда $K_l(\lambda)$ пробегает множество всех нерастягивающих функций, аналитических в верхней полуплоскости. Ортогональные спектральные функции существуют в том и только том случае, когда $\dim N_+ = \dim N_-$, а матрица K_0 унитарна. В этом случае они определяются постоянными унитарными матрицами K_l $(K_l(\lambda) \equiv K_l)$.**

ABSTRACT. The paper considers the so–called canonical differential equations and gives a description of their spectral functions as well as of orthogonal spectral functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. Теория Вольтерровых Операторов в Гильбертовом Пространстве и ее Применения, Москва, Наука, 1967.
2. Ф. В. Аткинсон, Дискретные и Непрерывные Граничные Задачи, Москва, Мир, 1968.
3. М. Г. Крейн, "Аналитические проблемы и результаты теории линейных операторов в гильбертовом пространстве", Труды междунар. конгр. мат., Мир, Москва, 1968.
4. И. С. Кац, М. Г. Крейн, О спектральных функциях струны, Дополнение 2 в [2].
5. Ф. Э. Мелик-Адамян, "Описание спектральных функций одного класса дифференциальных операторов", Изв. АН Армении. Математика, том 34, № 2, стр. 54 — 74, 1999.
6. Ф. Э. Мелик-Адамян, "Описание спектральных функций одного класса дифференциальных операторов с распадающимися граничными условиями", Изв. АН Армении. Математика, том 34, № 3, стр. 64 — 74, 1999.
7. М. Г. Крейн, "Введение в геометрию индефинитных J-пространств и теорию операторов в этих пространствах", Вторая летняя матем. школа (Кацевели, июнь-июль, 1964), Инст. Матем. АН УССР, Киев, стр. 15 — 92, 1965.
8. М. Г. Крейн, Ю. Шмулян, "О дробно-линейном преобразовании с операторными коэффициентами", Мат. Иследования, том 7, 1967.
9. D. Aplay и H. Dym, "Hilbert space of analytic functions, inverse scattering and operators models 1", In : Integral Equation and Operator Theory, vol. 7, 1985.
10. В. П. Потапов, "Мультипликативная структура J-нерастягивающих матриц-функций", Труды моск. мат. общества, том 4, 1955.
11. И. С. Кац, М. Г. Крейн, "R-функции – аналитические функции, отображающие верхнюю полуплоскость в себя", Дополнение 1 в [2].

12 октября 1999 Ереванский государственный университет