ОБ УРАВНЕНИИ ax - xb= c В КОМПЛЕКСНЫХ БАНАХОВЫХ АЛГЕБРАХ

М. И. Караханян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 2, 2000

В статье получено необходимое и достаточное условие для разрешимости уравнения $ax - xb = c$ в комплексной банаховой алгебре A с единицей.

1. Разрешимость уравнения

$$ax - xb = c \tag{1}$$

для операторных матриц рассмотрена в [1] — [3]. В. Рот [3] показал, что условие разрешимости матричного уравнения (1) и условие подобия матриц $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ равносильны. М. Розенблюм [4] и А. Швайнсберг [5] показали, что для самосопряженных и нормальных операторов разрешимость операторного уравнения (1) в алгебре $BL(H)$ всех ограниченных линейных операторов, действующих в комплексном гильбертовом пространстве H, равносильна подобию операторных матриц $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Эти результаты были распространены автором [6] на случай операторной алгебры $BL(X)$, где X – слабо полное (в частности, рефлексивное) банахово пространство.

В настоящей статье обобщаются и уточняются результаты [1] — [6] для задачи комплексной банаховой алгебры $\mathcal{A}$ с единицей.

План работы таков. В пункте I исследуем вопрос, когда эрмитово разложимый элемент является эрмитово нормальным, и получаем строгую версию теоремы С. Путнама [7]. Пункт II посвящен вопросам разрешимости уравнения (1) в алгебре $\mathcal{A}$, пологая, что $a, b \in \mathcal{A}$ – квазинормальные элементы.

I. Пусть $\mathcal{A}$ - комплексная банахова алгебра с единицей. Напомним, что если элемент $a \in \mathcal{A}$ таков, что $\|1 - a\| < 1$, где $\mathbf{1} \in \mathcal{A}$ - единичный элемент, то

$a \in \mathcal{A}^{-1}$, где $\mathcal{A}^{-1}$ – группа обратимых элементов алгебры $\mathcal{A}$. Следовательно, $\mathcal{A}^{-1}$ есть открытое множество в $\mathcal{A}$. Обозначим через $S(\mathcal{A})$ единичную сферу в алгебре $\mathcal{A}$. Элемент $a \in \mathcal{A}$ называется топологическим делителем нуля, если $\inf\{\|ax\| + \|xa\| : x \in S(\mathcal{A})\} = 0$ или, другими словами, существует последовательность элементов $\{x_n\} \subset S(\mathcal{A})$ такая, что $\lim_{n\to\infty} \|ax_n\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n a\| = 0$. Легко видеть, что если $a \in \partial\mathcal{A}^{-1}$, то a – топологический делитель нуля (см. [8]). В частности, если число $\lambda \in Sp(a)$ – граничная точка спектра элемента a, то элемент $a\mathbf{1} - a \in \partial\mathcal{A}^{-1}$ является топологическим делителем нуля.

Комплексная банахова алгебра $\mathcal{B}$ с единицей называется расширением алгебры $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}$ – подалгебра в алгебре $\mathcal{B}$, единичный элемент алгебры $\mathcal{A}$ есть единичный элемент $\mathcal{B}$, и норма на $\mathcal{A}$ эквивалентна сужению на $\mathcal{A}$ нормы алгебры $\mathcal{B}$. Пусть $Sing(\mathcal{A})$ – множество всех сингулярных элементов алгебры $\mathcal{A}$. Элемент $a \in Sing(\mathcal{A})$ называется наследственно сингулярным, если он остается сингулярным в любом расширении алгебры $\mathcal{A}$. Легко видеть, что если элемент $a \in \mathcal{A}$ – топологический делитель нуля, то он является наследственно сингулярным. Следовательно, все элементы $\partial\mathcal{A}^{-1}$ обладают этим свойством.

Отображение $a \to a^*$ называется инволюцией в комплексной банаховой алгебре $\mathcal{A}$, если

$$1)(a+b)^* = a^* + b^*; \quad 2)(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*, \quad \lambda \in \mathbf{C}; \quad 3)a^{**} = a; \quad 4)(ab)^* = b^* a^*.$$

Элемент $a \in \mathcal{A}$ такой, что $a = a^*$, назовем самосопряженным и множество всех таких элементов обозначим $Sym(\mathcal{A})$. Ясно, что $Sym(\mathcal{A})$ – линейное вещественное подпространство в $\mathcal{A}$. Заметим, что для $a \in \mathcal{A}$ элементы $a + a^*$, $i(a - a^*)$, aa^* принадлежат $Sym(\mathcal{A})$, и $(a^*)^{-1} = a^{-1}$, $Sp(a^*) = \overline{Sp(a)}$, $\rho(a^*) = \overline{\rho(a)}$, где $\rho(a)$ – спектральный радиус a.

Вообще говоря, инволюция в алгебре $\mathcal{A}$ может не быть непрерывным отображением. Банахова алгебра $\mathcal{A}$ называется инволютивной, если она обладает инволюцией, и называется инволютивно-нормированной, если она обладает непрерывной инволюцией. Инволюция непрерывна тогда и только тогда, когда $Sym(\mathcal{A})$ – замкнутое подпространство в $\mathcal{A}$. Будем считать, что $\mathcal{A}$ – инволютивно-нормированная банахова алгебра. Ясно, что $\mathcal{A} = Sym(\mathcal{A}) \oplus i\,Sym(\mathcal{A})$. Элемент $a \in \mathcal{A}$ называется нормальным относительно данной инволюции, если $[a, a^*] = a\,a^* - a^*\,a = 0$.

Будем говорить, что нормальные элементы $a, b \in \mathcal{A}$ удовлетворяют условию фон

Нейман–Фугледе–Путнама (НФП), если при $x \in \mathcal{A}$ из условия $a\,x = x\,b$ следует $a^*\,x = x^*\,b$. Как отмечено в [9], [10], условие НФП не выполняется для каждого нормального элемента инволютивной банаховой алгебры.

Пусть $\mathcal{A}^*$ – сопряженное пространство к $\mathcal{A}$. Положим $D(\mathcal{A}, \mathbf{1}) = \{\varphi \in \mathcal{A}^* : \|\varphi\| = \varphi(\mathbf{1}) = 1\}$ и заметим, что $D(\mathcal{A}, \mathbf{1})$ является множеством нормализированных состояний на $\mathcal{A}$. При $a \in \mathcal{A}$ множество $V(a) = \{\varphi(a) : \varphi \in D(\mathcal{A}, \mathbf{1}) \subset \mathbf{C}$ (числовой образ элемента a) есть непустое, выпуклое, компактное подмножество в $\mathbf{C}$. Оно допускает представление $V(a) = \cap_{\lambda \in \mathbf{C}} \Delta(\lambda_j \|\lambda\,\mathbf{1} - a\|)$, где $\Delta(\lambda_j \|\lambda\,\mathbf{1} - a\|) = \{\xi \in \mathbf{C} : |\xi - \lambda| \leq \|\lambda\,\mathbf{1} - a\|\}$, откуда следует, что

i) $V(\alpha\,\mathbf{1} + \beta\,a) = \alpha + \beta\,V(a), \quad V(a+b) \subset V(a) + V(b), \quad \alpha, \beta \in \mathbf{C}\,;$

ii) $Sp(a) \subset V(a) \subset \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \leq \|a\|\}\,;$

iii) $\dfrac{\|a\|}{e} \leq V(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in V(a)\} \leq \|a\|.$

Пусть $Sp(h)$ – спектр элемента h. Элемент $h \in Sym(\mathcal{A})$ называется слабо-эрмитовым, если $Sp(h) \subset \mathbb{R}$ и называется слабо-положительным, если $Sp(h) \subset \mathbb{R}_+$, $(h \geq 0)$.

Элемент $h \in Sym(\mathcal{A})$ называется эрмитовым, если $V(h) \subset \mathbb{R}$. Это равносильно условию $\|\exp(ith)\| = 1$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Множество $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ всех эрмитовых элементов алгебры $\mathcal{A}$ есть вещественное подпространство в $Sym(\mathcal{A})$. Легко видеть, что если $h, k \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$, то $i\,[h, k] \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$. Элемент $k \in \mathcal{A}$ называется положительным, если $V(k) \subset \mathbb{R}_+$, $(k \geq 0)$. Множество всех положительных элементов $\mathcal{A}$, которое обозначим через $\mathcal{P}(\mathcal{A})$, есть конус в $\mathcal{H}(\mathcal{A})$. Элемент $a \in \mathcal{A}$ называется эрмитово-разложимым, если $a = h + i\,k$, где $h, k \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$. Если кроме этого $[h, k] = 0$, то a называется эрмитово-нормальным. Алгебра $\mathcal{A}$ называется эрмитово-разложимой, если она допускает представление $\mathcal{A} = \mathcal{H}(A) \oplus i\,\mathcal{H}(\mathcal{A})$. Как показано в [8], для эрмитово-нормального элемента $a \in \mathcal{A}$ числовой образ $V(a)$ совпадает с выпуклой оболочкой спектра элемента a, т.е. $V(a) = co(Sp(a))$.

Напомним (см. [11], [12]), что элемент $h \in Sym(\mathcal{A})$ называется квазиэрмитовым, если $\|\exp(ith)\| = o(|t|^{1/2})$ при $t \to \pm\infty$. Пусть $\mathcal{H}^{<q>}(\mathcal{A})$ и $\mathcal{H}^{<w>}(\mathcal{A})$ – множества квазиэрмитовых и слабо-эрмитовых элементов алгебры $\mathcal{A}$, соответственно. Имеем $\mathcal{H}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}^{<q>}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}^{<w>}(\mathcal{A}) \subset Sym(\mathcal{A})$. Легко видеть, что если $\mathcal{A}$ есть B^*-алгебра, то $\mathcal{H}(\mathcal{A}) = Sym(\mathcal{A})$. Обратное тоже верно, т.е., если инволютивная банахова алгебра $\mathcal{A}$ такова, что $\mathcal{H}(\mathcal{A}) = Sym(\mathcal{A})$, то в силу теоремы Видава–Пальмера (см. [13]), $\mathcal{A}$ есть B^*-алгебра относительно сильно-эрмитовой инволюции $a = h + i\,k \mapsto a^* = h - i\,k$.

Отметим, что если $h \in \mathcal{H}^{<q>}(\mathcal{A})$, то $Sp(h) \subset \mathbb{R}$, хотя числовой образ $V(h)$ может выйти за числовую ось $\mathbb{R}$. В пространстве $Sym(\mathcal{A})$ множество $\mathcal{H}^{<q>}(\mathcal{A})$ есть максимальное подмножество, порождающее нормальные (квазинормальные) элементы $a = h + i\,k$, $[h,k] = 0$, $h, k \in \mathcal{H}^{<q>}(\mathcal{A})$, удовлетворяющие условию НФП. Условие квазинормальности элемента $a \in \mathcal{A}$ равносильно условию $\|\exp(\overline{\lambda}\,a - \lambda\,a^*)\| = o(|\lambda|^{1/2}$ при $|\lambda| \to \infty$, $\lambda \in \mathbf{C}$.

Для данной последовательности $\{c_n\}$ элементов алгебры $\mathcal{A}$ будем говорить, что $Sp(c_n) \to 0$ при $n \to \infty$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число N_ε такое, что $Sp(c_n) \subset \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| < \varepsilon\}$ при $n > N_\varepsilon$.

Отметим, что отображение $a \mapsto Sp(a)$ непрерывно. Действительно, если $\mathcal{A} = BL(l^2(\mathbf{Z}))$ и $\{a_k\} \subset \mathcal{A}$ – операторы двустороннего взвешенного сдвига (т.е. $a_k(e_n) = e_{n+1}$ при $n \neq 0$ и $a_k(e_0) = \dfrac{1}{k}e_1$, $\dfrac{1}{\infty} = 0$), то $Sp(a_k) = T = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| = 1\}$, $a_k \to a_\infty \in BL(l^2(\mathbf{Z}))$ при $k \to \infty$, однако $Sp(a_\infty = \Delta = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \leq 1\}$ (см. [14]). Это означает, что существует оператор с "жирным" спектром, в каждой операторной окрестности которого находятся операторы с относительно малым спектром. Интересно также заметить, что можно построить последовательность нильпотентных операторов $\{a_n\}$ таких, что $a_n \to a$ при $n \to \infty$, однако $\rho(a) > 0$. Первый пример такого типа указал Какутани (см., например, [14]). Тем не менее имеет место следующий результат.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{A}$ – комплексная банахова алгебра с единицей, и пусть $a, b \in \mathcal{A}$ – такие элементы, что коммутант $c = [a,b]$ удовлетворяет условию $[a,c] = 0$. Тогда существует последовательность элементов $\{c_n\} \subset \mathcal{A}$ такая, что $c_n \to c$ и $Sp(c_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Доказательство : В силу теоремы Клейнеке–Ширкова (см. [15]) имеем $\rho(c) = 0$. Следовательно, $Sp(c) = \{0\}$ и значит $c \in rad(\mathcal{A})$ (радикал алгебры $\mathcal{A}$). С другой стороны, условие $[a,c] = 0$ не изменится, если заменить a на $a + \lambda\,\mathbf{1}$. Поэтому можно считать, что $a \in \mathcal{A}^{-1}$. Из условия $[a,c] = 0$ следует $[a^n, b] = n\,a^{n-1}\,c$ для всех натуральных n. Следовательно, $c - c_n = \dfrac{ab}{n}$, где $c_n = -\dfrac{a^{-n}\,(ab)\,a^n}{n}$. Так как $\dfrac{\|ab\|}{n} \to 0$ при $n \to \infty$, то имеем $c_n \to c$. Учитывая $Sp(c_n) = Sp(-\dfrac{ab}{n})$ заключаем, что $Sp(c_n) \to 0$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть $\mathcal{A}$ – комплексная банахова алгебра, и пусть $a \in \mathcal{A}$ – эрмитово-разложимый элемент, т.е. $a = h + ik$, где $h, k \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$. Если $[a,[a,a^*]] = 0$, где $a^* = h - ik$, то a - эрмитово-нормальный элемент.

Доказательство : Так как $c = [a, a^*] = 2i[k, h] \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$, то в силу теоремы Капнельсона (см. [16]) имеем $\rho(c) = ||c||$. Так как $\rho(c) = 0$, то $[a, a^*] = 0$. Теорема 2 доказана.

Инволютивная банахова алгебра $\mathcal{A}$ называется слабо-эрмитовой, если каждый самосопряженный элемент $a \in Sym(\mathcal{A})$ – слабо-эрмитовый. Для банаховых алгебр имеем $\mathcal{H}^{<w>}(\mathcal{A}) = Sym(\mathcal{A})$, и согласно результату Птака (см. [17]), действительнозначная функция $s(a) = \sqrt{\rho(a^*a)}$ на $\mathcal{A}$ есть B^*-полунорма. В силу теоремы Ширали–Форда [18], для каждого элемента a слабо-эрмитовой банаховой алгебры $\mathcal{A}$ имеем $aa^* \geq 0$. Заметим, что если инволютивная банахова алгебра $\mathcal{A}$ обладает свойством $s = m$, то $\mathcal{A}$ есть слабо-эрмитова банахова алгебра.

Для слабо-эрмитовых банаховых алгебр имеем следующий результат.

Предложение 1.1. Пусть $\mathcal{A}$ – слабо-эрмитова банахова алгебра и пусть $h \in \mathcal{A}$ – слабо-эрмитовый сингулярный элемент. Тогда h является топологическим делителем нуля.

Доказательство : Пусть $h \in \mathcal{H}^{<w>}(\mathcal{A}) \cap Sing(\mathcal{A})$. Имеем $h - \dfrac{i1}{n} \in \mathcal{A}^{-1}$. Поэтому $h \in \partial \mathcal{A}^{-1}$. Утверждение доказано.

II. Линейный оператор $D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ называется дифференцированием на алгебре $\mathcal{A}$, если $D(a\,b) = (D\,a)\,b + a\,(D\,b)$. При $a \in \mathcal{A}$ оператор $\delta_a(x) = [a, x]$ – дифференцирование на $\mathcal{A}$, называемое внутренним дифференцированием. Имеем $\delta_a \in BL(\mathcal{A})$ и $||\delta_a|| \leq 2\,||a||$. Заметим, что если дифференцирование $D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ непрерывно и $D^2(a) = 0$, то $D(a) \in rad(\mathcal{A})$, где $a \in \mathcal{A}$.

Обозначим через $M_2(\mathcal{A})$ алгебру матриц $\widehat{a} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ второго порядка, где $a_{ij} \in \mathcal{A}$, с естественными операциями и операторной нормой. Ясно, что $M_2(\mathcal{A})$ – инволютивная банахова алгебра относительно инволюции $\widehat{a} \to \widehat{a}^*$, где $\widehat{a}^* = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* \end{pmatrix}$, и $a_{ij}^* \in \mathcal{A}$.

Обратимая матрица $\widehat{a} \in M_2(\mathcal{A})$ называется сильно-обратимой, если $a_{21}a_{21}^* + a_{22}a_{22}^* \in \mathcal{A}^{-1}$.

Если алгебра $\mathcal{A}$ является эрмитово разложимой банаховой алгеброй, то каждая обратимая матрица $\widehat{a} \in M_2(\mathcal{A})$ сильно обратима. Две матрицы $\widehat{a}$ и $\widehat{b}$ называются сильно подобными, если существует сильно обратимая матрица $\widehat{q} \in M_2(\mathcal{A})$, для которой $\widehat{q}\,\widehat{a} = \widehat{b}\,\widehat{q}$.

Теорема 3. Пусть $\mathcal{A}$ – инволютивно–нормированная банахова алгебра над полем C с единицей, и пусть $a, b \in \mathcal{A}$ – квазинормальные элементы.

Тогда для разрешимости уравнения (1) в $\mathcal{A}$, где $c \in \mathcal{A}$, необходимо и достаточно, чтобы матрицы $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ были сильно подобны.

Доказательство : Необходимость следует из тождества

$$\begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & ax - xb \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Пусть матрицы $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ сильно подобны, где $\widehat{q} = \begin{pmatrix} q & r \\ s & \tau \end{pmatrix} \in M_2(\mathcal{A})$. Имеем $qa - aq = cs$, $rb - ar = c\tau$, $sa = bs$ и $\tau b = b\tau$. Используя обобщенную теорему фон Неймана–Фугледе–Путнама (см. [11], [12]), получим $s\,a^* = b^*\,s$, $\tau\,b^* = b^*\,\tau$ и $a\,s^* = s^*\,b$, $b\,\tau^* = \tau^*\,b$. Так как $b\,s\,s^* = s\,a\,s^* = s^*\,s\,b$ и $b\,\tau\,\tau^* = \tau\,b\,\tau^* = \tau\,\tau^*\,b$, то $[s\,s^* + \tau\,\tau^*, b] = 0$. Следовательно $c\,(s\,s^* + \tau\,\tau^*) = (q\,a - a\,q)\,s^* + (r\,b - a\,r)\,\tau^* = a\,\{-(q\,s^* + r\,\tau^*)\} - \{-(q\,s^* + r\,\tau^*)\}\,b$. Умножая обе части полученного соотношения справа на $(s\,s^* + \tau\,\tau^*)^{-1}$ и учитывая равенство $[s\,s^* + \tau\,\tau^*, b] = 0$, получим $c = a\,\{-(q\,s^* + r\,\tau^*)\,(s\,s^* + \tau\,\tau^*)^{-1}\} - \{-(q\,s^* + r\,\tau^*)\,(s\,s^* + \tau\,\tau^*)^{-1}\}\,b$. Доказательство Теоремы 3 завершено.

Сделаем следующие замечания.

a) В силу доказательства необходимости Теоремы 3, если уравнение (1), где $a, b, c \in \mathcal{A}$, разрешимо в $\mathcal{A}$, то матрицы $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ подобны, причем элементы q_{11}, q_{22} матрицы подобия $\widehat{q} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ удовлетворяют условию $q_{11}, q_{22} \in \mathcal{A}^{-1}$. Таким образом, для разрешимости уравнения (1) в $\mathcal{A}$ необходимо и достаточно, чтобы существовала обратимая матрица $\widehat{q} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$, где $q_{11}, q_{22} \in \mathcal{A}^{-1}$ такая, что $\widehat{q} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \widehat{q}$.

b) Пусть $\mathrm{H} = l^2(\mathbf{Z}_+)$ и $U \in BL(\mathrm{H})$ - оператор одностороннего сдвига, т.е. $U(\xi_0, \xi_1, \ldots) = (0, \xi_0, \xi_1, \ldots)$. Тогда $U^*(\xi_0, \xi_1, \ldots) = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$, а оператор $U U^*$ - проектор и $U U^* = \mathbf{1}$. Рассмотрим уравнение (1) при $a = U$, $b = 0$, $c = p$, где $p = \mathbf{1} - U U^*$ - одномерный проектор. Это уравнение не имеет решения, так как в противном случае $x = U^*\,U\,x = U^*\,p = 0$, что невозможно. С другой стороны, матрицы $\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} U & p \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ сильно подобны, так как полагая $\widehat{q} = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U^* \end{pmatrix}$, получим $\widehat{q}^{-1} \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \widehat{q} = \begin{pmatrix} U & p \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Отметим, что матрица $\widehat{q}$ сильно обратима, однако $U^* \notin BL^{-1}(\mathrm{H})$. Этот пример показывает, что условие квазинормальности в Теореме 3 существенно.

c) В случае $\mathrm{H} = l^2(\mathbf{Z})$, оператор одностороннего сдвига есть нормальный оператор и условие b) нарушается.

Следствие 2.1. Пусть $\mathcal{A}$ – инволютивно-нормированная алгебра с единицей и $a, b \in \mathcal{A}$ – эрмитово-нормальные элементы. Тогда разрешимость уравнения (1), где $c \in \mathcal{A}$, равносильна сильному подобию матриц $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

Следствие 2.2. Пусть $\mathcal{A}$ – инволютивно-нормированная банахова алгебра с единицей и $a \in \mathcal{A}$ – квазинормальный (в частности, эрмитово-нормальный) элемент. Для того, чтобы элемент $c \in \mathcal{A}$ принадлежал образу $\mathrm{Im}(\delta_a)$ оператора δ_a необходимо и достаточно, чтобы матрицы $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a \end{pmatrix}$ были сильно подобными.

Теорема 4. Пусть $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ – множество пар элементов (a, b), $a, b \in \mathcal{A}$, для которых разрешимость уравнения (1) равносильна сильному подобию матриц $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Тогда из $(a, b) \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ следует

a) $(a_1, b_1) \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$, если a_1 и b_1 подобны a и b, соответственно;

b) $(b^*, a^*) \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$;

c) $(a^{-1}, b^{-1}) \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$, если $a, b \in \mathcal{A}^{-1}$;

d) $(a + \lambda \cdot 1, b + \lambda 1) \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$.

Доказательство : a) Пусть элементы $s, \tau \in \mathcal{A}^{-1}$ таковы, что $s^{-1} a_1 s = a$, $\tau^{-1} b_1 \tau = b$, $\widehat{q}^{-1} \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} \widehat{q} = \begin{pmatrix} a_1 & c \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}$, где матрица $\widehat{q} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$ сильно обратима. Имеем $\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & s^{-1} c \tau \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & \tau^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & c \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}$ и $\widehat{v} = \begin{pmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & \tau^{-1} \end{pmatrix} \widehat{q}$ сильно обратима, так как $v_{21} v_{21}^* + v_{22} v_{22}^* = \tau^{-1}(q_{21} q_{21}^* + q_{22} q_{22}^*)(\tau^{-1})^* \in \mathcal{A}^{-1}$.

Из предположения $(a, b) \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ следует, что уравнение $s^{-1} c \tau = ax - xb$ разрешимо в $\mathcal{A}$. Следовательно, $c = a_1(sx\tau^{-1}) - (sx\tau^{-1}) b_1$, откуда получим $(a_1, b_1) \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$.

b) Если матрицы $\begin{pmatrix} b^* & c \\ 0 & a^* \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} b^* & 0 \\ 0 & a^* \end{pmatrix}$ сильно подобны, то матрицы $\begin{pmatrix} a & c^* \\ 0 & b \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ обладают тем же свойством. Это означает, что $c^* = ax - xb$ разрешимо в $\mathcal{A}$. Следовательно, $c = b^*(-x^*) - (-x^*) a^*$, откуда получим $(b^*, a^*) \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$.

c) Пусть $a, b \in \mathcal{A}^{-1}$. Как и в Теореме 3, из сильного подобия матриц $\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a^{-1} & c \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix}$ следует сильное подобие матриц $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a & -a c b \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Тогда из разрешимости уравнения $-a c b = a x - x b$ следует $c = a^{-1} x - x b^{-1}$. Следовательно, $(a^{-1}, b^{-1}) \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$.

Утверждение d) очевидно. Теорема 4 доказана.

Для инволютивной банаховой алгебры $\mathcal{A}$ дифференцирование на $\mathcal{A}$ симметрично, если $D(a^*) = D(a)^*$. Как показано в [19], если $\mathcal{A}$ – алгебра фон Неймана и D – ограниченное симметрическое дифференцирование, то существует элемент $h \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$ такой, что $\|h\| \leq \frac{1}{2}\|D\|$ и $D(a) = i\delta_h(a) = i[h, a]$. Таким образом, имеют место такие следствия.

Следствие 2.3. Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра фон Неймана и D – симметрическое дифференцирование на $\mathcal{A}$. Тогда для того, чтобы элемент c принадлежал $\mathrm{Im}(\frac{1}{i}D)$ необходимо и достаточно, чтобы матрицы $\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} h & c \\ 0 & h \end{pmatrix}$ были сильно подобны.

Следствие 2.4. Пусть $\mathcal{A}$ есть B^*-алгебра и D – симметрическое дифференцирование на $\mathcal{A}$. Пусть $\Pi(\mathcal{A})$ – представление алгебры $\mathcal{A}$. Тогда для того, чтобы оператор $c \in BL(\mathrm{H})$ принадлежал образу $\frac{1}{i}\Pi(D)$, необходимо и достаточно, чтобы операторные матрицы $\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} h & c \\ 0 & h \end{pmatrix}$ были подобны, где $h = h^* \in \Pi(\mathcal{A})^{cc}$ и $\Pi(\mathcal{A})^{cc}$ – второй коммутант для $\Pi(\mathcal{A})$.

Отметим, что в случае B^*-алгебры $\mathcal{A}$ имеем have $\mathcal{H}(\mathcal{A}) = Sym(\mathcal{A})$, и подобие и обратимость матриц равносильны сильному подобию и сильной обратимости, соответственно. Следовательно, для B^*-алгебр из Теоремы 3, квазинормальность и сильное подобие можно заменить эрмитово-нормальностью и подобием, соответственно.

ABSTRACT. The paper obtains necessary and sufficient condition for solvability of the equation $ax - xb = c$ in a complex Banach algebra A with unit.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Р. Гантмахер, Теория Матриц, Москва, Наука, 1967.
2. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, Устойчивость Решений Дифференциальных Уравнений в Банаховом Пространстве, Москва, Наука, 1970.
3. W. E. Roth, "The equations $AX - YB = C$ and $AX - XB = C$ in matrices", Proc. Amer. Math. Soc., vol. 3, pp. 392 — 396, 1952.
4. M. Rosenblum, "The operator equation $BX - XA = Q$ with selfadjoint A and B", Proc. Amer. Math. Soc., vol. 20, pp. 115 — 120, 1969.
5. A. Schweinsgberg, "The operator equation $AX - XB = C$ with normal A and B", Pacif. J. Math., vol. 102, no. 2, pp. 447 — 453, 1982.
6. М. И. Караханян, "Об операторном уравнении $HY - YK = C$", Изв. АН Армении. Математика, том 25, № 4, стр. 353 — 360, 1990.
7. C. Putnam, "On the spectra of commutators", Proc. Amer. Math. Soc. (december), pp. 929 — 931, 1954.
8. F. F. Bonsall, T. Duncan, Complete Normed Algebras, Springer, 1973.

9. В. Рудин, Функциональный Анализ, Изд. Мир, Москва, 1975.
10. Е. А. Горин, Обобщение Одной Теоремы Фугледе, Российск. АН, Алгебра и Анализ, том 5, вып. 5, 1993.
11. Е. А. Горин, М. И. Караханян, " Асимптотический вариант теоремы Фугледе–Путнама о коммутаторах для элементов банаховых алгебр", Мат. Заметки, том 22, № 2, стр. 179 — 189, 1977.
12. М. И. Караханян, "Асимптотические свойства коммутаторов", Изв. АН Армении. Математика, том 29, № 1, стр. 50 — 58, 1994.
13. I. Vidav, "Eine metrishe kennzeichnung der selbstatdjungierten operatoren", Math. Z., vol. 66, pp. 121 — 128, 1956.
14. П. Халмош, Гильбертовы Пространства в Задачах, Москва, 1970.
15. D. C. Kleinecke, "On operator's commutators", Proc. Amer. Math. Soc., vol. 8, pp. 535 — 536, 1957.
16. В. Е. Кацнельсон, "У консервативного оператора норма совпадает со спектральным радиусом", Мат. исслед., том 5, № 3, стр. 186 — 189, 1970.
17. V. Ptak, "Banach algebras with involution, Man. Math., vol. 6, pp. 245 — 290, 1972.
18. S. Shirali, J. W. Ford, "Symmetry in complex Banach algebras, II", Duke Math. J., vol. 37, pp. 275 — 280, 1970.
19. У. Браттели, Д. Робинсон, Операторные Алгебры и Квантовая Статистическая Механика, Мир, Москва, 1982.

29 октября 1999

Ереванский государственный университет