КОСОЭРМИТОВЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПУЧКИ ОПЕРАТОРОВ : ОПЕРАТОРНЫЕ УЗЛЫ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

В. Л. Даллакян, А. Г. Руткас

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 2, 2000

В статье показано, что класс функций, позитивных и аналитических в открытой правой полуплоскости, совпадает с классом характеристических функций косоэрмитовых линейных пучков операторов в гильбертовом пространстве. Таким пучкам операторов ставятся в соответствие операторные узлы, вводятся понятия эквивалентности для пучков и операторных узлов.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Спектральная теория операторов и аналитическая теория сжимающих и J-сжимающих матриц-функций нашла применения в анализе и синтезе электрических цепей, фильтрах и других физических системах. Сжимающая функция рассеяния $s(\lambda)$ и J-сжимающая передаточная функция $w(\lambda)$ отождествлялись либо с характеристической функцией оператора (М. С. Лившиц [1]), либо с пучком операторов (А. Г. Руткас [2], [3], [5]), отметим также работы [10], [11], [14].

В аналитической теории цепей наиболее важными были функции сопротивления (импеданс), проводимости (адмиттанс) и гибридного отображения, которые позитивны или неванлинновы в правой полуплоскости [1], [8], [12], [13], [15]. Интерпретация позитивной функции $z(\lambda)$ как характеристическая функция косоэрмитивного оператора $B = -B^*$ была получена М. С. Лившицом лишь для функций, аналитических вне конечной области комплексной плоскости, включая точку $\lambda = \infty$. Такая функция $z(\lambda)$ называется **характеристической функцией d-узла**, и при $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$ она определяется резольвентой косоэрмитивого оператора B, окаймленной постоянными каналовыми операторами.

В настоящей работе показано, что класс позитивных и аналитических функций в открытой полуплоскости совпадает с классом характеристических функций ко-соэрмитовых линейных пучков операторов в гильбертовом пространстве. Операторные Σ-узлы, соответствующие пучкам операторов, рассматриваются наряду с преобразованиями, не выводящими операторные узлы из класса эквивалентности.

§2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть $X, Y, \mathcal{E}$ – гильбертовы пространства с индефинитными метриками j_X, j_Y, $\mathcal{J}_\mathcal{E}$, соответственно. Для $x \in X$, $y \in Y$, $e \in \mathcal{E}$ положим

$$[x, x] = (j_X x, x), \quad [y, y] = (j_Y y, y), \quad [e, e] = (\mathcal{J}_\mathcal{E} e, e)$$

(пространства Крейна). Пусть $\mathcal{F}_X = X \oplus X \oplus \mathcal{E}$ – гильбертово пространство с индефинитной метрикой, задаваемой оператором Грама

$$\mathcal{J}^X = \begin{bmatrix} 0 & -j_X & 0 \\ j_X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{J}_\mathcal{E} \end{bmatrix}.$$

Гильбертово пространство $\mathcal{F}_Y = Y \oplus Y \oplus \mathcal{E}$ определяется аналогично. Рассмотрим ортогональные проекторы в пространствах $\mathcal{F}_X$ и $\mathcal{F}_Y$:

$$P_X : \mathcal{F}_X \to X \oplus X, \quad Q_X : \mathcal{F}_X \to \mathcal{E}; \qquad P_Y : \mathcal{F}_Y \to Y \oplus Y, \quad Q_Y : \mathcal{F}_Y \to \mathcal{E}.$$

Определение 2.1. Оператор

$$V = \begin{bmatrix} A & B & L \\ C & D & R \\ M & N & K \end{bmatrix} : \mathcal{F}_X \to \mathcal{F}_Y$$

с ограниченными операторными блоками называется **операторным узлом**, а оператор-функция комплексной переменной λ

$$w(V, \lambda) = K - (\lambda M + N)(\lambda A + B)^{-1} L$$

называется **характеристической функцией** пучка $\lambda A + B$ и операторного узла V.

Функция $w(V, \lambda)$ рассматривается на множестве

$$\{\lambda : \lambda \text{ не является собственным значением пучка } \lambda A + B\} \cap$$
$$\cap \{\lambda : \text{ функция } \Gamma(\lambda) = (\lambda A + B)^{-1} L \text{ голоморфна}\} \cap$$
$$\cap \{\lambda : \text{ функции } (\mu A^+ + B^+)^{-1} M^+ \text{ и } (\mu A^+ + B^+)^{-1} N^+ \text{ голоморфны по } \mu = \overline{\lambda}\}.$$

Характеристическая функция $w(V,\lambda)$ операторного узла V голоморфна в области регулярности $\rho = \rho(A,B)$ операторного пучка $\lambda A + B$. Пусть $\Pi_- =$ – левая полуплоскость ($\mathrm{Re}\,\lambda < 0$) и $\Pi_+ =$ – правая полуплоскость ($\mathrm{Re}\,\lambda > 0$). Предположим, что пучок $\lambda A + B$ имеет хотя бы одну регулярную точку в Π_- и хотя бы одну в Π_+ (см. [3]).

Будем говорить, что линейная система $\Phi_V = \{(f,x,g)\}$ с вектором входа $f \in \mathcal{E}$, вектором выхода $g \in \mathcal{E}$ и внутренним состоянием $x \in X$ **связана** с операторным узлом V, если векторы ее состояния удовлетворяют уравнениям

$$(\lambda A + B)x = Lf, \quad g = Kf - (\lambda M + N)x. \tag{2.1}$$

Из (2.1) следует, что при любом $\lambda \in \rho(A,B)$ отображение $f \longmapsto g$ линейной системы Φ_V совпадает с характеристической функцией $w(V,\lambda)$ операторного узла V.

Система $\widehat{\Phi} = \{(\widehat{f},\widehat{x},\widehat{g})\}$ называется [1] **диагональю** системы $\Phi = \{(f,x,g)\}$ (используем обозначение $\widehat{\Phi} = d(\Phi)$), если векторы состояния этих систем удовлетворяют соотношениям

$$\widehat{f} = \frac{1}{\sqrt{2}}(f+g), \quad \widehat{x} = x, \quad \widehat{g} = \frac{1}{\sqrt{2}}(f-g). \tag{2.2}$$

Заметим, что диагональ системы $d(\Phi)$ совпадает с исходной системой Φ. Нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема 2.1. Характеристические функции операторных узлов V и $\widehat{V}$, связанных с системами $\Phi = \Phi_V$ и $\widehat{\Phi} = d(\Phi_V)$, удовлетворяют соотношению

$$w(\widehat{V},\lambda) = [I + w(V,\lambda)]^{-1}[I - w(V,\lambda)]. \tag{2.3}$$

Определение 2.2. [3] Операторный узел $\widehat{V} : \mathcal{F}_X \to \mathcal{F}_Y$ называется Π–узлом, если он $(\mathcal{J}^X, \mathcal{J}^Y)$-унитарен :

$$\widehat{V}\widehat{V}^+ = I, \quad \widehat{V}^+\widehat{V} = I, \quad (\widehat{V}^+ = \mathcal{J}^X\widehat{V}^*\mathcal{J}^Y). \tag{2.4}$$

Системы рассеяния и передачи, как и электрические цепи и волноводы, связаны с линейными пучками операторов, а спектральный параметр λ имеет физический смысл частоты колебаний. Функции рассеяния $s(\lambda)$ и передачи $w(\lambda)$ совпадают [2] – [5] с характеристической функцией линейного пучка $\lambda\widehat{A} + \widehat{B}$ и операторного П-узла $\widehat{V}$. Если уравнение $\widehat{A} = I$ (при $X = Y$) и условия нормировки

$\lim\limits_{\lambda\to\infty} w(\widehat{V},\lambda) = I$ выполняются, имеем операторный П-узел

$$\widehat{V}_0 = \begin{bmatrix} I & \widehat{B} & \widehat{L} \\ 0 & I & 0 \\ 0 & \widehat{L}^+ & I \end{bmatrix},$$

а соотношения (2.4) эквивалентны одному равенству : $\widehat{B} + \widehat{B}^+ = \widehat{L}\widehat{L}^+$. Тогда функция $s(i\omega) = w(\widehat{V}_0, i\omega)$ является характеристической функцией одного оператора $T = iB$ в пространстве X с индефинитной метрикой $(j_X x, x)$ [6]. При дефинитной метрике ($j_X = I$) она является характеристической функцией несамосопряженного оператора [1], [7].

Линейная система $\Phi_{\widehat{V}} = \{(\widehat{f}, \widehat{x}, \widehat{g})\}$, связанная с П-узлом $\widehat{V}$, называется [3] **системой рассеяния или прохождения волн** и ее состояния определяются из соотношений

$$(\lambda\widehat{A} + \widehat{B})\widehat{x} = \widehat{L}\widehat{f}, \quad \widehat{g} = \widehat{K}\widehat{f} - (\lambda\widehat{M} + \widehat{N})\widehat{x}. \tag{2.5}$$

Для системы рассеяния $\Phi_{\widehat{V}} = \{(\widehat{f}, \widehat{x}, \widehat{g})\}$ вектор $\widehat{f}$ играет роль амплитуды падающей волны, вектор $\widehat{g}$ – амплитуды отраженной волны, а $\widehat{x}$ представляет внутреннее состояние системы. В случае радиофизических систем операторные коэффициенты в (2.5) явно выражаются (см. [4], [8]).

§3. ОПЕРАТОРНЫЕ Σ-УЗЛЫ

Определение 3.1. Операторный узел $V : \mathcal{F}_X \to \mathcal{F}_Y$ называется Σ-узлом, если относительно индефинитных метрик $\mathcal{J}^X$ и $\mathcal{J}^Y$ выполняются соотношения

$$VQ_Y + Q_X V^+ = VP_X V^+ - P_Y, \quad V^+Q_X + Q_Y V = V^+P_Y V - P_X. \tag{3.1}$$

В терминах блочного оператора Σ-узла V, соотношения (3.1) эквивалентны следующим :

$$\begin{array}{ll}
1)\ AD^+ + BC^+ = I, & 7)\ D^+A + B^+C = I, \\
2)\ AB^+ + BA^+ = 0, & 8)\ C^+A + A^+C = 0, \\
3)\ CD^+ + DC^+ = 0, & 9)\ D^+B + B^+D = 0, \\
4)\ MD^+ + NC^+ = -R^+, & 10)\ D^+L + B^+R = -N^+, \\
5)\ MB^+ + NA^+ = -L^+, & 11)\ C^+L + A^+R = -M^+, \\
6)\ MN^+ + NM^+ = -(K + K^+), & 12)\ R^+L + L^+R = -(K + K^+).
\end{array} \tag{3.2}$$

Последние три соотношения следуют из предыдущих шести.

Линейная система $\Phi_V = \{(f, x, g)\}$, связанная с Σ-узлом V, определяется уравнениями

$$(\lambda A + B)x = Lf, \quad g = Kf - (\lambda M + N)x. \tag{3.3}$$

В зависимости от типов входного и выходного векторов, передаточное отображение

$$z(\lambda) = w(V, \lambda) = K - (\lambda M + N)(\lambda A + B)^{-1}L \tag{3.4}$$

имеет физический смысл импеданса, адмиттанса или гибридной матрицы электрического многополюсника [8]. Поэтому, линейную систему $\Phi_V = \{(f, x, g)\}$, связанную с Σ-узлом V, будем называть импедансной системой.

Частным случаем Σ-узла является оператор (где $\mathcal{J}^* = \mathcal{J}^{-1} = \mathcal{J}$, $B^* = B$)

$$V_0 = \begin{bmatrix} I & -iB & \frac{1}{\sqrt{2}}L \\ 0 & I & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{J}L^+ & 0 \end{bmatrix}.$$

Характеристическая функция этого узла равна

$$z_d(\lambda) = \frac{1}{2}\mathcal{J}L^*(\lambda I - iB)^{-1}L,$$

она совпадает с передаточной функцией диагональной системы (диагонального операторного узла) М. С. Лившица [1]. Функция $z_d(\lambda)$ является неванлинновской в Π_+ и аналитической на бесконечности.

Импедансная система с входом $f = \vec{I}$ и выходом $g = \vec{U}$ является моделью электрического $2n$-полюсника с вектором внешних токов $\vec{I}$ и вектором внешних направлений $\vec{U}$. Она является системой рассеяния, если в качестве входа и выхода выбраны векторы $\widehat{f} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{I} + \vec{U})$ и $\widehat{g} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{I} - \vec{U})$, соответственно.

Теорема 3.1. Пусть система $\Phi_{\widehat{V}} = \{(\widehat{f}, \widehat{x}, \widehat{g})\}$ соответствует некоторому П-узлу $\widehat{V}$ и оператор $I + \widehat{K}$ имеет ограниченный обратный. Тогда существует однозначное преобразование $\Delta(\widehat{V})$, отображающее $\widehat{V}$ в Σ-узел $V = \Delta(\widehat{V})$. Система Φ_V является диагональю системы $\Phi_{\widehat{V}}$. Верно и обратное утверждение.

Доказательство : С помощью соотношений (2.2) перейдем от состояний системы $\Phi_{\widehat{V}}$ к состояниям системы $\Phi_V = d(\Phi_{\widehat{V}})$. Тогда уравнения (2.5) примут вид (3.3) для системы Φ_V, где

$$A = \widehat{A} - \widehat{L}(I + \widehat{K})^{-1}\widehat{M}, \quad B = \widehat{B} - \widehat{L}(I + \widehat{K})^{-1}\widehat{N},$$

$$L = \sqrt{2}\widehat{L}(I+\widehat{K})^{-1}, \quad M = -\sqrt{2}(I+\widehat{K})^{-1}\widehat{M}, \tag{3.5}$$

$$N = -\sqrt{2}(I+\widehat{K})^{-1}\widehat{N}, \quad K = (I+\widehat{K})^{-1}(I-\widehat{K}).$$

Положим

$$C = \widehat{C} - \widehat{R}(I+\widehat{K})^{-1}\widehat{M}, \quad D = \widehat{D} - \widehat{R}(I+\widehat{K})^{-1}\widehat{N}, \quad R = \sqrt{2}\widehat{R}(I+\widehat{K})^{-1}. \tag{3.6}$$

Рассмотрим блочный оператор

$$V = \begin{bmatrix} A & B & L \\ C & D & R \\ M & N & K \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

Начиная с $\widehat{V}$ и применяя (2.4), (3.5) и (3.6) можно получить (3.2). Следовательно, V является Σ-узлом, и соотношения (3.5) и (3.6) задают преобразование $V = \Delta(\widehat{V})$. В силу симметрии существует преобразование $\widehat{V} = \widehat{\Delta}(V)$. П-узел $\widehat{V}$ связан с диагональной системой $\widehat{\Phi} = d(\Phi)$. Так как $\widehat{\Delta} = \Delta^{-1}$, то композиция $\widehat{\Delta}\Delta$ является тождественным преобразованием. Теорема 3.1 доказана.

Соотношения 10, 11 в (3.2) эквивалентны следующим двум $-M = R^+A + L^+C$, $-N = R^+B + L^+D$. Следовательно, характеристическая функция Σ-узла может быть представлена в виде

$$z(\lambda) = H + L^+(\lambda C + D)(\lambda A + B)^{-1}L, \tag{3.8}$$

где $H = K + R^+L$ и оператор H, согласно соотношению 12 в (3.8), удовлетворяет условию $H + H^+ = 0$.

Лемма 3.1. Воспроизводящее ядро

$$\Psi(\lambda,\mu) = \frac{z(\lambda) + z^+(\mu)}{\lambda + \overline{\mu}}$$

характеристической функции Σ-узла представляется в виде

$$\Psi(\lambda,\mu) = \Gamma^+(\mu)\Gamma(\lambda), \qquad \Gamma(\lambda) = (\lambda A + B)^{-1}L.$$

Доказательство : следует из представления (3.8) и соотношений 7 – 9 в (3.2).

Ядро $\Psi(\lambda,\mu)$ называется **эрмитово-положительным** в области ρ, если при всяком n и для любых $\lambda_j \in \rho$, $\xi_j \in \mathbf{C}$, $f_j \in \mathcal{E}$ $(j = 1,\ldots,n)$ квадратичная форма

$$\sum_{k,j=1}^{n} (\Psi(\lambda_k,\lambda_j)f_k, f_j)\xi_k\overline{\xi}_j$$

является положительно полуопределенной.

Лемма 3.2. В случае (дефинитный случай) $j_X = I$, $j_Y = I$, $J_\mathcal{E} = I$ воспроизводящее ядро $\Psi(\lambda,\mu)$ характеристической функции $z(\lambda)$ Σ-узла эрмитово-положительно при λ,μ из области определения ρ функции $z(\lambda)$. Область ρ содержит обе открытые полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ и $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$.

Доказательство : В дефинитном случае имеем $\Gamma^+(\mu) = \Gamma^*(\mu)$, и эрмитово положительность ядра $\Psi(\lambda,\mu)$ следует из Леммы 3.1. Каждая из пучков имеет хотя бы одну регулярную точку в Π_+ и в Π_-. Тогда, с учетом соотношения 2) в (3.2), пучок $\lambda A + B$ является косоэрмитовым и, следовательно, все точки $\lambda \in \Pi_+$ или Π_- являются для него регулярными [3], [9]. Лемма 3.2 доказана.

Теорема 3.2. В дефинитном случае характеристическая функция $z(\lambda)$ Σ-узла V позитивна всюду в Π_+ и негативна всюду в Π_- :

$$z(\lambda) + z^*(\lambda) \geq 0 \quad \text{при} \quad \mathrm{Re}\,\lambda > 0,$$

$$z(\lambda) + z^*(\lambda) = 0 \quad \text{при} \quad \mathrm{Re}\,\lambda = 0,$$

$$z(\lambda) + z^*(\lambda) \leq 0 \quad \text{при} \quad \mathrm{Re}\,\lambda < 0.$$

Доказательство : следует из Леммы 3.2.

Теорема 3.3. Голоморфная в окрестности ε_ν точки $\nu \in \rho(A,B)$ оператор-функция $z(\lambda)$ является характеристической функцией дефинитного Σ-узла тогда и только тогда, когда воспроизводящее ядро $\Psi(\lambda,\mu)$ эрмитиво положительно при $\lambda,\mu \in \varepsilon_\nu$, или, что эквивалентно, $z(\lambda)$ имеет аналитическое продолжение до позитивной функции в Π_+.

Доказательство : Эквивалентность эрмитивой положительности воспроизводящего ядра

$$\Psi(\lambda,\mu) = \frac{z(\lambda) + z^*(\mu)}{\lambda + \overline{\mu}}$$

и позитивности аналитической функции $z(\lambda)$ при $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ является известным фактом в теории неванлинновских функций. Итак, необходимость следует из Леммы 3.2.

Достаточность. Пусть $z(\lambda)$ - аналитическая и позитивная в Π_+ оператор-функция. Преобразование

$$s(\lambda) = [I - z(\lambda)][I + z(\lambda)]^{-1}$$

существует и приводит к сжимающей всюду в Π_+ оператор-функции $s(\lambda)$: $\|s(\lambda)\| < 1$. Но тогда существует П-узел $\widehat{V}$, характеристическая функция которого совпадает с $s(\lambda)$ в Π_+ [3]. Перейдя от П-узла $\widehat{V}$ к Σ-узлу $V = \Delta(\widehat{V})$, заметим, что характеристическая функция $w(V, \lambda)$ последнего совпадает с $z(\lambda)$. Теорема 3.3 доказана.

§4. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УЗЛОВ

Рассмотрим преобразования над пучками и над Σ-узлами, которые не меняют характеристическую функцию $z(\lambda)$, и соответствующие свойства импедансной системы.

Определение 4.1. Пучки $\lambda A + B$, $\lambda A_1 + B_1 : X \to Y$ называются **унитарно эквивалентными**, если существуют ограниченно обратимый оператор $Q : Y \to Y$ и унитарный оператор $U : X \to X$ такие, что при любом λ

$$\lambda A_1 + B_1 = Q(\lambda A + B)U^*. \tag{4.1}$$

Спектры таких пучков одинаковы, левые резольвенты унитарно эквиваленты :

$$(\lambda A_1 + B_1)^{-1} A_1 = U(\lambda A + B)^{-1} A U^*, \tag{4.2}$$

и поэтому совпадают их системы собственных и присоединенных векторов и других инвариантов.

Определение 4.2. Операторные Σ-узлы $V, V_1 : \mathcal{F}_X \to \mathcal{F}_Y$ называются **унитарно эквивалентными**, если их блоки удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} A_1 = QAU^*, \quad B_1 = QBU^*, \quad L_1 = QL, \\ M_1 = MU^*, \quad N_1 = NU^*, \quad K_1 = K, \end{aligned} \tag{4.3}$$

где $Q : Y \to Y$ – ограниченно обратимый оператор, а $U : X \to X$ – унитарный оператор.

Определение 4.3. Линейные системы $\Phi_1 = \{(f_1, x_1, g_1)\}$ и $\Phi_2 = \{(f_2, x_2, g_2)\}$ называются **эквивалентными** ($\Phi_1 \sim \Phi_2$), если из равенства векторов входных состояний f_1 и f_2 следует равенство векторов выходных состояний g_1 и g_2. Они называются **унитарно эквивалентными**, если из равенства $f_1 = f_2$ следует и $g_1 = g_2$ и $x_2 = Ux_1$, где $U^* = U^{-1}$.

Очевидно, что если Σ-узлы V и $V_1 : \mathcal{F}_X \to \mathcal{F}_Y$ унитарно эквивалентны, то пучки $\lambda A + B$ и $\lambda A_1 + B_1$, составленные из их внутренних системных блоков, унитарно эквивалентны. Кроме того, их характеристические функции совпадают, а связанные импедансные системы $\Phi_V = \{(f, x, g)\}$ и $\Phi_{V_1} = \{(f_1, x_1, g_1)\}$ унитарно эквивалентны.

Определение 4.4. Операторные Σ-узлы $V : \mathcal{F}_X \to \mathcal{F}_Y$ и $V_1 : \mathcal{F}_{X_1} \to \mathcal{F}_{Y_1}$ называются **эквивалентными**, если их характеристические функции совпадают :

$$w(V, \lambda) = w(V_1, \lambda), \quad \lambda \in \rho(A, B) = \rho(A_1, B_1). \tag{4.4}$$

Импедансные системы Φ_V и Φ_{V_1}, соответствующие эквивалентным Σ-узлам V и V_1, имеют одинаковые передаточные функции и эквивалентны ($\Phi_V \sim \Phi_{V_1}$).

Определение 4.5. Операторный Σ-узел V называется **нормированным в точке** ν, если $\nu M + N = 0$.

Заметим, что угловой блок K нормированного в точке ν Σ-узла V совпадает со значением характеристической функции в этой точке : $K = z(\nu)$.

Определение 4.6. Представление оператор-функции $z(\lambda)$ в виде характеристической функции операторного узла V

$$z(\lambda) = K - (\lambda M + N)(\lambda A + B)^{-1} L, \qquad \mathrm{Re}\, \lambda > 0 \tag{4.5}$$

называется **реализацией функции $z(\lambda)$ в правой полуплоскости**, а представление функции $\theta(\zeta)$ в виде

$$\theta(\zeta) = S + \zeta G (I - \zeta T)^{-1} F, \quad |\zeta| < 1 \tag{4.6}$$

называется **реализацией в единичном круге.**

Существует преобразование χ, переводящее коэффициенты реализации (4.5) Σ-узла V в коэффициенты реализации (4.6). Для этого произведем замену переменной

$$\zeta = \frac{\lambda - \nu}{\lambda + \overline{\nu}}, \quad \nu \in \Pi_+ \cap \rho(A, B).$$

Используя представление (3.8), получим

$$\theta(\zeta) = z\left(\frac{\nu + \overline{\nu}\zeta}{1 - \zeta}\right).$$

Тогда имеем

$$\theta(\zeta) = K + R^* L + L^* [\zeta(\overline{\nu} C - D) + (\nu C + D)][I + \zeta(\nu A + B)^{-1}(\overline{\nu} A - B)]^{-1}(\nu A + B)]^{-1} L.$$

Обозначим

$$T = -(\nu A + B)^{-1}(\overline{\nu} A - B). \tag{4.7}$$

Тогда

$$\theta(\zeta) = K + R^* L + L^*[\zeta(\overline{\nu} C - D) + (\nu C + D)(\zeta T + I - \zeta T)][I - \zeta T]^{-1}(\nu A + B)^{-1} L =$$

$$= z(\nu) + \zeta L^*[\overline{\nu} C - D + (\nu C + D)T][I - \zeta T]^{-1}(\nu A + B)^{-1} L.$$

В силу $AB^* + BA^* = 0$, имеем

$$(\overline{\nu} A - B)(\nu A^* - B^*) = (\nu A + B)(\overline{\nu} A^* + B^*), \tag{4.8}$$

откуда следует $T^* T = I$ и $TT^* = I$, т.е. оператор T является унитарным. Кроме (4.7), имеет место представление

$$T = -(\overline{\nu} A^* + B^*)(\nu A^* - B^*)^{-1}. \tag{4.9}$$

Кроме того, выполняются равенства

$$\begin{aligned}
I - T &= (\nu + \overline{\nu})(\nu A + B)^{-1} A = (\nu + \overline{\nu}) A^*(\nu A^* - B^*)^{-1},\\
\overline{\nu} I + \nu T &= (\nu + \overline{\nu})(\nu A + B)^{-1} B = (\nu + \overline{\nu}) B^*(\nu A^* - B^*)^{-1},\\
I + T &= (\nu A + B)^{-1}[(\nu - \overline{\nu})A + 2B] = [(\nu - \overline{\nu})A^* - 2B^*](\nu A^* - B^*)^{-1},\\
\overline{\nu} I - \nu T &= (\nu A + B)^{-1}[2\nu\overline{\nu} A - (\nu - \overline{\nu})B] = [2\nu\overline{\nu} A^* + (\nu - \overline{\nu})B^*](\nu A^* - B^*)^{-1},
\end{aligned}$$

и, следовательно, получим

$$\overline{\nu} C - D + (\nu C + D)T = -(\nu + \overline{\nu})(\nu A^* - B^*)^{-1}. \tag{4.10}$$

Пологая

$$\sigma = \sqrt{\nu + \overline{\nu}}, \quad G = -\sigma L^*(\nu A^* - B^*)^{-1}, \quad F = \sigma(\nu A + B)^{-1} L, \tag{4.11}$$

получим требуемую реализацию для $\theta(\zeta)$ в единичном круге $|\zeta| < 1$. Таким образом, преобразование

$$\mathcal{V} = \chi(V) = \begin{bmatrix} T & F \\ G & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\nu A + B)^{-1}(\overline{\nu} A - B) & \sigma(\nu A + B)^{-1} L \\ -\sigma L^*(\nu A^* - B^*)^{-1} & z(\nu) \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

переводит коэффициенты реализации (4.5) в коэффициенты реализации (4.6). Используя (4.8), представления (4.6) и (4.9) и Лемму 3.1, получим доказательство следующей теоремы.

Теорема 4.1. Блоки оператора $\mathcal{V} = \chi(V)$ Σ-узла V удовлетворяют соотношениям

$$TT^* = I, \quad T^*T = I; \quad TG^* = F, \quad T^*F = G^*; \quad GG^* = F^*F = S + S^*. \tag{4.13}$$

Рассмотрим реализацию в круге некоторой функции $\theta(\zeta)$, коэффициенты которой образуют блочный оператор

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} T & F \\ G & S \end{bmatrix} : X \oplus \mathcal{E} \to X \oplus \mathcal{E} \tag{4.14}$$

и удовлетворяют соотношениям (4.13). Если $\nu \in \Pi_+$, то блочный оператор

$$V = \begin{bmatrix} A & B & L \\ C & D & R \\ M & N & K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{I-T}{\nu+\overline{\nu}} & \dfrac{\overline{\nu}I+\nu T}{\nu+\overline{\nu}} & \dfrac{1}{\sigma}F \\ \dfrac{I+T}{2} & \dfrac{\overline{\nu}I-\nu T}{2} & -\dfrac{\Sigma}{2}F \\ -\dfrac{1}{\Sigma}G & \dfrac{\nu}{\sigma}G & S \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

задает реализацию в правой полуплоскости для функции $z(\lambda) = \theta\left(\dfrac{\lambda-\nu}{\lambda+\overline{\nu}}\right)$ и является Σ-узлом. Σ-узел V (4.15) нормирован в точке ν, и $\nu A + B = I$. Таким образом, построено преобразование π, которое блочный оператор $\mathcal{V}$ (4.14) переводит в нормированный в некоторой точке ν Σ-узел $V = \pi(\mathcal{V}) : \mathcal{F}_X \to \mathcal{F}_X$.

Определение 4.7. Операторный Σ-узел V называется **простым**, если линейная оболочка $X_0 = \bigvee\limits_{n=-\infty}^{\infty} (T^n F\mathcal{E})$, получаемая с помощью операторов $T = -(\nu A + B)^{-1}(\overline{\nu}A - B)$ и F из (4.11), совпадает с основным внутренним пространством Σ-узла : $X_0 = X$.

Лемма 4.1. Операторы всякого косоэрмитового пучка $\lambda A + B : X \to Y$ допускают включение в некоторый простой нормированный Σ-узел.

Доказательство : Для точки $\nu \in \rho(A, B)$ положим $T = -(\nu A + B)^{-1}(\overline{\nu}A - B)$. Из условия косоэрмитивности пучка $\lambda A + B$ следует унитарность оператора T. Пусть X_0 – подпространство в X такое, что

$$X = \bigvee_{n=-\infty}^{\infty} (T^n X_0).$$

В частности, если спектр оператора T простой, то в качестве X_0 можно взять оболочку циклического вектора и $\dim X_0 = 1$. В качестве $\mathcal{E}$ выберем любое гильбертово пространство, допускающее изометрическое отображение $U_0 : \mathcal{E} \to X_0$. Пусть $X_1 = X \ominus X_0$ и

$$F = \begin{bmatrix} U_0 \\ 0 \end{bmatrix} : \mathcal{E} \to X = X_0 \oplus X_1, \quad G = F^*T, \quad S = \frac{1}{2} I_{\mathcal{E}}.$$

Эти операторы удовлетворяют соотношениям (4.13). Следовательно, оператор $\pi(\mathcal{V}) = V_1 : \mathcal{F}_X \to \mathcal{F}_X$, полученный с помощью оператора

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} T & F \\ G & S \end{bmatrix} : X \oplus \mathcal{E} \to X \oplus \mathcal{E},$$

является Σ-узлом. Основные операторные блоки Σ-узла V_1 равны

$$\frac{I - T}{\nu + \overline{\nu}} = (\nu A + B)^{-1} A, \quad \frac{\overline{\nu} I + \nu T}{\nu + \overline{\nu}} = (\nu A + B)^{-1} B, \tag{4.16}$$

и ясно, что при любом ограниченно обратимом операторе $Q : X \to Y$ преобразование $(Q \oplus Q^{*^{-1}} \oplus I_{\mathcal{E}})$ переводит Σ-узел в $V_1 = \pi(\mathcal{V})$ Σ-узел V. Следовательно, полагая $Q = (\nu A + B)$, получим искомый Σ-узел V, основные блоки которого совпадают с исходными операторами A и B :

$$V = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \quad\quad A \quad\quad & \quad\quad B \quad\quad & \quad L \end{array} \\ \begin{bmatrix} Q^{*^{-1}} Q^{-1} \left(\frac{\nu - \overline{\nu}}{2} A + B \right) & Q^{*^{-1}} Q^{-1} \left(\nu \overline{\nu} A - \frac{\nu - \overline{\nu}}{2} B \right) & -\frac{\sigma}{2} Q^{*^{-1}} F \\ -\frac{1}{\sigma} G & \frac{\nu}{\sigma} G & \frac{1}{2} I_{\mathcal{E}} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Σ-узел V нормирован в точке ν по построению. Его простота вытекает из равенства $T^n F \mathcal{E} = T^n X_0$ и того факта, что после преобразования χ над Σ-узлом V, получим оператор

$$\mathcal{V} = \chi(V) = \begin{bmatrix} T & F \\ \widetilde{G} & \widetilde{S} \end{bmatrix}.$$

Лемма 4.1 доказана.

Теорема 4.2. **Пусть функции**

$$z(\lambda) = w(V, \lambda) = K - (\lambda M + N)(\lambda A + B)^{-1} L,$$

$$z_1(\lambda) = w(V_1, \lambda) = K_1 - (\lambda M_1 + N_1)(\lambda A_1 + B_1)^{-1} L_1$$

являются характеристическими для косоэрмитовых пучков $\lambda A + B$ и $\lambda A_1 + B_1 : \mathcal{F}_X \to \mathcal{F}_Y$, построенные по простым Σ-узлам V и V_1. Если $z(\lambda) = z_1(\lambda)$ (Re $\lambda > 0$), то пучки унитарно эквивалентны. Если, более того, Σ-узлы V и V_1 нормированы, то они унитарно эквивалентны.

Доказательство : Применяя последовательно преобразования (4.12) и (4.15) к Σ-узлам V и V_1, построим эквивалентные им Σ-узлы $\widetilde{V} = (\pi \circ \chi)V$ и $\widetilde{V}_1 = (\pi \circ \chi)V_1$. Узел $\widetilde{V}$ имеет вид (4.15), где операторы T, F, G, S выражаются через узел V формулами (4.12). Представляя $z(\lambda)$ по формуле характеристической функции Σ-узла $\widetilde{V}$, получим

$$z(\lambda) = \widetilde{K} - (\lambda \widetilde{M} + \widetilde{N})(\lambda \widetilde{A} + \widetilde{B})^{-1} \widetilde{L} = z(\nu) - \frac{\lambda - \nu}{\lambda + \overline{\nu}} G \left[I - \frac{\lambda - \nu}{\lambda + \overline{\nu}} T \right]^{-1} F.$$

Аналогично, получим

$$z_1(\lambda) = z_1(\nu) - \frac{\lambda - \nu}{\lambda + \overline{\nu}} G_1 \left[I - \frac{\lambda - \nu}{\lambda + \overline{\nu}} T_1 \right]^{-1} F_1.$$

Из $z_1(\lambda) = z(\lambda)$ при $\lambda \in \Pi_+$ следует, что для всякого целого $n \geq 0$ имеем $GT^n F = G_1 T_1^n F_1$. Так как согласно Теореме 4.1 коэффициенты этих представлений удовлетворяют равенствам $G = F^* T$, $G_1 = F_1^* T_1$ и

$$F^* F = GG^* = S + S^* = z(\nu) + z^*(\nu) = G_1 G_1^* = F_1^* F_1,$$

то при всяком $n \geq 0$ имеем

$$F^* T^n F = F_1^* T_1^n F_1. \tag{4.17}$$

Далее, учитывая унитарность оператора T, получим

$$F^* T^{-n} F = F^* T^{*^n} F = (F^* T^n F)^* = (F_1^* T_1^n F_1)^* = F_1^* T_1^{*^n} F_1 = F_1^* T_1^{-n} F_1,$$

и следовательно, при всяком целом n имеет место равенство (4.17).

Покажем теперь, что из условия унитарной эквивалентности (4.1) следует существование унитарного оператора $U : X \to X$ и ограниченно обратимого оператора $Q : Y \to Y$. На векторах $\varphi, \psi \in X$ вида

$$\varphi = \sum_{k=-n}^{n} T^k F e_k, \quad \psi = \sum_{k=-n}^{n} T_1^k F_1 e_k, \quad e_k \in \mathcal{E}.$$

определим отображение U равенством $U\varphi = \psi$. В виду простаты Σ-узлов V и V_1, область определения и область значений преобразования U плотны в X. Рассмотрим скалярное произведение (ψ, ψ). В силу (4.17) имеем

$$(\psi, \psi) = \left(\sum_{k=-n}^{n} T_1^k F_1 e_k, \sum_{j=-n}^{n} T_1^j F_1 e_j \right) = \left(\sum_{k=-n}^{n} T^k F e_k, \sum_{j=-n}^{n} T^j F e_j \right) = (h, h).$$

Следовательно, отображение U является линейным, однозначным, сохраняет скалярное произведение и допускает продолжение по непрерывности до унитарного оператора, который мы будем обозначать той же буквой U. По построению имеем $UF = F_1$, $UT = T_1U$ и поэтому

$$U(\nu A + B)^{-1}L = (\nu A_1 + B_1)^{-1}L_1, \quad (I \pm T_1) = U(I \pm T)U^*.$$

Из (4.16) и $T = -(\nu A + B)^{-1}(\overline{\nu}A - B)$, $T_1 = -(\nu A_1 + B_1)^{-1}(\overline{\nu}A_1 - B_1)$ получим равенства

$$A_1 = QAU^*, \quad B_1 = QBU^*, \quad L_1 = QL, \tag{4.18}$$

где $Q = (\nu A_1 + B_1)U(\nu A + B)^{-1} : Y \to Y$. Итак, пучки $\lambda A + B$ и $\lambda A_1 + B_1$ унитарно эквивалентны.

Предположим теперь, что узлы V и V_1 нормированы в точке ν. Тогда $K_1 = K$, $N^* = -\overline{\nu}M^*$, $N_1^* = -\overline{\nu}M_1^*$, и из соотношения 5) из (3.2) вытекают равенства

$$L = -(BM^* + AN^*) = (\overline{\nu}A - B)M^*, \quad L_1 = (\overline{\nu}A_1 - B_1)M_1^*.$$

Следовательно, третье соотношение в (4.18) можно представить в виде

$$(\overline{\nu}A_1 - B_1)M_1^* = (\nu A_1 + B_1)U(\nu A + B)^{-1} \cdot (\overline{\nu}A - B)M^*,$$

откуда получим $M_1^* = -T_1^*UTM^*$.

Окончательно имеем соотношения $M_1 = MU^*$, $N_1 = NU^*$ и $K_1 = K$, т.е. нормированные в точке ν Σ-узлы V и V_1 унитарно эквивалентны. Теорема 4.2 доказана.

Введенное отношение эквивалентности операторных Σ-узлов разбивает множество всех Σ-узлов на классы эквивалентности. Рассмотрим некоторые группы преобразований над Σ-узлами, сохраняющие эквивалентность классов. Сначала рассмотрим преобразование $(\pi \circ \chi)$, определенное формулой

$$(\pi \circ \chi)V = (\pi \circ \chi)\begin{bmatrix} A & B & L \\ C & D & R \\ M & N & K \end{bmatrix} = \tag{4.19}$$

$$= \begin{bmatrix} t^{-1}A & t^{-1}B & t^{-1}L \\ t^{-1}(\frac{\nu-\overline{\nu}}{2}A + B) & t^{-1}(\nu\overline{\nu}A - \frac{\nu-\overline{\nu}}{2}B) & -\frac{\nu+\overline{\nu}}{2}t^{-1}L \\ -L^*(\nu A^* - B^*)^{-1} & \nu L^*(\nu A^* - B^*)^{-1} & K - (\nu M + N)t^{-1}L \end{bmatrix},$$

где $t = \nu A + B$.

Для произвольного ограниченно обратимого оператора $Q : Y \to Y$ и унитарного оператора $U : X \to X$ преобразование $\{Q, U\}$, определяемое формулой

$$\{Q, U\}V = (Q \oplus Q^{*^{-1}} \oplus I_{\mathcal{E}})V(U \oplus U \oplus I_{\mathcal{E}}), \tag{4.20}$$

является преобразованием унитарной эквивалентности. Если $Q_1,\ Q_2 : Y \to Y$ суть ограниченно обратимые операторы, а $U_1,\ U_2 : X \to X$ унитарны, то суперпозиция $\{Q_1, U_1\} \circ \{Q_2, U_2\} = \{Q_1 Q_2, U_1 U_2\}$ является преобразованием того же типа. Следовательно, преобразования $\{Q, U\}$ образуют группу относительно операции суперпозиции.

Пусть $\psi : Y \to Y$ – произвольный косоэрмитовый оператор $\psi + \psi^* = 0$. Определим преобразование $< \psi >$ над Σ-узлами по следующему правилу :

$$< \psi > V = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ \psi & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B & L \\ C & D & R \\ M & N & K \end{bmatrix}. \tag{4.21}$$

Легко проверить, что оператор $< \psi > V$ является Σ-узлом, унитарно эквивалентным Σ-узлу V. Кроме того, суперпозиция $< \psi_1 > \circ < \psi_2 > = < \psi_1 + \psi_2 >$ и множество преобразований этого типа образуют коммутативную группу относительно операции суперпозиции.

Для произвольного оператора $\varphi : Y \to \mathcal{E}$ определим преобразование $[\varphi]$ на множестве Σ-узлов по формуле

$$[\varphi]V = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ \varphi & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B & L \\ C & D & R \\ M & N & K \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi^+ \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A & B & L \\ C & D & R - \varphi^+ \\ M + \varphi A & N + \varphi B & K + \varphi L \end{bmatrix}. \tag{4.22}$$

Нетрудно проверить выполнение соотношений (3.2). Тогда оператор $[\varphi]V$ является Σ-узлом, эквивалентным Σ-узлу V. Характеристическая функция Σ-узла $[\varphi]V$ равна

$$w([\varphi]V, \lambda) = K + \varphi L - (\lambda M + N)(\lambda A + B)^{-1} L - \varphi(\lambda A + B)(\lambda A + B)^{-1} L = w(V, \lambda).$$

Ясно, что при определении операции суперпозиции $[\varphi_1] \circ [\varphi_2] = [\varphi_1 + \varphi_2]$, множество преобразований этого типа образует коммутативную группу. Заметим, что $< \psi > [\varphi] = [\varphi] < \psi >$.

Рассмотрим теперь преобразование над классами эквивалентности Σ-узлов. Характеристические функции эквивалентных узлов совпадают. Для заданного класса эквивалентности $\mathcal{Z}$, характеристическую функцию $z(\lambda) = w(V, \lambda)$ некоторого узла-представителя $V \in \mathcal{Z}$ назовем **характеристической функцией** класса $\mathcal{Z}$ и обозначим через $z(\mathcal{Z}; \lambda)$.

Пусть $\bar{\mathcal{J}}_{\mathcal{E}}$ – унитарный оператор в пространстве $\mathcal{E}$. На множестве классов эквивалентных Σ-узлов оператор $\bar{\mathcal{J}}_{\mathcal{E}}$ задает преобразование χ_1. По определению, класс $\mathcal{Z}_1 = \chi_1(\mathcal{Z})$ с представителем

$$V_1 = (I_Y \oplus I_Y \oplus \bar{\mathcal{J}}_{\mathcal{E}})V(I_X \oplus I_X \oplus \bar{\mathcal{J}}_{\mathcal{E}}^*) = \begin{bmatrix} A & B & L\bar{\mathcal{J}}_{\mathcal{E}}^* \\ C & D & R\bar{\mathcal{J}}_{\mathcal{E}}^* \\ \bar{\mathcal{J}}_{\mathcal{E}} M & \bar{\mathcal{J}}_{\mathcal{E}} N & \bar{\mathcal{J}}_{\mathcal{E}} K \bar{\mathcal{J}}_{\mathcal{E}}^* \end{bmatrix}$$

соответствует классу $\mathcal{Z}$ с представителем V.

Теорема 4.3. **Характеристические функции классов $\mathcal{Z}$ и $\chi_1(\mathcal{Z})$ связаны соотношением**

$$z(\chi_1(\mathcal{Z}); \lambda) = \bar{\mathcal{J}}_{\mathcal{E}}\, z(\mathcal{Z}; \lambda) \bar{\mathcal{J}}_{\mathcal{E}}^*. \tag{4.23}$$

Доказательство :

$$z(\chi_1(\mathcal{Z}); \lambda) = \bar{\mathcal{J}}_{\mathcal{E}} K \bar{\mathcal{J}}_{\mathcal{E}}^* - (\lambda \bar{\mathcal{J}}_{\mathcal{E}} M + \bar{\mathcal{J}}_{\mathcal{E}} N)(\lambda A + B)^{-1} L \bar{\mathcal{J}}_{\mathcal{E}}^*.$$

Пусть $\Omega_X, \Omega_Y, \Omega_{\mathcal{E}}$ – операторы сопряжения в пространствах $X, Y, \mathcal{E}$. Операторы сопряжения $\Omega_X^{\mathcal{F}} = \Omega_X \oplus \Omega_X \oplus \Omega_{\mathcal{E}}$, $\Omega_Y^{\mathcal{F}} = \Omega_Y \oplus \Omega_Y \oplus \Omega_{\mathcal{E}}$ на множестве классов эквивалентных Σ-узлов задают инволютивное преобразование χ_2, ставящее в соответствие классу $\mathcal{Z}$ с представителем V класс с представителем $V_2 = \Omega_Y^{\mathcal{F}} V \Omega_X^{\mathcal{F}}$.

Теорема 4.4. **Характеристические функции классов $\mathcal{Z}$ и $\chi_2(\mathcal{Z})$ удовлетворяют соотношению** $z(\chi_2(\mathcal{Z}); \lambda) = \Omega_{\mathcal{E}}\, z(\mathcal{Z}; \bar{\lambda}) \Omega_{\mathcal{E}}$. В заключение заметим, что аналитическое представление в виде (4.5) реализации на плоскости для гибридного оператора (матрицы) линейной структуры на графе изучено в [8]. Работа [12] посвящена изучению дробно-линейных представлений таких матриц-функций и вопросам их реализаций. Вопросы аддитивной реализации рациональных вещественных симметрических матриц-функций исследуются в [13], [15].

ABSTRACT. **The paper shows that the class of functions positive and analytical in the open right half-plane coincides with the class of characteristic functions of skew-Hermitian linear operator pencils acting in a Hilbert space. The basic tools are the operator knots that correspond to operator pencils and equivalence relations for pencils and operator knots.**

ЛИТЕРАТУРА

1. М. С. Лившиц, Операторы, Колебания. Волны. Открытые системы. Наука, Москва, 1966.
2. А. Г. Руткас, "Унитарные реализации голоморфных функций в пространстве с индефинитной метрикой", Докл. АН УССР, сер. А, том 4, стр. 16 – 19, 1984.
3. А. Г. Руткас, "Характеристическая функция и модель линейного пучка операторов", Теория Функций, Функ. Анализа и их Приложения, Харьков, том 45, стр. 98 – 111, 1986.
4. А. Г. Руткас, "Свойства функций рассеяния и прохождения волн в структурах с заданной геометрией", ДАН СССР, том 230, № 1, стр. 38 – 40, 1976.
5. А. Г. Руткас, "К теории характеристических функций линейных операторов", ДАН СССР, том 229, № 3, стр. 546 – 549, 1976.
6. А. Г. Руткас, Д. М. Чаусовский, "Индефинитные операторные узлы и волновые функции дискретных структур", Теория Функций. Функ. Анализа и их Приложения, Харьков, том 23, стр. 93 – 109, 1975.
7. М. С. Бродский, Треугольные и Жордановы Представления Линейных Операторов, Наука, Москва, 1969.
8. В. Л. Даллакян, "Внешний гибридный оператор линейной структуры на графе", Мат. вопросы кибернетики и выч. техники, Изд.ВЦ, АН Арм.ССР и ЕГУ, Ереван, том 14, стр. 87 – 101, 1985.
9. А. Г. Руткас, "О классификации и свойствах решения уравнения $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$", Дифф. Ур., том 25, № 7, стр. 1150 – 1155, 1989.
10. А. В. Ефимов, В. П. Потапов, "J-растягивающие матрицы-функции и их роль в аналитической теории электрических цепей", Успехи Мат. Наук, том 28, № 1(169), стр. 66 – 130, 1973.
11. Т. А. Товмасян, "Об элементарных и примарных множителях J-несжимающих вещественных матриц-функций", Уч. Зап. ЕГУ, № 1, стр. 11 – 25, 1971.
12. В. Л. Даллакян, "Обобщение теоремы Дарлингтона для вещественных позитивных J-симметрических матриц-функций", Изв. АН Армении. Математика, том 29, № 2, стр. 22 – 31, 1994.
13. Т. А. Товмасян, "Об аддитивной реализации некоторых классов рациональных матриц-функций", Уч. записки ЕГУ, Ереван, том 2, стр. 13 – 21, 1995.
14. Д. З. Аров, "Гамма-производящие матрицы, J-внутренние матрицы-функции и связанные с ними задачи экстраполяции", Мат. Физика, Анализ, Геометрия, Харьков, том 2, № 1, стр. 3 – 14, 1995.
15. V. L. Dallakian, "The synthesis for structural Systems of signal processing", Proc. of Conf. Computer Science и Information Techn., Yerevan, pp. 283 – 286, 1999.

27 июля 1999

Институт проблем информатики
и автоматизации НАН Армении
e-mail : spl@ipia.sci.am,

Харьковский государственный университет
Харьков, Украина
e-mail : rut@nikon.kharkov.ua