# О ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ В ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА СОБОЛЕВА

**А. А. Давтян**

**Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 2, 2000**

**В статье рассматриваются семиэллиптические псевдодифференциальные операторы с постоянными коэффициентами в некоторых пространствах типа риссовых потенциалов. Выводятся несколько оценок в пространствах Соболева и доказывается теорема о гладкости решения.**

## ВВЕДЕНИЕ

Пространства риссовых потенциалов (см. [1]) и их анизотропные аналоги пригодны при изучении однородных (квазиоднородных) эллиптических (семиэллиптических) псевдодифференциальных операторов с постоянными коэффициентами (см. [2], [3]). Более общие пространства $\dot{w}_2^{\mathcal{A}}$ естественно возникают при исследовании граничных задач эллиптического типа, т.е. когда функция в правой части принадлежит анизотропному пространству (см. [4]). Пространства $\dot{w}_2^{\mathcal{A}}$ введены в [4], где они интерпретировались как фактор-пространства по полиномам произвольного порядка.

В данной работе указывается несколько иная интерпретация пространств $\dot{w}_2^{\mathcal{A}}$ (§1), основанная на точном виде полиномов, которые возникают при определении пространств типа риссовых потенциалов (см. [15]). В §2 рассматриваются семиэллиптические псевдодифференциальные операторы с постоянными коэффициентами в пространствах $\dot{w}_2^{\mathcal{A}}$. В §3 выводятся априорные оценки в пространствах Соболева и приводится доказательство анонсированной в [4] Теоремы 2 о гладкости решения.

## §1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВ $\dot{w}_2^{\mathcal{A}}$

Эти пространства зависят от $\mathcal{A} = \{r^j\}_1^N$ = конечного набора векторов $r^j$ =

$(r_1^j, \ldots, r_n^j) \in \mathbb{R}^n$ с неотрицательными компонентами. Наименьший выпуклый многогранник, содержащий точки $r^1, \ldots, r^N$, называется **многогранником Ньютона** набора $\mathcal{A}$ и обозначается через $\mathcal{N}(\mathcal{A})$. Предположим, что $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ имеет отличные от нуля вершины на каждой оси координат, и что многогранник Ньютона $\mathcal{N}(\mathcal{A} \cup \{0\})$ является правильным, т.е. все внешние нормали $(n-1)$-мерных некоординатных граней многогранника $\mathcal{N}(\mathcal{A} \cup \{0\})$ имеют неотрицательные координаты.

Через $S$ обозначим пространство Шварца быстро убывающих функций, а через $S'$ – пространство медленно растущих распределений. Случай, когда $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ содержит начало координат приводит к пространствам Соболева $W_2^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)$, см. [5], [6]. По определению, $f \in S'$ принадлежит $W_2^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)$, если ее норма

$$\|f, W_2^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)\| = \sum_{r \in \mathcal{A}} \left\| \prod_{i=1}^{n} (1+\xi_i^2)^{r_i/2} \tilde{f}(\xi) \right\|_2$$

конечна. Здесь и ниже $\tilde{f} = \mathcal{F} f$ означают преобразование Фурье функции $f$.

П. И. Лизоркиным были введены пространства $\Phi$ (см. [7], [8]), состоящие из функций $\varphi \in S$, ортогональных пространству многочленов. Пространство $\Phi$ инвариантно относительно дробного интегрирования, дифференцирования и риссова потенциала. Рассмотрим подпространство $S$, состоящее из функций, ортогональных многочленам конечного порядка. В этом случае используем $C_0^\infty$-функции. Аналогичные построения использовались в [9].

Пусть $\mathcal{M}$ – полный многогранник в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\mathcal{M}$ имеет вершину в начале координат и отличные от нее вершины на каждой оси координат. Через $P_{\mathcal{M}}(\mathbb{R}^n)$ обозначим пространство полиномов вида

$$P_{\mathcal{M}}(\mathbb{R}^n) = \left\{ p(x) = \sum_{\alpha \in \mathcal{M} \cap N_0^n} c_\alpha x^\alpha \right\},$$

где $N_0^n$ – множество $n$-мерных мультииндексов.

По аналогии с пространством Лизоркина $\Phi$ определим

$$\Phi_{\mathcal{M}}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} u(x) p(x)\, dx = 0,\ p \in P_{\mathcal{M}}(\mathbb{R}^n) \right\}. \tag{1.1}$$

Обозначим через $s\mathcal{M}$, $s > 0$ многогранник с вершинами $sr^0, \ldots, sr^N$, где $r^0, \ldots, r^N$ – вершины правильного многогранника $\mathcal{M}$.

**Определение 1.** Объединение компактных граней выпуклой оболочки множества $\bigcup\limits_{r\in V(\mathcal{N})}(r+\mathbb{R}^n_{++})$ называется **диаграммой Ньютона** $\Gamma(\mathcal{N})$ многогранника $\mathcal{N}$, где $V(\mathcal{N})$ – множество вершин многогранника $\mathcal{N}$ и

$$\mathbb{R}^n_{++}=\{x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n:\quad x_j\geq 0,\quad j=1,...,n\}.$$

Через $g_\Gamma$ обозначим каноническую функцию диаграммы $\Gamma(\mathcal{N})$, т.е. [10]

$$g_\Gamma(\xi)=\sum_r|\xi_1|^{r_1}\cdots|\xi_n|^{r_n}, \tag{1.2}$$

где сумма берется по всем вершинам $r$ выпуклой оболочки диаграммы $\Gamma(\mathcal{N})$.

**Лемма 1.1. Пусть $\Gamma$ – диаграмма Ньютона многогранника $\mathcal{N}$, имеющего вершины на каждой оси координат $\mathbb{R}^n_{++}$. Пусть функция $f$ аналитична в окрестности полидиска**

$$\Delta(0,1)=\{z\in\mathbf{C}^n:\ |z_j|\leq 1,\ j=1,...,n\},$$

**и в разложении в ряд Тейлора функции $f$ показатели всех ненулевых мономов лежат не ниже $\Gamma$. Если $|f(z)|\leq M$ при $z\in\Delta(0,1)$, то $|f(z)|\leq cMg_\Gamma(z)$, где $c$ не зависит от $f$.**

**Доказательство :** Пусть $\beta^i=(0,...,0,\beta_i,0,...,0)$, $i=1,...,n$ – вершина выпуклой оболочки $\Gamma$, лежащая на $i$-ой координатной оси. Разложение функции $f$ в ряд Тейлора имеет вид

$$f(z)=\sum_\alpha a_\alpha z^\alpha+\sum_{(\alpha:\beta)\geq 1}a_\alpha z^\alpha,\quad \beta=(\beta_1,...,\beta_n),$$

где первая сумма распространена на мультииндексы $\alpha$, лежащие не ниже $\Gamma$ и ниже гиперплоскости, проходящей через точки $\beta^1,...,\beta^n$ и

$$(\alpha:\beta)=\frac{\alpha_1}{\beta_1}+\cdots+\frac{\alpha_n}{\beta_n}.$$

Функция $f(z)-\sum\limits_\alpha a_\alpha z^\alpha$ аналитична, поэтому имеем

$$\left|f(z)-\sum_\alpha a_\alpha z^\alpha\right|\leq|f(z)|+\sum_\alpha|a_\alpha|<cM,\quad z\in\Delta(0,1),$$

где $c$ не зависит от $f$. Используя Лемму 1 из [11], получим

$$\left|f(z)-\sum_\alpha a_\alpha z^\alpha\right|\leq cM\sum_{i=1}^n|z^{\beta^i}|.$$

Так как (см. [6]) $z^\alpha$ оценивается через $\sum|z^\gamma|$, где $\gamma$ – вершины многогранника, ограниченного диаграммой $\Gamma$ и гиперплоскостью, проходящей через $\beta^1,...,\beta^n$, то доказательство завершено.

**Следствие.** Если у аналитической в $\Delta(0,1)$ функции $f$ в разложении в ряд Тейлора показатели ненулевых мономов лежат не ниже $(1-\theta)\Gamma$ при некотором $\theta \in [0,1)$, то при условиях Леммы 1.1 имеем $|f(z)| \le M g_\Gamma^{1-\theta}(z)$.

Заметим, что, вообще говоря, имеем $g_\Gamma^{-1} \notin L_{2,loc}$. Однако существует число $\theta \in [0,1)$ такое, что $g_\Gamma^{-\theta} \in L_{2,loc}$.

**Определение 2.** Наибольшее число $\theta_0 \in [0,1)$, при котором $g_\Gamma^{-\theta} \in L_{2,loc}$ для любого $\theta < \theta_0$, называется **предельным числом** многогранника. Если $g_\Gamma^{-1} \in L_{2,loc}$ (т.е. $\theta_0 = 1$), то многогранник называется **допустимым.**

Приведем некоторые примеры. Для многогранника $\mathcal{N}(\mathcal{A})$, где

$$\mathcal{A} = \{(e_1, 0, ..., 0), ..., (0, ..., 0, e_n)\}, \quad e_j > 0, \quad j = 1, ..., n \tag{1.3}$$

предельным числом является

$$\theta_0 = \begin{cases} \eta & \text{при} \quad \eta \le 1, \\ 1 & \text{при} \quad \eta > 1, \end{cases} \qquad \eta = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{e_j}.$$

Суммой Минковского двух наборов $\mathcal{A}^1$ и $\mathcal{A}^2$ является множество

$$\mathcal{A}^1 + \mathcal{A}^2 = \{r \in \mathbb{R}^n_{++} : r = r^1 + r^2, \ r^1 \in \mathcal{A}^1, \ r^2 \in \mathcal{A}^2\}.$$

Каждому вектору $a = (a_1, ..., a_n)$ с положительными компонентами сопоставим набор $\{a\}$ вида (1.3) и число $a^* = \left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\dfrac{1}{a_j}\right)^{-1}$.

**Предложение 1.1. Пусть $e = (e_1, ..., e_n)$ и $r = (r_1, ..., r_n)$ – векторы с положительными компонентами. Если $e^* + r^* < n/2$, то многогранник $\mathcal{N}(\{e\}+\{r\})$ будет допустимым, в противном случае число $\theta_0 = \dfrac{n}{2(e^* + r^*)}$ является предельным для многогранника $\mathcal{N}(\{e\} + \{r\})$.**

**Доказательство :** Положим $\rho_\lambda(\xi) = |\xi_1|^{1/\lambda_1} + \cdots + |\xi_n|^{1/\lambda_n}$, $\rho_\mu(\xi) = |\xi_1|^{1/\mu_1} + \cdots + |\xi_n|^{1/\mu_n}$, где $\lambda_j = r^*/r_j$, $\mu_j = e^*/e_j$, $j = 1, ..., n$. Тогда $|\lambda| = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = n$ и $|\mu| = \mu_1 + \cdots + \mu_n = n$.

Пусть $\Gamma$ – диаграмма Ньютона многогранника $\mathcal{N}(\{e\} + \{r\})$. Вершинами выпуклой оболочки диаграммы $\Gamma$ являются точки

$$(e_1 + r_1, 0, ..., 0), ..., (0, ..., 0, e_n + r_n), \tag{1.4}$$

и еще не более $n(n-1)/2$ точек вида $(0, ..., 0, e_i, 0, ..., 0, r_j, 0, ..., 0)$ или

$(0,\ldots,0,r_i,0,\ldots,0,e_j,0,\ldots,0)$, которые расположены ниже гиперплоскости, проходящей через точки (1.4). Согласно (1.2) существует постоянная $c_R$ такая, что

$$\rho_\lambda^{r^*}(\xi)\rho_\mu^{e^*}(\xi) < c_R g_\Gamma(\xi),$$

когда $\xi$ лежит в шаре радиуса $R$ с центром в начале координат. Если $e^* + r^* < n/2$, то существует $\varepsilon \in (0, n/2)$ такое, что

$$e^* < \varepsilon, \quad r^* < \frac{n}{2} - \varepsilon. \tag{1.5}$$

Используя неравенство Гельдера с показателями $p = \dfrac{n}{n-2\varepsilon}$ и $q = \dfrac{n}{2\varepsilon}$, получим

$$\int_{|\xi|<R} [g_\Gamma(\xi)]^{-2} d\xi \le c_R \int_{|\xi|<R} \rho_\lambda^{-2r^*}(\xi)\rho_\mu^{-2e^*}(\xi)\, d\xi \le$$

$$\le \left\| \rho_\lambda^{-2r^*} L_p(|\xi| < R) \right\| \cdot \left\| \rho_\mu^{-2e^*} L_q(|\xi| < R) \right\|.$$

Как следует из условий (1.5), из $r^* < \dfrac{n}{2p}$ и $e^* < \dfrac{n}{2q}$ вытекает конечность последних двух норм. Аналогично доказывается вторая часть Предложения 1.1.

Пусть $\Gamma$ – диаграмма Ньютона многогранника $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ с вершинами на каждой оси координат $\mathbb{R}^n_{++}$. Рассмотрим пространство Лизоркина (ср. (1.1))

$$\Phi_\Gamma(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} u(x) x^\alpha \, dx = 0 \right\}, \tag{1.6}$$

для любого мультииндекса $\alpha$, лежащего не выше $(1-\theta_0)\Gamma$, где $\theta_0$ – предельное число для многогранника $\mathcal{N}(\mathcal{A})$. Заметим, что если $\mathcal{N}$ – допустимый многогранник, то $\theta_0 > 1$ и $\Phi_\Gamma(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Очевидно, если $f \in \Phi_\Gamma(\mathbb{R}^n)$, то $\widetilde{f} \in S$ и $D^\alpha \widetilde{f}(0) = 0$ для любого мультииндекса $\alpha$, лежащего не выше $(1-\theta_0)\Gamma$. Пространство $\Phi_\Gamma(\mathbb{R}^n)$ – линейное топологическое с топологией, индуцированной топологией пространства Шварца $S$.

Пусть $J_\mathcal{A}$ – оператор с символом $\mu_\mathcal{A}(\xi) = \sum\limits_{r\in\mathcal{A}} |\xi_1|^{r_1} \cdots |\xi_n|^{r_n}$, т.е. $\mathcal{F}(J_\mathcal{A}\varphi) = (\mu_\mathcal{A}(\xi))^{-1}\widetilde{\varphi}(\xi)$.

**Теорема 1.1. Оператор**

$$J_\mathcal{A} : \ \Phi_\Gamma(\mathbb{R}^n) \longmapsto L_2(\mathbb{R}^n) \tag{1.7}$$

**ограничен, и множество $\{J_\mathcal{A}\varphi : \varphi \in \Phi_\Gamma\}$ плотно в $L_2$. $J_\mathcal{A}$ также ограничен как оператор**

$$J_\mathcal{A} : \ L_2 \longmapsto S'/P_\Gamma^{1-\theta_0}, \tag{1.8}$$

где $P_\Gamma^{1-\theta_0}$ – пространство полиномов, показатели ненулевых мономов которых лежат не выше $(1-\theta_0)\Gamma$.

**Доказательство :** Функции из класса $\Phi_\Gamma$ ортогональны многочленам, ненулевые показатели которых лежат не выше $(1-\theta_0)\Gamma$. Однако диаграмма $(1-\theta_0)\Gamma$ может не содержать мультииндексов. Обозначим через $\theta_1$ наибольшее действительное число строго меньшее $\theta_0$ такое, что $(1-\theta_1)\Gamma$ содержит хотя бы один мультииндекс. Через $\theta_2$ обозначим наименьшее действительное число такое, что $\theta_2 \geq \theta_0$ и $(1-\theta_2)\Gamma$ содержит хотя бы один мультииндекс. Тогда, если $f \in \Phi_\Gamma$, то $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)x^\alpha\, dx = 0$ для любого мультииндекса $\alpha$, лежащего не выше $(1-\theta_2)\Gamma$. Следовательно, $D^\alpha \widetilde{f}(0) = 0$ для таких $\alpha$. Тогда, согласно Лемме 1.1 имеем

$$\left|\widetilde{f}(\xi)\right| \leq M g_\Gamma^{1-\theta_1}(\xi), \quad \xi \in \Pi_1, \tag{1.9}$$

где $\Pi_1 = \{\eta \in \mathbb{R}^n : \quad |\eta_i| < 1, \quad i = 1, ..., n\}$ и $M = \sup_{\xi\in\Pi_1} \left|\widetilde{f}(\xi)\right| \leq ||f, L_1(\mathbb{R}^n)||$. Положим $\varepsilon = \theta_2 - \theta_1, \quad \delta = \theta_2 - \theta_0$. Так как $\theta_1 < \theta_0 \leq \theta_2$, то имеем $0 < \delta < \varepsilon$. В силу (1.9)

$$||J_{\mathcal{A}} f||_2^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (\mu_{\mathcal{A}}(\xi))^{-2} \left|\widetilde{f}(\xi)\right|^2 d\xi \leq \int_{\Pi_1} (g_\Gamma(\xi))^{-2} \left|\widetilde{f}(\xi)\right|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}^n/\Pi_1} \left|\widetilde{f}(\xi)\right|^2 d\xi \leq$$

$$\leq M \int_{\Pi_1} \frac{[g_\Gamma(\xi)]^{2(1-\theta_0+\varepsilon-\delta)}}{[g_\Gamma(\xi)]^2} d\xi + ||f||_2 \leq cM + ||f||_2 \leq c(||f||_1 + ||f||_2).$$

Здесь мы использовали, что при $\xi \in \mathbb{R}^n/\Pi_1$ выполнены неравенства $\mu(\xi) \geq g_\Gamma(\xi)$ и $\mu(\xi) \geq 1$. Первое утверждение Теоремы 1.1 доказано.

Для доказательства плотности $J_{\mathcal{A}}\Phi_\Gamma$ в $L_1$ выберем натуральные числа $m_1, ..., m_n$ такие, что $2m_i > r_i$, $i = 1, ..., n$ для любого $r \in \mathcal{A}$ и рассмотрим оператор

$$J_{\mathcal{A},m}^{-1}(I + J_{\mathcal{A},m}) : \ L_2 \longrightarrow L_2, \tag{1.10}$$

где $J_{\mathcal{A},m}$ – оператор с символом

$$b_1(\xi) = \sum_{r\in\mathcal{A}} |\xi_1|^{r_1-2m_1} \cdots |\xi_n|^{r_n-2m_n},$$

а $I$ - тождественный оператор. Символом оператора $I + J_{\mathcal{A},m}$ является

$$b_2(\xi) = \sum_{r\in\mathcal{A}} \prod_{i=1}^n (1+\xi_i^2)^{r_i/2}(1+|\xi_1|^{2m_1}\cdots|\xi_n|^{2m_n})^{-1}.$$

Оператор (1.10) ограничен, так как $b_2/b_1 \leq c$. Он инъективен, поскольку из очевидного неравенства

$$\left|\widetilde{f}(\xi)\right| - \left|\widetilde{f}(\xi)\right|(1+|\xi_1|^{2m_1}\cdots|\xi_n|^{2m_n})^{-1} \leq \frac{b_2(\xi)}{b_1(\xi)}\widetilde{f}(\xi)$$

следует оценка

$$\|f\|_2 \le \left\| J^{-1}_{\mathcal{A},m}(I + J_{\mathcal{A},m})f \right\|_2 + \left\| \frac{\widetilde{f}(\xi)}{1 + |\xi_1|^{2m_1} \cdots |\xi_n|^{2m_n}} \right\|_2 .$$

Следовательно, если $J^{-1}_{\mathcal{A},m}(I + J_{\mathcal{A},m})f = 0$, то $f = 0$. Кроме того, оператор (1.10) – самосопряжен. Так как ограниченный самосопряженный инъективный оператор всегда имеет плотную область изменения, то заключаем, что $J^{-1}_{\mathcal{A},m}(I + J_{\mathcal{A},m})L_2$ плотно в $L_2$. Легко видеть, что $(I + J_{\mathcal{A},m})L_2$ является пространством Волевича-Панеяха (см. [12]), а функции из $C_0^\infty$ плотны в нем [12]. Множество $J^{-1}_{\mathcal{A},m}C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ плотно в $L_2$ по норме $L_2(\mathbb{R}^n)$. Имеем

$$J^{-1}_{\mathcal{A},m} = J_{\mathcal{A}} D_1^{2m_1} \cdots D_n^{2m_n}, \tag{1.11}$$

где $D_j = \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ – обобщенные производные. Так как $D_1^{2m_1} \cdots D_n^{2m_n} C_0^\infty \subset \Phi_\Gamma(\mathbb{R}^n)$, то из (1.11) следует, что множество $J_{\mathcal{A}}\Phi_\Gamma$ плотно в $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Докажем теперь последнюю часть Теоремы 1.1. Оператор (1.7) по непрерывности продолжается на функции из $S$, ортогональные полиномам $p \in P_\Gamma^{1-\theta_0}$. Последние образуют замкнутое множество в $S'$, и следовательно, сопряженное пространство можно отождествить с фактор-пространством $S'/P_\Gamma^{1-\theta_0}$. Так как область изменения оператора $J_{\mathcal{A}}$ плотна в $L_2$, то пространство линейных непрерывных функционалов на ней можно отождествить с $L_2$. Переходя к сопряженным, получим ограниченную инъекцию (1.8). Доказательство завершено.

**Определение 3.** Пусть $\mathcal{A}$ – произвольный набор векторов с неотрицательными компонентами, имеющий точки на каждой координатной оси $\mathbb{R}^n_{++}$. Пространство $\dot{w}_2^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)$ является образом оператора $J_{\mathcal{A}}$ на пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ с нормой

$$\left\| J_{\mathcal{A}}\varphi, \dot{w}_2^{\mathcal{A}} \right\| = \|\varphi\|_2. \tag{1.12}$$

Очевидно, если $\mathcal{A} = \{0\}$, то $\dot{w}_2^{\mathcal{A}} = L_2$. По Теореме 1.1, пространство $\dot{w}_2^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n) = J_{\mathcal{A}}(L_2)$ является подпространством фактор-пространства $S'/P_\Gamma^{1-\theta_0}$. Если $\theta_0 > 1$ (т.е. если $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ является допустимым многогранником), то $\dot{w}_2^{\mathcal{A}} \subset S'$, если же $0 < \theta_0 \le 1$, то элементами $\dot{w}_2^{\mathcal{A}}$ будут классы, в которых функции, отличающиеся на многочлен $p \in P_\Gamma^{1-\theta_0}$, отождествляются.

Норма (1.12) на $C_0^\infty$ имеет удобный эквивалентный вид

$$\|f, \dot{w}_2^{\mathcal{A}}\| = \left\| \left( \sum_{r \in \mathcal{A}} \prod_{k=1}^{n} |\xi_k|^{r_k} \right) \widetilde{f} \right\|_2, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{1.13}$$

Можно показать, что $J_{\mathcal{A}}^{-1}C_0^\infty$ плотно в $L_2$, где $J_{\mathcal{A}}^{-1}$ – оператор с символом $\mu_{\mathcal{A}}^{-1}(\xi)$. Поскольку $J_{\mathcal{A}}$ является обратным к $J_{\mathcal{A}}^{-1}$ на $C_0^\infty$, а оператор $J_{\mathcal{A}} : L_2 \longrightarrow \dot{w}_2^{\mathcal{A}}$ – изоморфизм, то пространство $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ плотно в $\dot{w}_2^{\mathcal{A}}$ по норме (1.13). Следовательно, $\dot{w}_2^{\mathcal{A}}$ есть пополнение $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ по норме (1.13).

Из определений пространств $W_2^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)$ и $\dot{w}_2^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)$ следует вложение

$$W_2^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n) \longmapsto \dot{w}_2^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n), \tag{1.14}$$

которое является непрерывным и плотным, т.е. любая функция из $W_2^{\mathcal{A}}$ принадлежит некоторому классу из $\dot{w}_2^{\mathcal{A}}$ с соответствующей оценкой норм. Заметим, что вложение (1.14) строгое. Если $f \in \dot{w}_2^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)$, то, вообще говоря, $f \notin L_2$. Однако можем утверждать, что $D^\nu f \in L_2$ для любого мультииндекса $\nu \in \mathcal{N}(\mathcal{A})$, причем

$$\|D^\nu f\|_2 \leq c \left\| f, \dot{w}_2^{\mathcal{A}} \right\|. \tag{1.15}$$

Оценка (1.15) следует из неравенства (см. [6])

$$|\xi^\nu| \leq c \sum_{j=1}^{M} |\xi_1|^{e_1^j} \cdots |\xi_n|^{e_n^j},$$

где $e^1, \ldots, e^M \in V(\mathcal{N})$. Отсюда получим

$$\dot{w}_2^{\mathcal{A}_1} \subset \dot{w}_2^{\mathcal{A}_2}, \quad \text{если} \quad \mathcal{N}(\mathcal{A}_2) \subset \mathcal{N}(\mathcal{A}_1). \tag{1.16}$$

Отметим также, что на функциях $f$, равных нулю вне некоторого шара, нормы $\|f\|_{W_2^{\mathcal{A}}}$ и $\|f\|_{\dot{w}_2^{\mathcal{A}}}$ эквивалентны (локальная эквивалентность пространств $W_2^{\mathcal{A}}$ и $\dot{w}_2^{\mathcal{A}}$). Ниже мы воспользуемся очевидным соотношением

$$W_2^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n) = \dot{w}_2^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n). \tag{1.17}$$

## §2. СЕМИЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Прежде, чем перейти к этой теме, рассмотрим пространство $\dot{w}_2^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)$ в случае $\mathcal{A} = \{e\} + \{m\}$, где $e = (e_1, \ldots, e_n)$ и $m = (m_1, \ldots, m_n)$ – векторы с положительными компонентами. В силу Предложения 1.1 и Теоремы 1.1 $\dot{w}_2^{\{e\}+\{m\}} \subset S'$, если $e^* + m^* < n/2$. Обозначим через $J^e$ $\lambda$-анизотропный потенциал порядка $e^*$, т.е.

$$J^e \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(y)}{\rho_e^{n-e^*}(x-y)}\, dy, \quad 0 < e^* < n,$$

а через $J^m$ – соответствующий $\mu$-анизотропный потенциал порядка $m^*$. Интегральный оператор

$$J\varphi = J^m J^e \varphi \tag{2.1}$$

определен, т.е. соответствующий интеграл абсолютно сходится на функциях $\varphi \in L_2$, если $e^* + m^* < n/2$. Действительно, оператор $J^e$ определен на $L_2$ при $e^* < n/2$, и по теореме В. П. Ильина (см. [13]) $J^e\varphi \in L_p$, где $p = \dfrac{2n}{n-2e^*}$. По этой же теореме имеем

$$J\varphi \in L_q, \quad q = \frac{2n}{n - 2(e^* + m^*)}.$$

Во всяком случае для $\varphi \in \Phi$ (2.1) дает $\mathcal{F}(J\varphi) = \mathcal{F}(\rho_e^{-n+e^*})\mathcal{F}(\rho_m^{-n+m^*})\widetilde{\varphi}$. Напомним, что по определению

$$\mathcal{F}(J_{\{e\}+\{m\}}\varphi) = \sum_{r\in\{e\}+\{m\}} |\xi_1|^{r_1}\cdots|\xi_n|^{r_n}\widetilde{\varphi}(\xi).$$

Поскольку величины

$$\left[\sum_{r\in\{e\}+\{m\}} \prod_{i=1}^{n} |\xi_i|^{r_i}\right]\cdot\left[\mathcal{F}(\rho_e^{-n+e^*})\mathcal{F}(\rho_m^{-n+m^*})\right]^{-1},$$

$$\left[\sum_{r\in\{e\}+\{m\}} \prod_{i=1}^{n} |\xi_i|^{r_i}\right]^{-1}\left[\mathcal{F}(\rho_e^{-n+e^*})\mathcal{F}(\rho_m^{-n+m^*})\right]$$

ограничены, то имеем $J_{\{e\}+\{m\}}(L_2) = J^e J^m(L_2)$. Следовательно, для $e^* + m^* < n/2$ имеем $\dot{w}_2^{\{e\}+\{m\}} \subset L_q$. В противном случае пространство $\dot{w}_2^{\{e\}+\{m\}}$ содержит полиномы, порядки которых определяются Теоремой 1.1 при $\theta_0 = \dfrac{n}{2(e^*+m^*)}$.

**Замечание.** Легко проверить, что $\dot{w}_2^{\{e\}+\{m\}} = \dot{w}_2^{\overline{m}+\overline{e}}$, если $\dfrac{m_i}{e_i} = \dfrac{m_j}{e_j}$, $i,j = 1,\dots,n$. Однако, если $\dfrac{m_i}{e_i} \neq \dfrac{m_j}{e_j}$ для некоторых $i \neq j$, согласно (1.16) имеем $\dot{w}_2^{\{e\}+\{m\}} \subset \dot{w}_2^{\overline{m}+\overline{e}}$. Каждое из этих пространств содержит полиномы. В частности, $\dot{w}_2^{\overline{m}+\overline{e}}(\mathbb{R}^n)$ содержит мономы $\xi^\alpha$, где

$$\frac{\alpha_1}{m_1+e_1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{m_n+e_n} = 1 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m_i+e_i}.$$

Рассмотрим действие псевдодифференциального оператора $\Psi$ с обобщенно-однородным символом $\Psi(\xi)$ на пространства $\dot{w}_2^{A}$. Предположим, что существует вектор $e = (e_1,\dots,e_n)$ с положительными компонентами такой, что

$$\Psi(t^{1/e_1}\xi_1,\dots,t^{1/e_n}\xi_n) = t\Psi(\xi). \tag{2.2}$$

**Лемма 2.1. Пусть $r = (r_1, ..., r_n)$ – вектор с положительными компонентами. Псевдодифференциальный оператор $\Psi$ с непрерывным символом $\psi(\xi)$ при $\xi \neq 0$ удовлетворяет оценке**

$$\|\Psi u, \dot{w}_2^r(\mathbb{R}^n)\| \leq c \left\| u, \dot{w}_2^{\{e\}+\{r\}} \right\|, \quad u \in C_0^\infty,$$

**и следовательно, продолжается по непрерывности до ограниченного оператора**

$$\Psi : \ \dot{w}_2^{\{e\}+\{r\}}(\mathbb{R}^n) \longmapsto \dot{w}_2^r(\mathbb{R}^n).$$

**Доказательство :** Согласно (2.2) и непрерывности $\Psi(\xi)$ имеем

$$|\Psi(\xi)| = \sum_{j=1}^n |\xi_j|^{e_j} \left| \Psi\left( \xi_1 \left[\sum_{j=1}^n |\xi_j|^{e_j}\right]^{-1/e_1}, ..., \xi_n \left[\sum_{j=1}^n |\xi_j|^{e_j}\right]^{-1/e_n} \right) \right| \leq c \sum_{j=1}^n |\xi_j|^{e_j}.$$

Для завершения доказательства заметим, что если $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, то

$$\|\Psi u, \dot{w}_2^r\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n |\xi_j|^{r_j} \, |\psi(\xi)\widetilde{u}(\xi)|^2 \, d\xi \leq$$

$$\leq c \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i,j=1}^n |\xi_i|^{e_i} |\xi_j|^{r_j} \, |\widetilde{u}(\xi)|^2 \, d\xi = c \left\| u, \dot{w}_2^{\{e\}+\{r\}} \right\|^2.$$

Исследуем теперь вопрос о разрешимости в $\dot{w}_2^A$ уравнения

$$\Psi u = f. \tag{2.3}$$

Псевдодифференциальный оператор $\Psi$ с символом $\Psi(\xi)$, удовлетворяющий (2.2) (условию обобщенной однородности), называется **семиэллиптическим**, если $\Psi(\xi) \neq 0$ при $\xi \neq 0$.

**Теорема 2.1. Пусть $\Psi$ – псевдодифференциальный оператор с непрерывным символом $\Psi(\xi)$ при $\xi \neq 0$, удовлетворяющий (2.2). Следующие утверждения эквивалентны :**

**1) уравнение (2.3) разрешимо в $\dot{w}_2^{\{e\}+\{r\}}(\mathbb{R}^n)$ при любом $f \in \dot{w}_2^r(\mathbb{R}^n)$,**

**2) уравнение $\Psi u = 0$ имеет только тривиальное решение в $\dot{w}_2^{\{e\}+\{r\}}$,**

**3) оператор $\Psi$ – семиэллиптический.**

**Доказательство :** Утверждения 1) и 2) эквивалентны существованию правого и левого обратных операторов к оператору $\Psi$. Пусть $Q$ – псевдодифференциальный оператор с символом

$$Q(\xi) = \Psi(\xi) \left[\sum_{j=1}^n |\xi_j|^{e_j}\right]^{-1}.$$

Тогда $Q(\xi)$ – $e$-однородная функция нулевого порядка. Заметим, что оператор с символом $\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|^{e_j}$ изоморфно отображает $\dot{w}_2^{(e)+(r)}$ на $\dot{w}_2^r$. Действительно, оператор с символом $\sum_{i,j=1}^{n}|\xi_i|^{r_i}|\xi_j|^{e_j}$ является обратным к оператору с символом $\left[\sum_{i,j=1}^{n}|\xi_i|^{r_i}|\xi_j|^{e_j}\right]^{-1}$ и осуществляет изоморфизм между $\dot{w}_2^{(e)+(r)}$ и $L_2$, а оператор с символом $\left[\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|^{r_j}\right]^{-1}$ является изоморфизмом между $L_2$ и $\dot{w}_2^r(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, их композиция, т.е. оператор с символом $\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|^{e_j}$ осуществляет искомый изоморфизм.

Так как оператор с символом $\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|^{e_j}$ – изоморфизм, то $\Psi$ обратим слева (справа) тогда и только тогда, когда $Q$ имеет левый (правый) обратный оператор. Пусть $\Psi$ – семиэллиптический оператор. Ввиду непрерывности $Q(\xi)$ существует постоянная $c$ такая, что $|Q(\xi)| > c$ при $\xi \neq 0$. Следовательно, обратным оператором к $Q$ будет псевдодифференциальный оператор с символом $[Q(\xi)]^{-1}$. Таким образом, $Q$ – изоморфизм, т.е. доказано, что 3) $\Longrightarrow$ 1) и 3) $\Longrightarrow$ 2).

Предположим, что 2) $\Longrightarrow$ 3) не выполняется. Тогда существует точка $\eta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ такая, что $Q(\eta) = 0$. Выберем неотрицательную функцию $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, удовлетворяющую $\|\varphi\|_2 = 1$ и $\varphi(\xi) = 0$ при $|\xi| > 1$. Пусть $\varepsilon > 0$. Положим

$$u_\varepsilon = \varepsilon^{-n/2}\varphi\left(\frac{\xi-\eta}{\varepsilon}\right).$$

Тогда $\|u_\varepsilon\|_2 = 1$, однако

$$\|Qu_\varepsilon\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^n}|Q(\xi)\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi \leq \sup_{|\xi-\eta|<\varepsilon}|Q(\xi)| \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0,$$

т.е. нарушен критерий существования левого обратного оператора. Следовательно, 2) $\Longrightarrow$ 3).

Оператор $Q^*$, сопряженный к $Q$, является псевдодифференциальным оператором с символом $\overline{Q(\xi)}$. Поэтому $Q^*$ имеет левый обратный оператор тогда и только тогда, когда $Q(\xi) \neq 0$ при $\xi \neq 0$. Следовательно, 1) $\Longrightarrow$ 3). Теорема 2.1 доказана.

## §3. КОЭРЦИТИВНЫЕ СВОЙСТВА СЕМИЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Используя результаты §2, установим априорные оценки в $\mathbb{R}^n$ для семиэллиптических дифференциальных операторов $P(D)$ с постоянными коэффициентами и символами вида

$$P(\xi) = \sum_{(\alpha:e)\leq 1} \gamma_\alpha \xi^\alpha, \tag{3.1}$$

где $e = (e_1, ..., e_n)$ – вектор с целыми положительными компонентами, определяющий "порядок" оператора $P$, а $\alpha$ – мультииндекс. Положим

$$P_0(D) = \sum_{(\alpha:e)=1} \gamma_\alpha D^\alpha, \quad P_1(D) = P(D) - P_0(D).$$

Заметим, что $W_2^{\{r\}} = W_2^r$ – классическое анизотропное пространство Соболева.

**Теорема 3.1. Пусть $P$ – семиэллиптический дифференциальный оператор с символом вида (3.1). Существует постоянная $c > 0$ такая, что**

$$\left\| u, W_2^{\{e\}+\{r\}} \right\| \leq c\left( \|P(D)u, W_2^r\| + \|u\|_2 \right) \tag{3.2}$$

**для любой функции $u \in W_2^{\{e\}+\{r\}}$, носитель которой содержится в шаре $B \subset \mathbb{R}^n$.**

**Доказательство** : Сначала докажем, что для каждого $\epsilon > 0$ существует постоянная $c_\epsilon > 0$ такая, что

$$\|P_1(D)u, W_2^r\| \leq \epsilon \left\| u, W_2^{\{e\}+\{r\}} \right\| + c_\epsilon \|u\|_2, \quad u \in W_2^{\{e\}+\{r\}}(\mathbb{R}^n).$$

Ввиду очевидного неравенства

$$|\xi^\alpha| < c_\epsilon \left[ \sum_{j=1}^n (1+\xi_j^2)^{r_j/2} \right]^{-1} + \epsilon \sum_{j=1}^n (1+\xi_j^2)^{e_j/2}, \quad (\alpha : e) < 1,$$

получим

$$\|D^\alpha u, W_2^r\| = \left\| |\xi^\alpha \tilde{u}(\xi)| \sum_{j=1}^n (1+\xi_j^2)^{r_j/2} \right\|_2 \leq c_\epsilon \|u\|_2 + \epsilon \left\| u, W_2^{\{e\}+\{r\}} \right\|.$$

Так как

$$\|P_0 u, W_2^r\| \leq \|Pu, W_2^r\| + \|P_1 u, W_2^r\|,$$

то достаточно получить неравенство (3.2) с $P_0$ вместо $P$. По Теореме 2.1, для любой функции $u \in C_0^\infty(B)$ выполнено неравенство

$$\left\| u, \dot{w}_2^{\{e\}+\{r\}} \right\| \leq c \|P_0 u, \dot{w}_2^r\|.$$

Однако, на финитных в $B$ функциях нормы пространств $\dot{w}_2^A$ и $W_2^A$ эквивалентны (см. §1). Следовательно

$$\left\| u, W_2^{\{e\}+\{r\}} \right\| \leq c \|P_0 u, W_2^r\|, \quad u \in C_0^\infty(B).$$

Теорема 3.1 доказана.

**Теорема 3.2. Пусть $P$ – семиэллиптический дифференциальный оператор с символом (3.1). Если $u \in L_2(\mathbb{R}^n)$ и $Pu \in W_2^r(\mathbb{R}^n)$, то $u \in W_2^{(e)+(r)}(\mathbb{R}^n)$, где $r = (r_1, ..., r_n)$ – вектор с положительными компонентами.**

**Доказательство** : При $r = (0, ..., 0)$ утверждение доказано в [14]. Вообще говоря, оно следует из условия $P_0 u \in \dot{w}_2^r$. Действительно, если $P_0$ – обобщенно-однородный оператор, то по Теореме 2.1 имеем

$$\left\| u, \dot{w}_2^{(e)+(r)} \right\| \sim \| P_0 u, \dot{w}_2^r \| .$$

Следовательно, $u \in \dot{w}_2^{(e)+(r)}$, и согласно (1.17) получим $u \in \dot{w}_2^{(e)+(r)} \cap L_2 = W_2^{(e)+(r)}$. Покажем теперь, что $P_0 u \in \dot{w}_2^r(\mathbb{R}^n)$. Имеем

$$P_1(\xi) = \sum_{(\alpha:e) \leq 1-\delta} \gamma_\alpha \xi^\alpha$$

для некоторого $\delta > 0$. Положим

$$s_0 = \max\left\{0, 1 - \frac{\delta \min_i e_i}{\max_i r_i}\right\}.$$

Если $s_0 = 0$, то согласно упомянутому результату работы [14], $u \in W_2^e$. В случае $s_0 > 0$ предположим, что $u \in W_2^{(e)+s_0(r)}$. Покажем, что из $Pu \in W_2^r$ следует $u \in W_2^{(e)+(r)}$. Как отмечено выше, достаточно показать, что $P_0 u \in \dot{w}_2^r$. Так как $u \in W_2^{(e)+s_0(r)}$, то имеем $P_1 u \in W_2^r$. Объяснение : величины

$$b_1(\xi) = \xi^\alpha \left[\sum_{i=1}^n (1+\xi_i^2)^{e_i/2}\right]^{\delta-1},$$

$$b_2(\xi) = \sum_{i=1}^n (1+\xi_i^2)^{r_i/2} \left[\sum_{i=1}^n (1+\xi_i^2)^{e_i/2}\right]^{-\delta} \left[\sum_{i=1}^n (1+\xi_i^2)^{s_0 r_i/2}\right]^{-1}$$

ограничены и при $(\alpha : e) < 1$ имеем

$$\|D^\alpha u, W_2^r\| = \left\| \xi^\alpha \sum_{i=1}^n (1+\xi_i^2)^{r_i/2} \tilde{u} \right\| = \left\| b_1(\xi) b_2(\xi) \sum_{i,j=1}^n (1+\xi_i^2)^{e_i/2} (1+\xi_j^2)^{s_0 r_j/2} \tilde{u} \right\|.$$

С другой стороны, из $Pu \in W_2^r$ получим $P_0 u = Pu - P_1 u \in W_2^r$. Так как $W_2^r \subset \dot{w}_2^r$, то $P_0 u \in \dot{w}_2^r(\mathbb{R}^n)$, и следовательно $u \in W_2^{(e)+(r)}$.

Чтобы показать, что $u \in W_2^{(e)+s_0(r)}$, предположим, что $u \in W_2^{(e)+s_1(r)}$, где

$$s_1 = s_0 \max\left\{0, 1 - \frac{\delta \min_i e_i}{s_0 \max_i r_i}\right\}.$$

Ясно, что $s_1 < s_0$. Повторяя вышеприведенные рассуждения для $u \in W_2^{(e)+s_1(r)}$, через конечное число шагов приходим к предположению $u \in W_2^{(e)+s_k(r)}$, где

$$s_k = s_{k-1} \max\left\{0, 1 - \frac{\delta \min_i e_i}{s_{k-1} \max_i r_i}\right\} = 0, \quad s_k < s_{k-1} < \cdots < s_0,$$

т.е. $u \in W_2^e$. Но это предположение выполняется согласно отмеченному результату работы [14]. Рассуждая теперь в обратном порядке, приходим к требуемому результату. Теорема 3.2 доказана.

**ABSTRACT. The paper considers semielliptical pseudodifferential operators with constant coefficients in certain spaces of Riesz potential type. Some estimates in Sobolev spaces are derived and a theorem on smoothness of solutions is proved.**

## ЛИТЕРАТУРА

1. С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. Н. Маричев, Интегралы и Производные Дробного Порядка и Некоторые их Приложения, Наука и Техника, Минск, 1987.
2. A. J. Pryde, "Higher order elliptic boundary value problems in spaces with homogeneous norms", J. Austral. Math. Soc, ser. A, vol. 31, pp. 92 – 113, 1981.
3. А. А. Давтян, "Анизотропные потенциалы, их обращение и некоторые приложения", ДАН СССР, том 285, № 3, стр. 537 – 541, 1985.
4. А. А. Давтян, "О пространствах $\dot{w}_2^A$ и коэрцитивных свойствах уравнений эллиптического типа", ДАН СССР, том 316, № 1, стр. 18 – 22, 1991.
5. С. М. Никольский, "Вариационная задача", Мат. сборник, том 62(104), № 1, стр. 53 – 75, 1963.
6. В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов", Труды МИАН СССР, том 91, стр. 59 – 81, 1967.
7. П. И. Лизоркин, "Характеристика граничных значений функций из $L_p^r(E_n)$ на гиперплоскостях", ДАН СССР, том 150, стр. 984 – 986, 1963.
8. П. И. Лизоркин, "Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций", Труды МИАН СССР, том 105, стр. 89 – 167, 1969.
9. A. J. Pryde, "Spaces with homogeneous norms", Bull. Austral. Math. Soc, pp. 189 – 205, 1980.
10. В. А. Васильев, "Асимптотика экспоненциальных интегралов, диаграмма Ньютона и классификация точек минимума", Функ. Анализ, № 3, стр. 1 – 12, 1977.
11. А. А. Давтян, "Пространства анизотропных потенциалов. Приложения", Труды МИАН СССР, том 150, стр. 174 – 197, 1989.
12. Л. Р. Волевич, Б. П. Панеях, "Некоторые пространства обобщенных функций и теорема вложения", Усп. Мат. Наук, том 20, № 1, стр. 3 – 74, 1965.
13. В. П. Ильин, "О неравенствах между нормами частных производных функций многих переменных", Труды МИАН СССР, том 84, стр. 144 – 173, 1965.
14. E. Pehkonen, "Regularit: at der schwachen Lösungen linear quasielliptischer Dirichlet-probleme", Berl. Univ., Jyväskylä Math. Inst., vol. 16, 1976.
15. А. А. Давтян, "Пространства Соболева–Лиувилля с квазиоднородной нормой", Изв. Вузов, Серия Математика, № 5, 1986.

10 апреля 1999

Ереванский государственный университет