О ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ КОШИ

Н. Е. Товмасян, Т. М. Кошелева

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 1, 2000

§1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Многие задачи устойчивости движения тела сводятся к определению начальных условий, при которых задача Коши для некоторого обыкновенного дифференциального уравнения имеет положительное решение (см. [1]). В настоящей статье этот вопрос рассматривается для уравнения

$$\frac{d^2v}{dt^2}+2k\frac{dv}{dt}+(k^2+1)v=a,\quad t>0, \tag{1.1}$$

с граничными условиями

$$v(0)=v_0\cos\beta,\quad v'(0)=-v_0(k\cos\beta+\sin\beta), \tag{1.2}$$

где k и a – положительные постоянные. Заметим, что v_0 и β имеют определенный физический смысл, см. [1]. Мы ищем положительное решение уравнения (1.1) и поэтому будем предполагать, что v_0 – положительная постоянная, а β принадлежит интервалу $(-\pi/2,\pi/2)$.

Задача (1.1), (1.2) имеет общее решение вида (см. [2])

$$v(t)=v_0e^{-kt}\cos(\beta+t)+\frac{a}{k^2+1}[1-e^{-kt}(\cos t+k\sin t)]. \tag{1.3}$$

Будем предполагать, что параметры k, a и β фиксированы и удовлетворяют условиям $k>0$, $a>0$ и $\beta\in(-\pi/2,\pi/2)$. Наша цель – выяснить, при каких положительных значениях параметра v_0 задача (1.3) имеет положительное решение на полуоси $t>0$.

Положим

$$F(\psi)=e^{k\psi}(k\cos\psi+\sin\psi)-e^{k\beta}(k\cos\beta+\sin\beta). \tag{1.4}$$

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\beta \neq -\arctan k$. Функция (1.3) положительна на полуоси $t > 0$ тогда и только тогда, когда

$$v_0 < \frac{a}{\cot(\psi_0 - \beta)(k\cos\beta + \sin\beta) + \cos\beta - k\sin\beta}, \tag{1.5}$$

где ψ_0 является

1) либо единственным решением уравнения $F(\psi) = 0$ в интервале $[\pi/2, \pi - \arctan k)$, если

$$-\arctan k < \beta < \frac{\pi}{2}; \tag{1.6}$$

2) либо единственным решением уравнения $F(\psi+\pi) = 0$ в интервале $(-\arctan k, \pi/2)$, если

$$-\frac{\pi}{2} < \beta < -\arctan k. \tag{1.7}$$

При $\beta = -\arctan k$ функция (1.3) положительна на полуоси $t > 0$ тогда и только тогда, когда

$$v_0 < \frac{a(1+e^{-k})}{\sqrt{k^2+1}}. \tag{1.8}$$

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Случай (1.6). Пусть угол β удовлетворяет неравенству (1.6). Тогда

$$k\cos\beta + \sin\beta > 0. \tag{2.1}$$

Найдем сначала точки экстремума функции (1.3). Решениями уравнения $v'(t) = 0$ являются

$$t_n = \varphi_0 + n\pi, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{2.2}$$

где

$$\varphi_0 = \operatorname{arccot} \frac{v_0(k\sin\beta - \cos\beta) + a}{v_0(k\cos\beta + \sin\beta)}. \tag{2.3}$$

Из (2.1) и (2.3) имеем

$$\cos\varphi_0 = \frac{[v_0(k\sin\beta - \cos\beta) + a]\sin\varphi_0}{v_0(k\cos\beta + \sin\beta)}, \quad 0 < \varphi_0 < \alpha, \tag{2.4}$$

где

$$\alpha = \arctan \frac{k\cos\beta + \sin\beta}{k\sin\beta - \cos\beta}. \tag{2.5}$$

В силу (2.4), получим

$$v''(\varphi_0 + 2n\pi) > 0, \quad v''(\varphi_0 + (2n+1)\pi) < 0, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{2.6}$$

Следовательно, при $t > 0$ точками минимума функции $v(t)$ являются точки t_{2n}. Подставляя $t = t_{2n}$ в (1.3) и используя (2.4), получим

$$v(t_{2n}) = -e^{-k(\varphi_0+2n\pi)}[v_0^2(k^2+1) - 2v_0a(\cos\beta - k\sin\beta) + a^2]\times$$

$$\times\frac{\sin\varphi_0}{v_0(k\cos\beta+\sin\beta)(k^2+1)} + \frac{a}{k^2+1}. \tag{2.7}$$

Рассмотрим функцию $g(\omega) = \omega^2(k^2+1) - 2\omega a(\cos\beta - k\sin\beta) + a^2$, где β удовлетворяет неравенству (1.6). Функция $g(\omega)$ принимает свое наименьшее значение в точке

$$\omega_0 = \frac{a}{k^2+1}(\cos\beta - k\sin\beta), \quad g(\omega_0) = \left[1 - \frac{(\cos\beta - k\sin\beta)^2}{k^2+1}\right] a^2. \tag{2.8}$$

С другой стороны, $\cos\beta - k\sin\beta$ как функция от β убывает в интервале (1.6). Следовательно

$$-k < \cos\beta - k\sin\beta < \cos(-\arctan k) - k\sin(-\arctan k) = \sqrt{1+k^2}. \tag{2.9}$$

Из (2.8) и (2.9) имеем $g(\omega_0) > 0$. Из (2.7) следует, что $v(t_{2n})$ принимает свое наименьшее значение $v(\varphi_0)$ в точке $n = 0$. Так как $v(0) > 0$ и $v(\infty) > 0$, то имеем $v(t) > 0$ при $t > 0$ тогда и только тогда, когда

$$v(\varphi_0) = v_0e^{-k\varphi_0}\cos(\beta+\varphi_0) + \frac{a}{k^2+1}[1 - e^{-k\varphi_0}(\cos\varphi_0 + k\sin\varphi_0)] > 0, \tag{2.10}$$

где φ_0 определяется формулой (2.3). Сначала для $v_0 > 0$ решим уравнение

$$f(v_0) = v_0e^{-k\varphi_0}\cos(\beta+\varphi_0) + \frac{a}{k^2+1}[1 - e^{-k\varphi_0}(\cos\varphi_0 + k\sin\varphi_0)] = 0. \tag{2.11}$$

Заменив v_0 в (2.11) на φ, согласно (2.3), получим

$$v_0 = \frac{a}{\cot\varphi(k\cos\beta+\sin\beta) + \cos\beta - k\sin\beta}, \quad 0 < \varphi < \alpha, \tag{2.12}$$

где α определяется формулой (2.5). Следовательно

$$\cot\varphi(k\cos\beta+\sin\beta) + \cos\beta - k\sin\beta > 0. \tag{2.13}$$

Легко установить, что

$$\cot\varphi(k\cos\beta+\sin\beta) + \cos\beta - k\sin\beta = \frac{1}{\sin\varphi}[k\cos(\beta+\varphi) + \sin(\beta+\varphi)]. \tag{2.14}$$

Так как $0 < \varphi < \pi$, то из (2.13) и (2.14) имеем

$$k\cos(\beta+\varphi) + \sin(\beta+\varphi) > 0. \tag{2.15}$$

Из (2.5) получим $\cot\alpha = \frac{k\sin\beta - \cos\beta}{k\cos\beta + \sin\beta}$. Следовательно

$$k\cos(\beta+\alpha) + \sin(\beta+\alpha) = 0, \tag{2.16}$$

откуда имеем

$$\alpha + \beta = -\arctan k + n\pi, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots \tag{2.17}$$

Из (1.6) и (2.5) следует, что $-\arctan k < \alpha + \beta < \frac{3}{2}\pi$. Следовательно, равенство (2.17) имеет место при $n = 1$. Таким образом, неравенство $0 < \varphi < \alpha$ можно записать в следующем виде :

$$0 < \varphi < -\beta - \arctan k + \pi. \tag{2.18}$$

Подставляя v_0 из (2.12) в (2.11) и используя (2.3), получим

$$\frac{e^{-k\varphi}\cos(\beta+\varphi)}{\cot\varphi(k\cos\beta+\sin\beta)+\cos\beta-k\sin\beta} + \frac{1}{k^2+1}[1 - e^{-k\varphi}(\cos\varphi + k\sin\varphi)] = 0.$$

Используя (2.13) - (2.15), это уравнение запишем в виде

$$\Phi(\varphi) = -\sin\beta - k\cos\beta + e^{k\varphi}[k\cos(\varphi+\beta) + \sin(\varphi+\beta)] = 0, \tag{2.19}$$

или заменой переменных $\psi = \varphi + \beta$

$$F(\psi) = e^{k\psi}(k\cos\psi + \sin\psi) - e^{k\beta}(k\cos\beta + \sin\beta) = 0. \tag{2.20}$$

Из неравенства (2.18) следует, что достаточно найти решение уравнения (2.20) в интервале

$$\beta < \psi < -\arctan k + \pi. \tag{2.21}$$

Наконец уточним знак функции $F(\psi)$ при $\psi = \pi/2$ и $\psi = -\arctan k + \pi$. Имеем $F'(\psi) = e^{k\psi}\cos\psi(k^2+1)$. Следовательно, $F(\psi)$ возрастает в промежутке $[\beta, \pi/2]$ и убывает в промежутке $(\pi/2, -\arctan k + \pi)$. Так как $F(\beta) = 0$, то имеем $F(\pi/2) > 0$. Используя неравенство $k\cos\beta + \sin\beta > 0$, получим $F(\pi - \arctan k) = -e^{k\beta}(k\cos\beta + \sin\beta) < 0$. Таким образом, функция $F(\psi)$ монотонно убывает в промежутке $(\pi/2, \pi - \arctan k)$, и принимает разные знаки на концах этого отрезка. Следовательно, уравнение (2.20) имеет одно решение ψ_0 в промежутке

(2.21). Причем $F(\psi) > 0$ при $\psi \in (\beta, \psi_0)$ и $F(\psi) < 0$ при $\psi \in (\psi_0, \pi - \arctan k)$. Очевидно, что уравнение (2.19) имеет одно решение $\mu_0 = \psi_0 - \beta$ в промежутке (2.18), и

$$\begin{aligned} &\Phi(\varphi) > 0 \quad \text{при } \varphi \in (0, \mu_0), \\ &\Phi(\varphi) < 0 \quad \text{при } \varphi \in (\mu_0, \pi - \arctan k - \beta). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Используя (2.12) и (2.22) заключаем, что на полуоси $v_0 > 0$ уравнение (2.11) имеет одно положительное решение $x_0 = a\left[\cot \mu_0(k\cos\beta + \sin\beta) + \cos\beta - k\sin\beta\right]^{-1}$, причем $f(v_0) > 0$ при $0 < v_0 < x_0$ и $f(v_0) < 0$, при $x_0 < v_0 < \infty$, где $f(v)$ определяется формулой (2.11). Следовательно, решением неравенства (2.10) является $v_0 < x_0$. Доказательство для случая (1.6) завершено.

Случай (1.7). Пусть теперь $-\frac{\pi}{2} < \beta < -\arctan k$. Легко видеть, что функция $F(\psi + \pi)$ монотонно возрастает в промежутке $(-\pi/2, \pi/2)$, убывает в $(\pi/2, \pi)$ и удовлетворяет условиям $F(\pi - \arctan k) = e^{k\beta}(k\cos\beta + \sin\beta) < 0$ и

$$F\left(\frac{3\pi}{2}\right) > F(2\pi + \beta) = (1 - e^{2k\pi})e^{k\beta}(k\cos\beta + \sin\beta) > 0.$$

Следовательно, уравнение $F(\psi + \pi) = 0$ имеет единственное решение в промежутке $(-\arctan k, \pi/2)$. Доказательство аналогично доказательству предыдущего случая.

Случай (1.8). Пусть $\beta = -\arctan k$, и пусть μ - наименьшее значение $v(t)$, определенное формулой (1.3) в точках минимума. Имеем $\mu = v_0/\sqrt{k^2+1}$ при $v_0 \le a/\sqrt{k^2+1}$,

$$\mu = e^{-k}\left(\frac{a}{\sqrt{k^2+1}} - \frac{v_0}{\sqrt{k^2+1}}\right) + \frac{a}{\sqrt{k^2+1}} \quad \text{при } v_0 > \frac{a}{\sqrt{k^2+1}}.$$

Следовательно, $\mu > 0$ тогда и только тогда, когда v_0 удовлетворяет (1.8).

Доказательство Теоремы 1 завершено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Е. Товмасян, "Краевые задачи для некоторого класса нелинейных дифференциальных уравнений и их применения", Известия АН Армении, Математика, том 32, № 6, стр. 59 – 70, 1997.
2. Н. Г. Петровский, Лекции по Теории Обыкновенных Дифференциальных Уравнений, Наука, Москва, 1970.

17 сентября 1999

Армянский государственный инженерный университет
Педагогический институт, г. Мелитополь, Украина