РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КЛАССЕ
БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

В. А. Ирицян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 35, № 1, 2000

§1. ЗАДАЧА И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В заметке рассматривается интегральное уравнение вида

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^\alpha} \int_0^x K(x,t)t^{\alpha-1}\varphi(t) dt + f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (1.1)$$

где K и f – комплекснозначные бесконечно дифференцируемые функции, α – комплексная постоянная, $\operatorname{Re} \alpha > 0$. Мы ищем решение $\varphi(x)$ уравнения (1.1) в классе $C^\infty[0, 1]$ комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций на отрезке $[0, 1]$.

Уравнения (1.1) возникают, когда решаем краевые задачи для эллиптических уравнений в случае, когда нарушается условие нормальности в одной граничной точке (см. [1]). Уравнение (1.1) при $f(x) \equiv 0$ называется однородным.

Цель данной работы – найти необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости уравнения (1.1) в классе $C^\infty[0, 1]$ и указать эффективный метод решения этого уравнения.

Настоящая заметка содержит следующие две теоремы.

Теорема 1. Интегральное уравнение (1.1) имеет единственное решение в классе $C^\infty[0, 1]$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{K(0,0)}{\alpha + \lambda} \neq 1, \quad \lambda = 0, 1, \dots \quad (1.2)$$

Теорема 2. Если условие (1.2) нарушается для некоторого целого $\lambda = \lambda_0 \geq 0$, то однородное уравнение (1.1) имеет только одно линейно

независимое решение. Неоднородное уравнение (1.1) имеет решение в классе $C^\infty[0, 1]$ тогда и только тогда, когда существуют комплексные постоянные $a_1, \dots, a_{\lambda_0-1}$ такие, что

$$f^{(\lambda_0)}(0) + \sum_{k=1}^{\lambda_0-1} a_k f^{(k)}(0) = 0. \quad (1.3)$$

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Лемма 1. Пусть $\varphi(x) \in C^\infty[0, 1]$ и $m \geq 1$ – натуральное число. Тогда функция $\varphi(x)$ представляется в виде

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_{m-1} x^{m-1} + x^m \varphi_0(x), \quad (2.1)$$

где $\varphi_0(x) \in C^\infty[0, 1]$ и $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}$ – комплексные постоянные.

Доказательство : непосредственно следует из формулы Тейлора.

Лемма 2. Если $\varphi(x)$, $x \in [0, 1]$ – непрерывное решение уравнения (1.1), то функции $x^k \varphi^{(k)}(x)$, $k = 1, 2, \dots$ также непрерывны на отрезке $[0, 1]$.

Доказательство : Функция

$$\psi(x) = \frac{1}{x^\alpha} \int_0^x K(x, t) t^{\alpha-1} \varphi(t) dt, \quad \psi(0) = \frac{1}{\alpha} K(0, 0) \varphi(0) \quad (2.2)$$

непрерывна на $[0, 1]$. Дифференцируя обе части уравнения (1.1) и используя (2.2) получим, что $x\varphi'(x)$ также непрерывна на $[0, 1]$. Аналогично заключаем, что $x^k \varphi^{(k)}(x)$ непрерывны на $[0, 1]$ при любых $k = 2, 3, \dots$. Лемма 2 доказана.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1 И 2

Обозначим через M_m класс функций $\varphi(x)$, представляемых в виде (2.1), где $x^k \varphi^{(k)}(x)$, $k = 0, 1, \dots$ непрерывны на $[0, 1]$. Мы ищем решения уравнения (1.1) в классе M_m .

Подставляя $\varphi(x)$ из (2.1) в (1.1), получим

$$x^m \varphi_0(x) - \frac{1}{x^\alpha} \int_0^x K(x, t) t^{m+\alpha-1} \varphi_0(t) dt = F(x) \equiv f(x) - \sum_{j=0}^{m-1} c_j \omega_j(x), \quad (3.1)$$

где

$$\omega_j(x) = x^j - \frac{1}{x^\alpha} \int_0^x K(x, t) t^{j+\alpha-1} dt, \quad j = 0, 1, \dots, m-1.$$

Так как $x^k \varphi_0^{(k)}(x)$ непрерывны на $[0, 1]$, то имеем

$$F^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1. \quad (3.2)$$

Теперь рассмотрим ряд $\sum_{n \in N_2} a_n f_n(x)$. Для $x \notin B$ и любого m , из (9) получим

$$\left| \sum_{\substack{n \leq m \\ n \in N_2}} a_n f_n(x) \right| \leq \left| \sum_{n \leq m} a_n f_n(x) \right| + \left| \sum_{\substack{n \leq m \\ n \in N_1}} a_n f_n(x) \right| \leq M + \left| \sum_{\substack{n \leq m \\ n \in N_1}} a_n f_n(x) \right|.$$

Очевидно, из $x \notin B$ вытекает $x \notin \bigcup_{k=k_0}^{\infty} I_{k_0,k}^{(j)}$ для всех k_0 . Таким образом, $B = \bigcup_m I_m$, где I_m имеют не пересекающиеся внутренности. Имеем $N_1 = \bigcup_m \{n : n \in N_1; \{n\} \subset I_m\}$ и $\{n : n \in N_1; \{n\} \subset I_m\} = \bigcup_{k=k_0}^{\infty} \{n : n \in N_1; \{n\} \subset I_{k_0,k}^{(j)}; [n] = k\}$, где k_0 - минимальное число такое, что $I_m = \bigcup_{k=k_0}^{\infty} I_{k_0,k}^{(j)}$. Тогда из неравенства

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\substack{n \leq m \\ n \in N_1}} a_n f_n(x) \right| &= \left| \sum_p \sum_{\substack{\{n\} \subset I_p \\ n \leq m \\ n \in N_1}} a_n f_n(x) \right| \leq \\ &\leq \sum_{k_0,j} \sum_{k=k_0}^{\infty} \max_m |S_{j,k_0,k,m}(x)| \leq \sum_{k_0,j} \varphi_{k_0}^{(j)}(x) \leq \varphi(x) \end{aligned}$$

вытекает, что

$$\left| \sum_{\substack{n \leq m \\ n \in N_2}} a_n f_n(x) \right| \leq M + \varphi(x), \quad x \notin B. \quad (17)$$

Пусть теперь $x \in I_{k_0}^{(j)}$ и $m \leq 2^{k_0-1}$. Имеем $m \leq 2^{k_0-1}$, $n \in N_1$ и $n \leq m$, т.е. $[n] \leq k_0 - 1$. Откуда следует, что $\{n\} \subset I_{k_0}^{(j)}$ не существует. Пусть $\{n\} \subset I_{m_0} = \bigcup_{k=k_0}^{\infty} I_{k_0,k}^{(j)}$. Тогда существует $p_0 < k_0$ такое, что $\{n\} \subset I_{p_0}^{(j_0)}$ и $I_{p_0}^{(j_0)} \cap I_{k_0}^{(j)} = \emptyset$. Следовательно, из $x \in I_{k_0}^{(j)}$ и $\{n\} \subset I_{p_0}^{(j_0)}$ следует, что $x \in I_{p_0,k_0}^{(j)} \setminus I_{p_0,k_0-1}^{(j)}$ ($k_0 > p_0$) и получаем

$$\left| \sum_{\substack{\{n\} \subset I_{p_0}^{(j_0)} \\ n \leq m}} a_n f_n(x) \right| \leq \sum_{p=p_0}^{k_0-1} \left| \sum_{\substack{\{n\} \subset I_{p_0}^{(j_0)} \\ [n]=p \\ n \leq m}} a_n f_n(x) \right| \leq \sum_{p=p_0}^{k_0-1} \max_m |S_{j,k_0,k,m}(x)| \leq \varphi_{p_0}^{j_0}(x)$$

для $x \in I_{k_0}^{(j)}$. Если $m \leq 2^{k_0-1}$ и $x \in I_{k_0}^{(j)}$, то функция $\sum_{n \leq m} a_n f_n(x)$ - линейная на интервалах порядка $k_0 - 1$. Один из этих интервалов не есть интервал типа $I_{k_0-1}^{(j)}$ (в противном случае не было бы интервала $I_{k_0}^{(j)}$). Для этого интервала $\mu(I \cap E_\delta) \geq \delta \mu(I)$, откуда получим $\left| \sum_{n \leq m} a_n f_n(x) \right| \leq C_{19}(M, \delta)$ для $x \in I_{k_0}^{(j)}$.

Наконец

$$\left| \sum_{\substack{n \leq m \\ n \in N_2}} a_n f_n(x) \right| \leq C_{19}(M, \delta) + \varphi(x) \quad \text{при } x \in I_{k_0}^{(j)}. \quad (18)$$

Теорема 3. Интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{x^{\alpha_j}} \int_0^x K_j(x,t) t^{\alpha_j-1} \varphi(t) dt + f(x), \quad \operatorname{Re} \alpha_j > 0$$

имеет единственное решение в классе $C^\infty[0, 1]$ тогда и только тогда, когда

$$1 - \sum_{j=1}^n \frac{K_j(0,0)}{\alpha_j + \lambda} \neq 0, \quad \lambda = 0, 1, \dots$$

ЛИТЕРАТУРА

1. N. E. Tovmasyan, Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications in Electrodynamics, World Scientific Publ., Singapore, 1994.
2. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, Элементы Функционального Анализа, Гостехиздат, Москва, 1951.

29 сентября 1999

Армянский государственный
инженерный университет