ЗАДАЧА РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА СО СМЕЩЕНИЯМИ

Н. Е. Товмасян, Г. А. Мартиросян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 1, 2000

В статье задача Римана–Гильберта со смещениями сводится к системе сингулярных интегральных уравнений нормального вида и вычисляется соответствующий индекс. Условие разрешимости формулируется в терминах сопряженной задачи. Результаты применяются к некоторым краевым задачам для эллиптических уравнений.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $D_0, D_1, ..., D_n$ – $(m+1)$–связные ограниченные области на плоскости с границами $\Gamma_0, \Gamma_1 \cdots \Gamma_n$, соответственно. Предположим что

$$\Gamma_j = \bigcup_{k=0}^{m} \Gamma_{jk}, \quad j = 0, 1, ..., n, \tag{0.1}$$

где $\Gamma_{j0}, \Gamma_{j1}, ..., \Gamma_{jm}$ – простые гладкие замкнутые кривые, удовлетворяющие условию Ляпунова (см. [1]). Предположим, что $\Gamma_{j0}, \Gamma_{j1}, ..., \Gamma_{jm}$ не имеет общих точек, причем Γ_{j0} содержит контуры $\Gamma_{j1}, ..., \Gamma_{jm}$. Каждую кривую направим против часовой стрелки.

Пусть функция $\alpha_j(t)$ из класса $C^2_\beta(\Gamma_0)$ взаимно однозначно отображает Γ_0 на Γ_j, сохраняя направление обхода, $j = 1, ..., n$. Предположим, что $\alpha_j(t)$ отображает Γ_{0k} на контур Γ_{jk}, $k = 1, ..., m$ и удовлетворяет условию $\alpha'_j(t) \neq 0$ при $t \in \Gamma_0$.

Задача Римана–Гильберта со смещениями для нескольких неизвестных функций состоит в следующем : найти функции $\varphi_1, ..., \varphi_n$, аналитические в областях $D_1, ..., D_n$ и непрерывные по Гельдеру в замкнутых областях $\overline{D}_1, ..., \overline{D}_n$ ($\overline{D}_k = D_k \cup \Gamma_k$) соответственно, удовлетворяющие граничным условиям

$$\mathrm{Re} \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(t)\varphi_j(\alpha_j(t)) = f_k(t), \quad t \in \Gamma_0, \quad k = 1, ..., n, \tag{0.2}$$

где $a_{kj}(t), f_k(t)$ – функции из класса $C_\beta(\Gamma_0)$. При $f_k(t) \equiv 0$, $k = 1, ..., n$ задача (0.2) называется **однородной**. Положим $\Phi(t) = \left[\varphi_1(\alpha_1(t)), ..., \varphi_n(\alpha_n(t))\right]$, $f(t) =$

$[f_1(t), ..., f_n(t)]$, $A(t) = \|a_{kj}(t)\|_{k,j=1}^n$. Граничное условие (0.2) можно записать в виде $\mathrm{Re}\,[A(t)\Phi(t)] = f(t), \quad t \in \Gamma_0$. Будем предполагать, что $\det A(t) \neq 0$ при $t \in \Gamma_0$. В случае, когда $\alpha_k(t) \equiv t$, $m = 0$ и $D_k = D_0$, $k = 1, ..., n$ задача (0.2) исследована в [1], [2].

Настоящая статья содержит следующие результаты. В §1 задача (0.2) сводится к системе сингулярных интегральных уравнений нормального вида и вычисляется ее индекс. В §2 строится однородная задача, сопряженная к задаче (0.2) и выписываются условия разрешимости задачи (0.2) в терминах сопряженной задачи. В §3 рассматриваются применения к краевым задачам для эллиптических уравнений.

§1. НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Нам понадобятся некоторые интегральные представления аналитических функций, которые мы получим, используя некоторые результаты из [1]. Все функции, заданные в области D или на границе Γ, предполагаются непрерывными по Гельдеру в замкнутой области $\overline{D}$ или на границе Γ, соответственно. Предположим также, что Γ – гладкая.

Пусть G_0, G_1, G_2 – односвязные ограниченные области на плоскости с границами γ_0, γ_1 и γ_2, соответственно. Пусть G_j^-, $j = 0,1,2$ – дополнение замкнутой области $G_j \cup \gamma_j$ до полной комплексной плоскости. Пусть функции $\varphi_0(z)$, $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, $\psi_0(z)$, $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$ аналитичны в областях G_0, G_1, G_2, G_0^- – G_1^-, G_2^-, соответственно и $\psi_j(\infty) = \lim_{z\to\infty} \psi_j(z) = 0$, $j = 0,1,2$.

Лемма 1.1. **Функции $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$, $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ можно представить в виде**

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_0} \frac{\nu(t)}{t-z}\,dt + i\int_{\gamma_0} \mu_0(t)\,ds,$$

$$\psi_j(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_j} \frac{\mu_j(t)}{t-z}\,dt, \quad j = 0,1,$$

$$\psi_2(z) = \frac{1}{z-z_2}\left(\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{\mu_2(t)}{t-z}\,dt + \int_{\gamma_1} \mu_1(t)\,ds + i\int_{\gamma_2} \mu_2(t)\,ds\right), \quad z_2 \in G_2,$$

где $\nu(t)$, $\mu_0(t)$, $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ – вещественнозначные функции, $ds = |dt|$ – длина дуги. Функции $\mu_0(t)$ и $\nu(t)$ определяются по $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ единственным образом, а $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ определяются по $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ единственным образом.

Доказательство : Функции $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ допускают представления (см. [1])

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_0} \frac{\nu(t)}{t-z}\,dt + iC_0, \quad \psi_0(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_0} \frac{\mu_0(t)}{t-z}\,dt, \tag{1.1}$$

где $\mu_0(t)$ и $\nu(t)$ – вещественнозначные функции, а C_0 – вещественная постоянная. Функция $\nu(t)$ и постоянная C_0 определяются единственным образом, а $\mu_1(t)$ определяется с точностью до вещественного постоянного слагаемого. Поэтому при дополнительном предположении

$$\int_{\gamma_0} \mu_0(t)\, ds = C_0, \tag{1.2}$$

функция $\mu_0(t)$ также определяется однозначно. Из (1.1) и (1.2) следует справедливость утверждения.

Теперь представим функцию $\psi_2(z)$ в виде

$$\psi_2(z) = \frac{C}{z - z_2} + \frac{\omega_2(z)}{z - z_2}, \quad z_2 \in G_2, \tag{1.3}$$

где C – комплексная постоянная, а $\omega_2(z)$ – аналитическая функция в G_2^-, удовлетворяющая уравнению $\omega_2(\infty) = 0$. Согласно (1.1), функции $\omega_2(z)$ и $\psi_1(z)$ единственным образом можно представить в виде

$$\omega_2(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{\mu_2(t)}{t - z}\, dt, \quad \psi_1(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{\mu_1(t)}{t - z}\, dt, \tag{1.4}$$

где $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ – вещественнозначные функции, причем

$$\int_{\gamma_1} \mu_1(t)\, ds = \operatorname{Re} C, \quad \int_{\gamma_2} \mu_1(t)\, ds = \operatorname{Im} C. \tag{1.5}$$

Доказательство завершено.

Лемма 1.2. Функции $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ можно представить в виде

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{\mu_1(t)}{t - z}\, dt + \frac{i}{\pi}\int_{\gamma_2} \mu_2(t)\, ds, \tag{1.6}$$

$$\varphi_2(z) = \frac{1}{z - z_2}\frac{1}{\pi i}\left(\int_{\gamma_1} \frac{\mu_2(t)}{t - z}\, dt - \int_{\gamma_2} \frac{\mu_2(t)}{t - z_2}\, dt\right), \quad z_2 \in G_2, \tag{1.7}$$

где $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ – вещественнозначные функции, определяемые по $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ единственным образом. Из (1.7) $\mu_2(t)$ однозначно определяется по $\varphi_2(z)$ с точностью до вещественного постоянного слагаемого.

Доказательство : Используя (1.1), функции $\varphi_1(z)$ и $(z - z_2)\varphi_2(z)$ представим в виде

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{\mu_1(t)}{t - z}\, dt + iC_1, \tag{1.8}$$

$$(z - z_2)\varphi_2(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{\mu_2(t)}{t - z}\, dt + iC_2, \tag{1.9}$$

где $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ – вещественнозначные функции, C_1 и C_2 – вещественные постоянные, причем эти величины определяются однозначно. Подставляя $z = z_2$ в (1.9), получим

$$C_2 = \frac{1}{\pi} \int_{\gamma_2} \frac{\mu_2(t)}{t - z_2}\, dt. \tag{1.10}$$

Из (1.9) и (1.10) имеем (1.7). Функцию $\mu_2(t)$ в (1.7) можно заменить на $\mu_2(t) + C_0$, где C_0 – произвольная вещественная постоянная. Следовательно, можно предположить, что функция $\mu_2(t)$ удовлетворяет дополнительному условию

$$\int_{\gamma_2} \mu_2(t)\, ds = C_1. \tag{1.11}$$

Подставляя значение C_1 из (1.11) в (1.8), получим (1.6). Единственность представлений (1.6) и (1.7) следует из единственности представлений (1.8) и (1.9). Единственность $\mu_2(t)$ можно доказать аналогично. Лемма 1.2 доказана.

Рассмотрим теперь области $D_0, D_1, ..., D_n$, описанные во Введении.

Лемма 1.3. Если $m = 2\nu + 1$ – нечетное число, то любая аналитическая в D_j функция $\varphi_j(z)$ представима в виде

$$\varphi_j(z) = \sum_{k=0}^{\nu+1} \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_{jk}} \frac{\mu_j(t)}{t - z}\, dt + \frac{1}{\pi i} \sum_{k=\nu+2}^{m} \frac{1}{z - z_{jk}} \int_{\Gamma_{jk}} \frac{\mu_j(t)}{t - z}\, dt + i \int_{\Gamma_{j1}} \mu_j(t)\, ds +$$

$$+ \sum_{k=\nu+2}^{m} \frac{1}{z - z_{jk}} \left[i \int_{\Gamma_{jk}} \mu_j(t)\, ds + \int_{\Gamma_{j,k-\nu}} \mu_j(t)\, ds \right], \tag{1.12}$$

где $\mu_j(t)$ – вещественнозначная функция, определенная на Γ_j единственным образом по $\varphi_j(z)$, а z_{jk} – фиксированная точка внутри контура Γ_{jk}.

Доказательство : Пусть D_{jk}, $k = 0, 1, ..., m$ – односвязные ограниченные области с границами Γ_{jk}. Пусть D_{jk}^- – дополнение замкнутой области $D_{jk} \cup \Gamma_{jk}$ до полной комплексной плоскости. Представим функцию $\varphi_j(z)$ в виде

$$\varphi_j(z) = \varphi_{j0}(z) + \varphi_{j1}(z) + \cdots + \varphi_{jm}(z), \tag{1.13}$$

где $\varphi_{j0}(z)$ аналитична в D_{j0}, а $\varphi_{j1}(z), ..., \varphi_{jm}(z)$ аналитичны в $D_{j1}^-, ..., D_{jm}^-$ соответственно и $\varphi_{jk}(\infty) = 0$, $k = 1, ..., m$. В (1.13) функции $\varphi_{j0}(z), ..., \varphi_{jm}(z)$ определяются через $\varphi_j(z)$ единственным образом. Применяя Лемму 1.1 к парам функций $\varphi_{j0}(z), \varphi_{j1}(z)$ и $\varphi_{jk}(z), \varphi_{j,\nu+k}(z)$, $k = 2, ..., \nu + 1$, получим представление (1.12). Лемма 1.3 доказана.

Лемма 1.4. **Если $m = 2\nu$ – четное число, то любая аналитическая в D_j функция $\varphi_j(z)$ представима в виде**

$$\varphi_j(z) = \sum_{k=0}^{\nu} \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_{jk}} \frac{\mu_j(t)}{t-z}\, dt + \frac{1}{\pi i} \sum_{k=\nu+1}^{m} \frac{1}{z - z_{jk}} \int_{\Gamma_{jk}} \frac{\mu_j(t)}{t-z}\, dt +$$

$$+iC_j + \sum_{k=\nu+1}^{m} \frac{1}{z - z_{jk}} \left(i \int_{\Gamma_{jk}} \mu_j(t)\, ds + \int_{\Gamma_{j,k-\nu}} \mu_j(t)\, ds \right), \qquad (1.14)$$

где $\mu_j(t)$ – вещественнозначная функция, определенная на Γ_j, а C_j – вещественные постоянные, определяемые по $\varphi_j(z)$ единственным образом.

Доказательство : Предположим, что имеет место представление (1.13). Применяя (1.8) к $\varphi_{j0}(z)$ и Лемму 1.1 к паре функций $\varphi_{jk}(z), \varphi_{j,\nu+k}(z)$, $k = 1, ..., \nu$, получим представление (1.14). Лемма 1.4 доказана.

§2. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ (0.2)

Пусть $m = 2\nu + 1$ – нечетное число. Представим аналитические функции $\varphi_j(z)$ в виде (1.12) и положим

$$\Psi_{jk}(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_{jk}} \frac{\mu_j(t)}{t-z}\, dt, \quad z \in D_j. \qquad (2.1)$$

Пусть $t_0 \in \Gamma_{0k}$. Переходя к пределу в (2.1) при $z \to \alpha_j(t_0)$ и используя формулу Сохоцкого–Племеля [1], получим

$$\Psi_{jk}(\alpha_j(t_0)) = \mu_j(\alpha_j(t_0)) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_{jk}} \frac{\mu_j(\tau)}{\tau - \alpha_j(t_0)}\, d\tau. \qquad (2.2)$$

Здесь и ниже сингулярные интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши, см. [1]. Заменой переменной $\tau = \alpha_j(t)$, (2.2) можно записать в виде

$$\Psi_{jk}(\alpha_j(t_0)) = \nu_j(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_{0k}} \frac{\nu_j(t)\alpha_j'(t)}{\alpha_j(t) - \alpha_j(t_0)}\, dt, \quad t_0 \in \Gamma_{0k},$$

где $\nu_j(t) = \mu_j(\alpha_j(t))$. Последнее соотношение представим в виде

$$\Psi_{jk}(\alpha_j(t_0)) = \nu_j(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_{0k}} \frac{\nu_j(t)}{t - t_0}\, dt + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_{0k}} H_j(t_0, t)\nu_j(t)\, dt, \quad t_0 \in \Gamma_{0k}, \qquad (2.3)$$

где

$$H_j(t_0, t) = \frac{\alpha_j'(t)}{\alpha_j(t) - \alpha_j(t_0)} - \frac{1}{t - t_0}.$$

Как показано в [1]

$$H_j(t_0, t) = \frac{H_j^*(t_0, t)}{|t - t_0|^{\beta}}, \quad 0 < \beta = const < 1, \qquad (2.4)$$

где $H_j^*(t_0, t)$ удовлетворяет условию Гельдера относительно t и t_0. Ядро вида $H_j(t_0, t)$ называется **фредгольмовым**. Положим

$$\Pi_j(t_0) = diag\left[\frac{1}{\alpha_1(t_0) - z_{1j}}, \dots, \frac{1}{\alpha_n(t_0) - z_{nj}}\right].$$

Подставляя функцию $\varphi_j(z)$ из (1.12) в граничное условие (0.2) и используя (2.3), для $t_0 \in \Gamma_0$ получим

$$\text{Re } B(t_0)\nu(t_0) + \text{ Re }\left[B(t_0)\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{\nu(t)}{t - t_0}\,dt\right] + \int_{\Gamma_0} K_1(t_0, t)\nu(t)\,ds = f(t_0), \quad (2.5)$$

где $\nu(t) = [\nu_1(t), \dots, \nu_n(t)]$ – неизвестный вещественнозначный вектор–столбец,

$$B(t) = \begin{cases} A(t) & \text{при } j = 0, 1, \dots, \nu + 1, \\ A(t)\Pi_j(t) & \text{при } j = \nu + 2, \dots, m, \end{cases} \qquad t \in \Gamma_{0j}, \quad (2.6)$$

а $K_1(t_0, t)$ – вполне определенная $n \times n$–квадратная матрица, элементы которой представляются в виде (2.4). Это означает, что ядро $K_1(t_0, t)$ фредгольмово.

Далее, второе слагаемое в левой части (2.5) представим в виде

$$\text{Im } B(t_0)\frac{1}{\pi}\int_{\Gamma_0}\frac{\nu(t)}{t - t_0}\,dt + \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_0} K_2(t_0, t)\nu(t)\,ds,$$

где $K_2(t_0, t)$ – фредгольмово ядро. Тогда характеристическое уравнение сингулярного интегрального уравнения (2.5) задается формулой

$$K^0\nu \equiv A_1(t_0) + B_1(t_0)\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{\nu(t)}{t - t_0}\,dt = f(t_0), \quad (2.7)$$

где $A_1(t) = \text{ Re } B(t)$, $\quad B_1(t) = i \text{ Im } B(t)$. Ясно, что (2.5) можно записать в виде

$$K\nu \equiv \text{ Re } B(t_0)\nu(t_0) + \int_{\Gamma_0} K(t_0, t)\nu(t)\,ds = f(t_0), \quad (2.8)$$

где $K(t_0, t)$ – вещественнозначная $n \times n$–квадратная матрица. Уравнение

$$K'\delta \equiv \delta(t_0) \text{ Re } B(t_0) + \int_{\Gamma_0}\delta(t_0)K(t, t_0)\,ds = 0,$$

где $\delta(t)$ – искомая вещественнозначная n-мерная вектор–строка, называется **однородным уравнением, сопряженным к** (2.8).

Пусть $a(t)$ – функция, определенная на Γ_0 такая, что $a(t) \neq 0$ при $t \in \Gamma_0$. Приращение $\arg a(t)$, деленное на 2π, когда точка t описывает один раз контур Γ_0 в положительном направлении, называется **индексом** функции $a(t)$ на Γ_0.

Обозначим через l_0 – число линейно независимых решений однородной задачи (2.5) (при $f \equiv 0$), а через l_0' – число линейно независимых решений сопряженного однородного уравнения $K'\delta = 0$. Из теории сингулярных интегральных уравнений известны следующие факты [1].

1) Уравнение (2.7) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\int_{\Gamma_0} \delta_j(t) f(t)\, ds = 0, \quad j = 1, ..., l'_0, \tag{2.9}$$

где $\delta_1(t), ..., \delta_{l'_0}(t)$ – полная система линейно независимых решений сопряженного однородного уравнения $K'\delta = 0$.

2) $l_0 - l'_0 = -2\kappa$, где κ – индекс $\det B(t)$ на контуре Γ_0.

Из (2.6) следует, что $l_0 - l'_0 = -2\rho_0 - n(m-1)$, где ρ_0 – индекс $\det A(t)$ на Γ_0. Пусть κ_0 – число линейно независимых решений однородной задачи (0.2), а κ'_0 – число условий вида (2.9), которые необходимы и достаточны для разрешимости неоднородной задачи (0.2). Из единственности представления (1.12) следует $\kappa_0 = l_0$ и $\kappa'_0 = l'_0$. Следовательно

$$\kappa_0 - \kappa'_0 = -2\rho_0 - n(m-1). \tag{2.10}$$

Пусть теперь $m = 2\nu$ четно. Используя (1.14), задачу (0.2) можно свести к сингулярному интегральному уравнению нормального вида, который также содержит неизвестные вещественные постоянные $C_1, ..., C_n$ (см. [1] и [3]).

В этом случае из единственности представления (1.14) следует (2.10). Число $\kappa_0 - \kappa'_0$ называется **индексом** задачи (0.2). Таким образом, не решая задачу (0.2) можно вычислить ее индекс.

Замечание. Если m четно, то используя Леммы 1.1, 1.2, задачу (0.2) можно свести к сингулярному интегральному уравнению нормального вида (2.5), которое не содержит неизвестные постоянные. В этом случае имеем $\kappa_0 = l_0$ и $\kappa'_0 = l'_0$ при четном n, а $\kappa_0 = l_0 - 1$ и $\kappa'_0 = l'_0$ при нечетном n.

§3. СОПРЯЖЕННАЯ ОДНОРОДНАЯ ЗАДАЧА

Здесь при решении сопряженной однородной задачи Римана–Гильберта, определяются вещественнозначные вектор-функции $\delta_1(t), ..., \delta_{l'_0}(t)$, $t \in \Gamma$ из (2.9).

Пусть $\psi(t) = \delta_k(t)$ – вещественнозначная вектор-функция из (2.9). Записав $b_k(t)$ для k-ого столбца матрицы $A(t)$, граничное условие (0.2) примет вид

$$\mathrm{Re}\,[b_1(t)\varphi_1(\alpha_1(t)) + \cdots + b_n(t)\varphi_n(\alpha_n(t))] = f(t), \quad t \in \Gamma. \tag{3.1}$$

Граничная задача (3.1) разрешима, если ее правая часть имеет вид $f_1 = \operatorname{Re}[b_k(t)\varphi_k(\alpha_k(t))]$ или $f_2 = \operatorname{Re}[b_k(t)i\varphi_k(\alpha_k(t))]$. Тогда соответствующими решениями будут функции $(0, ..., 0, \varphi_k(\zeta), 0, ..., 0)$ и $(0, ..., 0, i\varphi_k(\zeta), 0, ..., 0)$, где $\varphi_k(\zeta)$ аналитична в D_k, и условия разрешимости (2.9) выполнены. Следовательно,

$$\int_\Gamma \psi(t)b_k(t)\varphi_k(\alpha_k(t))\,ds = 0, \quad k = 1, ..., n. \tag{3.2}$$

Пусть функции $t = \beta_k(\tau)$, $\tau \in \Gamma_k$ обратны к $\tau = \alpha_k(t)$, $t \in \Gamma$. В параметрических уравнениях $t = t(s)$ и $\tau = \tau_k(\sigma_k)$ контуров Γ и Γ_k соответственно, пусть s и σ_k – длины дуг. Подставляя $t = \beta_k(\tau)$ в (3.2) и учитывая, что $ds = |dt| = |\beta_k'(\tau)|\cdot|d\tau| = |\beta_k'(\tau)|\,d\sigma_k$, получим

$$\int_{\Gamma_k} \psi(\beta_k(\tau))b_k(\beta_k(\tau))\varphi_k(\tau)|\beta_k'(\tau)|\sigma_k'(\tau)\,d\tau = 0, \quad k = 1, ..., n. \tag{3.3}$$

Так как соотношение (3.3) выполняется для любой функции $\varphi_k(\zeta)$, аналитичной в D_k, то функция

$$\omega_k(\tau) = \psi(\beta_k(\tau))b_k(\beta_k(\tau))|\beta_k'(\tau)|\sigma_k'(\tau) \tag{3.4}$$

является граничным значением некоторой аналитической в D_k функции $\omega_k(\zeta)$ (см. [1]). Используя $\tau = \alpha_k(t)$ и

$$\beta_k'(\tau) = \frac{1}{\alpha_k'(t)}, \quad \sigma_k'(\tau) = \frac{|\alpha_k'(t)|}{\alpha_k(t)t'(s)},$$

(3.4) запишется в виде

$$\psi(t)b_k(t) = \alpha_k'(t)t'(s)\omega_k(\alpha_k(t)), \quad t \in \Gamma, \quad k = 1, ..., n. \tag{3.5}$$

Положим

$$\omega(t) = [\omega_1(\alpha_1(t)), ..., \omega_n(\alpha_n(t))], \quad \gamma(t) = diag\left(\frac{d\alpha_1(t)}{ds}, ..., \frac{d\alpha_n(t)}{ds}\right).$$

Ясно, что

$$\frac{d\alpha_k(t)}{ds} = \alpha_k'(\tau)t'(s).$$

Запишем (3.5) в виде

$$\psi(t) = \omega(t)\gamma(t)A^{-1}(t), \quad t \in \Gamma. \tag{3.6}$$

Так как $\psi(t)$ – вещественнозначная, то $\omega(t)$ удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re}[i\omega(t)\gamma(t)A^{-1}(t)] = 0, \quad t \in \Gamma. \tag{3.7}$$

Таким образом, получили однородную задачу Римана–Гильберта, **сопряженную к задаче** (0.2) : **найти аналитические в областях** $D_1, ..., D_n$ **функции** $\omega_1(\zeta), ..., \omega_n(\zeta)$ соответственно, которые непрерывны по Гельдеру в $\overline{D}_1, ..., \overline{D}_n$ и удовлетворяют (3.7).

Покажем, что если при заданной вектор-функции $f(t)$ задача (0.2) имеет решение, то

$$\int_\Gamma \psi(t) f(t)\, ds = 0 \tag{3.8}$$

для вектор функции $\psi(t)$, допускающей представление (3.6), где $\omega(t)$ – произвольное решение задачи (3.7). Действительно, пусть $f(t) = \operatorname{Re}[A(t)\Phi(t)]$, а $\omega(t)$ – решение задачи (3.7). Так как (3.6) вещественнозначна, получим

$$\int_\Gamma \psi(t) f(t)\, ds = \int_\Gamma \omega(t)\gamma(t)A^{-1}(t) \operatorname{Re}[A(t)\Phi(t)]\, ds = \operatorname{Re} \int_\Gamma \omega(t)\gamma(t)\Phi(t)\, ds =$$

$$= \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n \int_\Gamma \omega_k(\alpha_k(t)) \frac{d\alpha_k(t)}{ds} \varphi_k(\alpha_k(t))\, ds = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} \omega_k(\tau)\varphi_k(\tau)\, d\tau = 0.$$

Предположим, что $f(t)$ удовлетворяет условию (3.8) для всех вектор функций $\psi(t)$, допускающих представление (3.6). Так как $\delta_1(t), ..., \delta_{l'}(t)$ обладает этим свойством, то соотношение (2.9) выполняется. Следовательно, задача (0.2) имеет решение. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. Условие (3.8), где $\psi(t)$ определяется из (3.6), а $\omega(t)$ – решение задачи (3.7), является необходимым и достаточным для разрешимости задачи (0.2).

§4. ЗАДАЧА РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ СИСТЕМЫ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1. Пусть D – $(m+1)$-связная ограниченная область с границей Γ. В D рассмотрим эллиптическую систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial y} = A_0 \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (x, y) \in D, \tag{4.1}$$

где A_0 – $(n \times n)$-квадратная матрица с постоянными элементами, а $U = (U_1, ..., U_n)$ – искомое решение. Система (4.1) называется **эллиптической**, если характеристическое уравнение

$$\det(\lambda E - A_0) = 0, \quad E = \text{unit } (n \times n)\text{-matrix} \tag{4.2}$$

не имеет вещественных корней. Будем предполагать, что корни характеристического уравнения (4.2) простые и удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} \operatorname{Im} \lambda_j > 0, & j = 1, \dots, p, \\ \operatorname{Im} \lambda_j < 0, & j = p+1, \dots, n. \end{cases}$$

Граничная задача Римана-Гильберта заключается в отыскании решения $U(x, y)$ системы (4.1), непрерывного по Гельдеру в $\overline{D} = D \cup \Gamma$ и удовлетворяющего граничному условию

$$\operatorname{Re} [B(t)U(t)] = f(t), \quad t \in \Gamma, \tag{4.3}$$

где $B(t)$ – $(n \times n)$-квадратная матрица, а $f(t)$ – вещественнозначный вектор-столбец, удовлетворяющий условию Гельдера на Γ. Пусть n-мерный вектор-столбец b_k является нетривиальным решением уравнения

$$(E\lambda_k - A_0)b_k = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Известны следующие факты (см. [4]) : $rank(E\lambda_k - A_0) = n - 1$, и векторы $b_1, \dots, b_n$ линейно независимы. Общее решение системы (4.1) определяется формулой [4]

$$U(z) = \sum_{k=1}^{n} b_k \varphi_k(x + \lambda_k y), \tag{4.4}$$

где $\varphi_k(x + \lambda_k y)$ аналитична относительно $(x + \lambda_k y)$ при $(x, y) \in D$. Функции $\varphi_k(x + \lambda_k y)$, $k = 1, \dots, n$ определяются по $U(x, y)$ единственным образом. При $k = p+1, \dots, n$ функцию $\varphi_k(x + \lambda_k y)$ можно представить в виде

$$\varphi_k(x + \lambda_k y) = \overline{\psi_k\left(x + \overline{\lambda}_k y\right)}, \quad k = p+1, \dots, n, \tag{4.5}$$

где $\psi_k\left(x + \overline{\lambda}_k y\right)$ аналитична относительно $\left(x + \overline{\lambda}_k y\right)$ при $(x, y) \in D$. Из (4.4) и (4.5) имеем

$$U(z) = \sum_{k=1}^{p} b_k \varphi_k(x + \lambda_k y) + \sum_{k=p+1}^{n} b_k \overline{\psi_k\left(x + \overline{\lambda}_k y\right)}. \tag{4.6}$$

Подставляя общее решение (4.6) в граничное условие (4.3), получим

$$\operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^{p} B(z) b_k \varphi_k(x + \lambda_k y) + \sum_{k=p+1}^{n} B(z) b_k \overline{\psi_k\left(x + \overline{\lambda}_k y\right)} \right] = f(t), \quad t = x + iy \in \Gamma. \tag{4.7}$$

Положим

$$\omega_k(z) = \begin{cases} \varphi_k(x + \lambda_k y), & k = 1, \dots, p, \\ \psi_k\left(x + \overline{\lambda}_k y\right), & k = p+1, \dots, n, \end{cases} \qquad a_k(z) = \begin{cases} B(z)b_k, & k = 1, \dots, p, \\ \overline{B(z)b_k}, & k = p+1, \dots, n. \end{cases}$$

Ясно, что $\omega_k(\zeta)$ аналитична в D_k, где D_k – образ области D при отображении

$$\zeta = \alpha_k(z) = \begin{cases} (x + \lambda_k y), & k = 1, \dots, p, \\ (x + \overline{\lambda}_k y), & k = p+1, \dots, n, \end{cases} \quad z \in D.$$

Граничное условие (4.7) можно записать в виде

$$\operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^{n} a_k(t) \omega_k(\alpha_k(t)) \right] = f(t), \quad t \in \Gamma. \tag{4.8}$$

Пусть $A(t)$ – матрица со столбцами $a_k(t)$. Предположим, что $\det A(t) \neq 0$ для любой точки $t \in \Gamma$. Задача (4.1), (4.3) сводится к задаче (4.8) из §3. Индекс задачи (4.1), (4.3) совпадает с индексом задачи. Из результатов §1 получаем

Следствие 1. При условии $\det A(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$ индекс задачи (4.1), (4.3) равен $n - 2\chi - mn$, где χ – индекс функции $\det A(t)$ на Γ.

2. В односвязной ограниченной области D рассмотрим эллиптическое уравнение второго порядка

$$A \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in D, \tag{4.9}$$

где A, B, C – комплексные постоянные, $C \neq 0$. Предположим, что на границе Γ области D функция $U(z)$ удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re} \left[a_{j1}(z) \frac{\partial U}{\partial x} + b_{j1}(z) \frac{\partial U}{\partial y} + c_j(z) U \right] = f_j(z), \quad j = 1, 2, \quad z \in \Gamma, \tag{4.10}$$

где функции a_{j1}, c_j, b_{j1}, f_j, $j = 1, 2$ определены на Γ и удовлетворяют условию Гельдера, $f_1(z)$ и $f_2(z)$ предполагаются вещественнозначными. Пусть λ_1 и λ_2 – корни характеристического уравнения $A + B\lambda + C\lambda^2 = 0$. Предположим, что $\operatorname{Im} \lambda_1 > 0$, $\operatorname{Im} \lambda_2 > 0$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Общее решение уравнения (4.9) определяется по [4]

$$U(x, y) = \varphi_1(x + \lambda_1 y) + \varphi_2(x + \lambda_2 y), \tag{4.11}$$

где $\varphi_k(x + \lambda_k y)$, $k = 1, 2$ аналитичны относительно $(x + \lambda_k y)$ при $(x, y) \in D$. Не умаляя общности можно предположить, что D содержит начало координат и $\varphi_2(0) = 0$. Тогда функции φ_1 и φ_2 определяются по $U(x, y)$ единственным образом.

Пусть D_j, $j = 1, 2$ – образ области D при отображении $\zeta = x + \lambda_j y$, где $(x, y) \in D$. Тогда

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{z} \int_0^z \frac{d(\zeta \varphi_1(\zeta))}{d\zeta} \, d\zeta, \quad z \in D_1, \quad \varphi_2(z) = \int_0^z \frac{d\varphi_2(\zeta)}{d\zeta} \, d\zeta, \quad z \in D_2.$$

Следовательно, функции φ_1 и φ_2 представляются в виде

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{z}\int_0^z \psi_1(\zeta)\,d\zeta, \quad z \in D_1, \quad \varphi_2(z) = \int_0^z \psi_2(\zeta)\,d\zeta, \quad z \in D_2,$$

где $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ аналитичны в D_1 и D_2, соответственно. Поэтому (4.11) запишется в виде

$$U(x,y) = \frac{1}{x+\lambda_1 y}\int_0^{x+\lambda_1 y} \psi_1(\zeta)\,d\zeta + \int_0^{x+\lambda_2 y} \psi_2(\zeta)\,d\zeta. \tag{4.12}$$

Подставляя $U(x,y)$ из (4.12) в (4.10), получим

$$\operatorname{Re}\left[A_{j1}(z)\psi_1(\alpha_1(z)) + A_{j2}(z)\psi_2(\alpha_2(z)) + B_{j1}(z)\int_0^{\alpha_1(z)} \psi_1(\zeta)\,d\zeta + \right.$$

$$\left. + B_{j2}(z)\int_0^{\alpha_2(z)} \psi_2(\zeta)\,d\zeta\right] = f_j(z), \quad j = 1,2, \quad z \in \Gamma, \tag{4.13}$$

где

$$A_{j1}(z) = \frac{1}{\alpha_1(z)}[a_{j1}(z) + \lambda_1 b_{j1}(z)], \quad A_{j2}(z) = a_{j1}(z) + \lambda_2 b_{j1}(z), \quad \alpha_j(z) = x + \lambda_j y,$$

$$B_{j1}(z) = -\frac{1}{(\alpha_1(z))^2}[a_{j1}(z) + \lambda_1 b_{j1}(z)] + \frac{c_j(z)}{\alpha_1(z)}, \quad B_{j2}(z) = c_j(z), \quad j = 1,2.$$

Так называемое **условие нормальности** задачи (4.9), (4.10) есть

$$A_{11}(z)A_{22}(z) - A_{12}(z)A_{21}(z) \neq 0, \quad z \in \Gamma. \tag{4.14}$$

Задачи (4.9), (4.10) и (4.13) эквивалентны, поэтому их индексы совпадают. Применяя результаты §1 для задачи (4.13), получим

Следствие 2. При условии (4.14) индекс задачи (4.9), (4.10) равен $2 - 2\chi$, где χ – индекс функции $A_{11}(z)A_{22}(z) - A_{12}(z)A_{21}(z)$ на Γ.

3. Пусть $\operatorname{Im}\lambda_1 > 0$, $\operatorname{Im}\lambda_2 > 0$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Рассмотрим граничные условия (4.10) вида

$$\operatorname{Re}[a_1(z)U(z)] = f_1(z), \quad z \in \Gamma, \tag{4.15}$$

$$\operatorname{Re}\left[a_2(z)\frac{\partial U}{\partial N}\right] = f_2(z), \quad z \in \Gamma, \tag{4.16}$$

где достаточно гладкие функции a_j, f_j, $j = 1,2$ определены на Γ, $\dfrac{\partial U}{\partial N}$ – производная функции $U(z)$ по направлению внутренней нормали в точке $z \in \Gamma$, $f_1(z)$ и $f_2(z)$ предполагаются вещественнозначными, причем

$$a_1(z) \neq 0, \quad a_2(z) \neq 0, \quad z \in \Gamma. \tag{4.17}$$

Из (4.15) имеем

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\partial}{\partial s}(a_1(z)U(z))\right] = \frac{\partial f_1(z)}{\partial s}, \quad z \in \Gamma, \tag{4.18}$$

где $\dfrac{\partial f_1}{\partial s}$ – производная функции $f_1(z)$ относительно длины дуги на Г. Из (4.15) и (4.18) получим

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\partial}{\partial s}(a_1(z)U(z)) + a_2(z)U(z)\right] = \frac{\partial f_1(z)}{\partial s} + f_1(z), \quad z \in \Gamma. \tag{4.19}$$

В классе непрерывно дифференцируемых функций условия (4.15) и (4.19) эквивалентны.

Отметим, что условия (4.16) и (4.19) являются частным случаем граничных условий (4.10). Легко установить, что из (4.17) следует условие нормальности задачи (4.9), (4.16), (4.19).

Применяя Следствие 2 к задаче (4.9), (4.16), (4.19), приходим к следующему утверждению.

Следствие 3. При условии (4.17) индекс задачи (4.9), (4.15), (4.16) равен $4 - 2\chi_1 - 2\chi_2$, где

$$\chi_j = \frac{1}{2\pi}\left[\arg a_j(z)\right]_\Gamma, \quad j = 1, 2.$$

ABSTRACT. The paper reduces the Riemann–Hilbert problem with shifts to a system of singular integral equations of normal type and calculates the corresponding index. A solvability condition is formulated in terms of conjugate problem. The results are applied to some boundary value problems for elliptic equations.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные Интегральные Уравнения, Наука, Москва, 1962.
2. Н. П. Векуа, Системы Сингулярных Интегральных Уравнений и Некоторые Граничные Задачи, Гостехиздат, Москва, 1950.
3. П. А. Солдатов, "Методы теории функций в краевых задачах на плоскости. Гладкий случай", Изв. АН СССР, серия Математика, том 55, № 5, стр. 1070 – 1100, 1991.
4. N. E. Tovmasian, Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications in Electrodynamics, World Scientific Publ., Singapore, 1994.

21 сентября 1999

Армянский государственный инженерный университет