

НЕКОТОРЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СО СДВИГОМ В КЛАССЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Н. Е. Товмасян, В. А. Ирицян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 35, № 1, 2000

В статье изучаются функциональные уравнения со сдвигами в классе аналитических функций и получены необходимые и достаточные условия для их разрешимости. Результаты применяются в изучении нелокальных граничных задач для уравнения Лапласа.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть D – односвязная ограниченная область комплексной плоскости с достаточно гладкой границей Γ . Пусть $O \in D$ и $\bar{D} = D \cup \Gamma$. В области D рассмотрим уравнение

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(z) \varphi(\beta_k(z)) + f(z), \quad z \in D, \quad (1)$$

где $\alpha_k(z)$, $\beta_k(z)$ и $f(z)$ – заданные аналитические функции, n – натуральное число, $z = x + iy$. Наша задача – найти аналитическую в D функцию $\varphi(z)$, удовлетворяющую уравнению (1).

Предположим, что

$$\beta_k(z) \in D \quad \text{при} \quad z \in \bar{D}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (2)$$

$$\beta_k(0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

При $f \equiv 0$ уравнение (1) называется однородной. Докажем, что из (2) и (3) следуют неравенства

$$|\beta'_k(0)| \leq q < 1, \quad k = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Некоторые частные случаи уравнения (1) в круге рассмотрены в [1], глава V. Если существует конформное отображение области D на единичный круг, то заменой переменной уравнение (1) сводится к аналогичному уравнению в круге и это

уравнение можно решить методом, предложенным в [1]. Однако, в большинстве случаев конформное отображение сложно найти, и поэтому здесь предлагается другой метод. Докажем следующие теоремы.

Теорема 1. Если

$$\sum_{k=1}^n |\alpha_k(0)| < 1, \quad (5)$$

то уравнение (1) имеет единственное решение, задаваемое рядом Неймана

$$\varphi(z) = f(z) + \sum_{j=1}^{\infty} K^j(f), \quad (6)$$

где K^j – применение оператора

$$K(f) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(z) f(\beta_k(z)) \quad (7)$$

j раз.

Теорема 2. Если выполнены условия

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k(0) (\beta_k'(0))^j \neq 1, \quad j = 0, 1, \dots, \quad (8)$$

то уравнение (1) имеет единственное решение.

Теорема 3. Пусть условие (8) нарушено для некоторых значений j , и пусть число таких случаев $\nu \geq 1$. Тогда уравнение (1) фредгольмово и число μ линейно независимых решений соответствующего однородного уравнения удовлетворяет оценкам

$$\mu = 1 \quad \text{при} \quad \nu = 1 \quad \text{и} \quad 1 \leq \mu \leq \nu \quad \text{при} \quad \nu \geq 2. \quad (9)$$

Здесь линейная независимость понимается в поле комплексных чисел.

Ниже число μ линейно независимых решений однородного уравнения (1) (при $\nu \geq 2$) получено при помощи производных функций $\alpha_k(z)$ и $\beta_k(z)$ в точке $z = 0$.

Замечание 1. Из (4) следует, что условие (8) удовлетворяется для достаточно больших значений j .

§1. НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть функции $\beta_1(z), \dots, \beta_n(z)$ аналитичны в односвязной области D , непрерывны в $\bar{D}$ и удовлетворяют условиям (2), (3).

Рассмотрим замкнутые области D_j и G_{jk} и числа d_j ($k = 1, 2, \dots, n$; $j = 0, 1, \dots$), определенные при помощи рекуррентных соотношений :

$$D_0 = \bar{D}, \quad D_{j+1} = \bigcup_{k=1}^n G_{jk}, \quad d_j = \max_{z \in D_j} |z|, \quad (10)$$

где G_{jk} — образ области D_j при отображении $\xi = \beta_k(z)$.

Так как аналитические функции $\beta_1(z), \dots, \beta_n(z)$ непрерывны в $\bar{D}$ и удовлетворяют условиям (2), (3), то

$$D_j \in D, \quad G_{jk} \in D, \quad 0 \in D_j, \quad 0 \in G_{jk}, \quad k = 1, \dots, n, \quad j = 0, 1, \dots \quad (11)$$

Лемма 1. Последовательность d_j стремится к нулю при $j \rightarrow +\infty$.

Доказательство : Из определения множества D_j следует, что каждая точка $z_j \in D_j$ имеет представление

$$z_j = (\beta_{k_1} \circ \beta_{k_2} \circ \dots \circ \beta_{k_j})(z_0), \quad (12)$$

где $(f \circ g)(z) = f(g(z))$, $k_1, \dots, k_j$ — натуральные числа меньшие или равные n .

$\beta_{k_1} \circ \beta_{k_2} \circ \dots \circ \beta_{k_j}$ — суперпозиция функций $\beta_{k_1}(z), \dots, \beta_{k_j}(z)$, а z_0 — точка из $\bar{D}$.

Пусть $z = \gamma(\xi)$ конформно отображает единичный круг $|\xi| < 1$ на область D и $\gamma(0) = 0$, а $\xi = \delta(z)$ — обратное отображение. Так как $z_0 \in \bar{D}$, то

$$z_0 = \gamma(\xi_0), \quad (13)$$

где ξ_0 — точка из круга $|\xi| \leq 1$.

Из (12) и (13) следует, что

$$z_j = (\beta_{k_1} \circ \beta_{k_2} \circ \dots \circ \beta_{k_j} \circ \gamma)(\xi_0). \quad (14)$$

Обозначим

$$\omega_j(\xi) = \delta(\beta_j(\gamma(\xi))), \quad j = 1, \dots, n. \quad (15)$$

Функция $\omega_j(\xi)$ аналитична в круге $|\xi| < 1$, непрерывна в $|\xi| \leq 1$ и удовлетворяет условию $\omega_j(0) = 0$, $j = 1, \dots, n$.

Из (2) следует, что

$$|\omega_j(\xi)| \leq q, \quad j = 1, \dots, n, \quad |\xi| \leq 1, \quad (16)$$

где $0 < q < 1$.

Так как $\gamma(\delta(z)) \equiv z$, то

$$\beta_{k_j} = \gamma \circ \delta \circ \beta_{k_j}. \quad (17)$$

Подставляя β_{k_j} из (17) в (14) получим $z_j = \gamma(\xi_j)$, где $\xi_j = (\omega_{k_1} \circ \omega_{k_2} \circ \dots \circ \omega_{k_j})(\xi_0)$.

Так как $\omega_j(0) = 0$ ($j = 1, \dots, n$) и $\gamma(0) = 0$, то согласно принципу максимума модуля [2] при $|\xi| \leq 1$ имеем

$$\left| \frac{\omega_j(\xi)}{\xi} \right| \leq \max_{|t|=1} \frac{|\omega_j(t)|}{|t|}, \quad \left| \frac{\gamma(\xi)}{\xi} \right| \leq \max_{|t|=1} \frac{|\gamma(t)|}{|t|}. \quad (18)$$

Ясно, что

$$\max_{|t|=1} |\gamma(t)| = \max_{z \in \Gamma} |z| = q_0. \quad (19)$$

Из (16), (18) и (19) получим

$$|\omega_j(\xi)| \leq q |\xi|, \quad |\gamma(\xi)| \leq q_0 |\xi|. \quad (20)$$

Следовательно, используя $z_j = \gamma(\xi_j)$, получим оценки $|z_j| \leq q_0 q^j$, $|d_j| \leq q_0 q^j$.
Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Если $\beta_1(z), \dots, \beta_n(z)$ удовлетворяют условиям (2), (3), то имеет место условие (4), где q как и в неравенстве (16).

Доказательство : Из (20) следует, что

$$\left| \frac{\omega_j(\xi)}{\xi} \right| \leq q \quad \text{при} \quad |\xi| \leq 1, \quad j = 1, \dots, n. \quad (21)$$

Переходя к пределу в (21) при $\xi \rightarrow 0$, получим

$$|\omega'_j(0)| \leq q. \quad (22)$$

Из (15) и (22) имеем $\omega'_j(0) = \delta(0) \beta'_j(0) \gamma'(0) = \beta'_j(0)$, $|\beta'_j(0)| < 1$. Доказательство завершено.

Пусть $c^k = (c_{k0}, c_{k1}, \dots, c_{k,m-1})$, ($k = 1, \dots, \mu$) – система линейно независимых векторов ($\mu \leq m$), и пусть

$$\psi_k(z) = \sum_{j=0}^{m-1} c_{kj} z^j + z^m \Phi_k(z), \quad k = 1, \dots, \mu,$$

где $\Phi_k(z)$ – аналитические функции в D . Напомним, что $0 \in D$.

Лемма 3. Функции $\psi_1(z), \dots, \psi_\mu(z)$ линейно независимы в области D .

Доказательство : очевидно.

§2. ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ (1)

Доказательство Теоремы 1 : Пусть имеет место неравенство (5). Положим

$$\|\varphi\| = \max_{z \in \bar{D}} |\varphi(z)|, \quad \rho_k = \max_{z \in D_k} \sum_{j=1}^n |a_j(z)|, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где D_k , ($k = 0, 1, \dots$) – замкнутые множества, построенные в §1. Из (7) следует, что

$$\max_{z \in D_j} |K(f)| \leq \rho_j \max_{z \in D_{j+1}} |f(z)|, \quad j = 0, 1, \dots$$

Следовательно

$$\max_{z \in \bar{D}} |K^j(f)| \leq \rho_0 \max_{z \in D_1} |K^{j-1}(f)| \leq \dots \leq \rho_0 \cdot \rho_1 \cdot \dots \cdot \rho_j \cdot \|f\|. \quad (23)$$

Из Леммы 1 и неравенства (5) получим

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \rho_j = \sum_{k=1}^n |\alpha_k(0)| < 1. \quad (24)$$

Следовательно, ряд (6) сходится равномерно в $\bar{D}$ и (6) является решением уравнения (1).

Теперь рассмотрим однородное уравнение (1), т.е. $\varphi(z) = K(\varphi)$. Тогда

$$\varphi(z) = K^j(\varphi). \quad (25)$$

Из (23) и (25) следует, что

$$\|\varphi\| \leq \rho_0 \cdot \rho_1 \cdot \dots \cdot \rho_j \cdot \|\varphi\|. \quad (26)$$

Переходя к пределу при $j \rightarrow \infty$ и используя (24), получим $\varphi(z) \equiv 0$. Доказательство завершено.

Доказательство Теоремы 2 : Пусть выполнено условие (8). Мы ищем решение уравнения (1) в виде

$$\varphi(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_{m-1} z^{m-1} + z^m \psi(z), \quad (27)$$

где $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}$ – постоянные. $\psi(z)$ аналитична в D и непрерывна в $\bar{D}$, а m удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^n |\alpha_k(0)| |\beta'_k(0)|^m < 1. \quad (28)$$

Согласно Лемме 2 условие (28) выполняется для достаточно больших m . Подставляя $\varphi(z)$ из (27) в (1), получим

$$z^m \psi(z) - \sum_{k=1}^n \alpha_k(z) \beta_k^m(z) \psi(\beta_k(z)) = \omega(z), \quad (29)$$

где

$$\omega(z) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(z) (c_0 + c_1 \beta_k(z) + \dots + c_{m-1} \beta_k^{m-1}(z)) - c_0 - c_1 z - \dots - c_{m-1} z^{m-1} + f(z). \quad (30)$$

Так как в левой части (29) порядок точки $z = 0$ не меньше m , то имеем

$$\omega^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, \dots, m-1. \quad (31)$$

Полагая

$$\Phi_\nu(z) = - \sum_{k=1}^n \alpha_k(z) \beta_k^\nu(z), \quad d_{j\nu} = \Phi_\nu^{(j)}(0)$$

и подставляя $\omega(z)$ из (30) в (31), получим

$$\left(1 - \sum_{k=1}^n \alpha_k(0)\right) c_0 = f(0), \quad (32)$$

$$\left(1 - \sum_{k=1}^n \alpha_k(0) [\beta_k'(0)]^j\right) c_j + \sum_{\nu=1}^{j-1} d_{j\nu} c_\nu = \frac{1}{j!} f^{(j)}(0), \quad j = 1, \dots, m-1. \quad (33)$$

Из (8) заключаем, что система (32), (33) относительно постоянных $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}$ имеет единственное решение, т.е. правую часть (29) можно считать известной.

Разделив обе части уравнения (29) на z^m , получим

$$\psi(z) = \sum_{k=1}^n \alpha_{km}(z) \psi(\beta_k(z)) + f_m(z), \quad (34)$$

где $\alpha_{km}(z) = \alpha_k(z) \frac{\beta_k^m(z)}{z^m}$, $f_m(z) = \frac{\omega(z)}{z^m}$.

Так как $\beta_k(z)$ ($k = 1, \dots, n$) и $\omega(z)$ удовлетворяет условиям (3) и (31), то функции $\alpha_k(z)$ и $f_m(z)$ аналитичны в D и непрерывны в $\bar{D}$, причем

$$\alpha_{km}(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \alpha_{km}(z) = \alpha_k(0) (\beta_k'(0))^m. \quad (35)$$

Из (28) и (35) следует, что $\sum_{k=1}^n |\alpha_{km}(0)| < 1$.

Следовательно, (34) удовлетворяет всем условиям Теоремы 1. Поэтому уравнение (34) имеет единственное решение и оно определяется рядом Неймана.

Таким образом, условие (8) обеспечивает существование и единственность решения уравнения (1). Теорема 2 доказана.

Доказательство Теоремы 3 : Пусть условие (8) нарушается для неотрицательных целых индексов $j = j_1, \dots, j_\nu$, ($j_1 < j_2 < \dots < j_\nu$), т.е.

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k(0) (\beta'_k(0))^j = 1, \quad j = j_1, \dots, j_\nu, \quad (36)$$

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k(0) (\beta'_k(0))^j \neq 1, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad j \neq j_1, \dots, j_\nu, \quad (37)$$

В представлении (27) берем $m = j_\nu + 1$. Из (37) следует, что

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k(0) (\beta'_k(0))^j \neq 1, \quad j = m, m+1, \dots \quad (38)$$

Пусть A – основная (треугольная) матрица системы (32), (33) при $m = j_\nu + 1$ и пусть r – ранг матрицы A . Согласно условиям (36), (37) имеем

$$r = m - 1 \quad \text{при} \quad \nu = 1, \quad (39)$$

$$m - \nu \leq r \leq m - 1 \quad \text{при} \quad \nu \geq 2. \quad (40)$$

Однородная система алгебраических уравнений (32), (33) при $f^{(j)}(0) = 0$, $j = 0, \dots, m-1$ имеет ровно $m - r$ линейно независимых решений. Для разрешимости неоднородной системы (32), (33) необходимо и достаточно, чтобы функция $f(z)$ удовлетворяла $m - r$ линейно независимым условиям вида

$$\sum_{j=0}^{m-1} b_{kj} f^{(j)}(0) = 0, \quad k = 1, \dots, m - r, \quad (41)$$

где b_{kj} – постоянные, не зависящие от $f(z)$.

Пусть выполнены условия (41). Тогда, подставляя частное решение системы (32), (33) в (29) получим уравнение вида (34). Из (35) и (38) следует, что уравнение (34) удовлетворяет всем условиям Теоремы 2. Следовательно, оно имеет единственное решение. Подставляя постоянные $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}$ и функцию $\psi(z)$ в представление (27), получим частное решение уравнения (1). Таким образом, условия (41) являются необходимыми и достаточными для разрешимости неоднородного уравнения (1).

Подставляя общее решение однородной системы (32), (33) в (29), построим решение однородного уравнения (1) в виде

$$\varphi(z) = d_1 \varphi_1(z) + d_2 \varphi_2(z) + \dots + d_\mu \varphi_\mu(z), \quad \mu = m - r,$$

где $d_1, \dots, d_\mu$ – постоянные, а функции $\varphi_1(z), \dots, \varphi_\mu(z)$ удовлетворяют всем условиям Леммы 3. Следовательно, они линейно независимы и уравнение (1) имеет $\mu = m - r$ линейно независимых решений. Это означает, что уравнение (1) фредгольмово. Из (39), (40) и $\mu = m - r$ следуют соотношения (9). Теорема 3 доказана.

В ходе доказательства Теоремы 3 мы доказали следующие два утверждения :

- 1) условия разрешимости уравнения (1) и системы (32), (33) совпадают ;
- 2) числа линейно независимых решений однородного уравнения (1) и однородной системы (32), (33) совпадают.

Из Теорем 2 и 3 вытекает следующее следствие.

Следствие 1. Пусть в уравнения (1) имеем $n = 1$. Если выполнено условие (8), то уравнение (1) имеет единственное решение. Если же условие (8) нарушается для некоторого $j \geq 0$, то однородная уравнение (1) имеет только одно линейно независимое решение.

§3. НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Пусть D – односвязная ограниченная область с достаточно гладкой границей Γ и $O \in D$. В области D рассмотрим следующую задачу : найти функцию $u(z)$, удовлетворяющую условиям

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad z = x + iy \in D. \quad (42)$$

$$u(z) = \sum_{k=1}^n a_k u(\beta_k(z)) + g(z), \quad z \in \Gamma, \quad (43)$$

где a_k – вещественные постоянные, $g(z)$ – вещественная функция, $\beta_k(z)$ – аналитическая функция в D .

Предположим, что $g(z)$ удовлетворяет условию Гельдера на Γ , а $\beta_k(z)$ и $u(z)$ удовлетворяют этому условию в $\bar{D}$, причем $\beta_k(z) \in D$ при $z \in \bar{D}$, $\beta_k(0) = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Теорема 4. Для однозначной разрешимости задачи (42), (43) условие

$$\sum_{k=1}^n a_k (\beta'_k(0))^j \neq 1, \quad j = 0, 1, \dots \quad (44)$$

является необходимым и достаточным.

Доказательство : Представим решение уравнения (42) в виде (см. [2]) :

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \psi(z), \quad (45)$$

где $\psi(z)$ аналитична в D , непрерывна в $\bar{D}$ и удовлетворяет дополнительному условию

$$\operatorname{Im} \psi(0) = 0. \quad (46)$$

Подставляя $u(x, y)$ из (45) в (43), получим

$$\operatorname{Re} \Phi(z) = g(z), \quad z \in \Gamma, \quad (47)$$

где

$$\Phi(z) = \psi(z) - \sum_{k=1}^n a_k \psi(\beta_k(z)). \quad (48)$$

Функция $\Phi(z)$ аналитична в D и непрерывна в $\bar{D}$. Из граничного условия (47) она определяется с точностью до мнимой постоянной [2] :

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + i c_0, \quad (49)$$

где $\Phi_0(z)$ — частное решение задачи (47), а c_0 — вещественная постоянная.

Подставляя $\Phi(z)$ из (49) в (48), получим

$$\psi(z) = \sum_{k=1}^n a_k \psi(\beta_k(z)) + \Phi_0(z) + i c_0. \quad (50)$$

Из (46) следует, что $\psi(z)$ можно представить в виде

$$\psi(z) = c + z \varphi(z), \quad (51)$$

где c — вещественная постоянная, а $\varphi(z)$ аналитична в D и непрерывна в $\bar{D}$.

Подставляя $\psi(z)$ из (51) в (50), получим

$$c + z \varphi(z) = \sum_{k=1}^n a_k c + \sum_{k=1}^n a_k \beta_k(z) \varphi(\beta_k(z)) + \Phi_0(z) + i c_0, \quad (52)$$

и подставляя $z = 0$, имеем

$$c \left(1 - \sum_{k=1}^n a_k \right) = \Phi_0(0) + i c_0. \quad (53)$$

Так как c и c_0 вещественны, то равенство (53) можно записать в виде

$$c \left(1 - \sum_{k=1}^n a_k \right) = \operatorname{Re} \Phi_0(0), \quad c_0 = -\operatorname{Im} \Phi(0). \quad (54)$$

Учитывая (53), уравнение (52) запишем в виде

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{z} \beta_k(z) \varphi(\beta_k(z)) + f(z), \quad (55)$$

где

$$f(z) = \frac{\Phi_0(z) - \Phi_0(0)}{z}.$$

Подставляя $\psi(z)$ из (51) в (45), получим

$$u(x, y) = c + \operatorname{Re}(z \varphi(z)), \quad (56)$$

где c и $\varphi(z)$ – решения уравнений (54) и (55), соответственно. Следовательно, решение задачи (42), (43) сводится к решению уравнения (55), которое исследовано в §1.

Ясно, что условием однозначной разрешимости задачи (54) является $\sum_{k=1}^n a_k \neq 1$, т.е. (44) при $j = 0$, а условием однозначной разрешимости задачи (55) является (44) при $j = 1, 2, \dots$. Теорема 4 доказана.

Рассмотрим теперь число линейно независимых решений однородной задачи (42), (43) (поле вещественных чисел) и однородного уравнения (55) (поле комплексных чисел).

Если $g(z) \equiv 0$, то уравнения (54) и (55) принимают вид

$$A_0 c = 0, \quad (57)$$

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^n a_k \frac{\beta_k(z)}{z} \varphi(\beta_k(z)), \quad (58)$$

где $A_0 = \sum_{k=1}^n a_k$.

Пусть $A_0 \neq 0$. Из (56), (57) следует, что $c = 0$ и

$$u(x, y) = \operatorname{Re}(z \varphi(z)), \quad (59)$$

где $\varphi(z)$ – решение уравнения (58). Пусть $\varphi_1(z), \dots, \varphi_\mu(z)$ – линейно независимые решения уравнения (58). Тогда общее решение уравнения (58) записывается в виде

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\mu} (c_k + i d_k) \varphi_k(z), \quad (60)$$

где c_k и d_k – вещественные постоянные. Подставляя $\varphi(z)$ из (60) в (59) находим, что функции $\operatorname{Re}(z \varphi_k(z))$ и $\operatorname{Re}(i z \varphi_k(z))$, $k = 1, \dots, \mu$ образуют полную систему линейно независимых решений однородной задачи (42), (43). При $A_0 = 1$ аналогичная система образуется функциями 1 , $\operatorname{Re}(z \varphi_k(z))$ и $\operatorname{Re}(i z \varphi_k(z))$, $k = 1, \dots, \mu$. Мы пришли к следующему утверждению.

Теорема 5. Число k линейно независимых решений однородной задачи (42), (43) определяется формулой

$$k = \begin{cases} 2\mu & \text{при } A_0 \neq 1, \\ 2\mu + 1 & \text{при } A_0 = 1, \end{cases}$$

где μ – число линейно независимых решений уравнения (58).

Итак, если $A_0 \neq 1$, то задача (42), (43) имеет решение тогда и только тогда, когда уравнение (55) имеет решение. Если же $A_0 = 1$, то дополнительно предполагаем, что $\operatorname{Re} \Phi_0(0) = 0$.

Используя Теоремы 4, 5 и Следствие 1, получим

Следствие 2. Если в (43) имеем $n = 1$ и $a_1 = 1$, то однородная задача (42), (43) имеет только одно линейно независимое решение. Если же $a_1 \neq 1$ и условие (44) нарушается для некоторого натурального числа j , то (42), (43) имеет два линейно независимых решения. В остальных случаях однородная задача (42), (43) имеет только нулевое решение.

ABSTRACT. The paper studies functional equations with shifts in a class of analytic functions and derives necessary and sufficient conditions for their solvability. The results are applied in the study of nonlocal boundary value problems for Laplace equation.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. E. Tovmasyan, Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications in Electrodynamics. World Scientific, Singapore, 1994.
2. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. Методы Теории Функций Комплексного Переменного, Наука, Москва, 1973.

22 июля 1999

Армянский государственный
инженерный университет