ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н. Е. Товмасян, В. С. Закарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 1, 2000

В статье изучается задача о нахождении нулей аналитической функции и решаются некоторые трансцендентные уравнения методом последовательных приближений. Получены формулы, представляющие корни с помощью контурных интегралов.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть D – m-связная ограниченная область с границей $\Gamma = \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_m$, где $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ – замкнутые контуры Ляпунова. Предполагаем, что область, ограниченная контуром Γ_1, содержит $m-1$ дыр, границами которых являются контуры $\Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$. Пусть функция $a(z)$ аналитична в области D, непрерывно дифференцируема в замкнутой области $\overline{D} = D \cup \Gamma$ и удовлетворяет условию

$$a(z) \neq 0, \quad z \in \Gamma. \tag{0.1}$$

Из этого условия следует, что $a(z)$ имеет конечное число нулей в области D. Известно (см. [1]), что число n = сумме кратностей нулей функции $a(z)$ в области D определяется формулой

$$n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{a'(z)}{a(z)}\, dz. \tag{0.2}$$

Как показано в [2], задача нахождения нулей функции $a(z)$ сведена к решению алгебраических уравнений n-ого порядка.

Цель данной работы – описание алгоритма, дающего нули функции $a(z)$ в области D с заданной точностью и решение некоторых трансцендентальных уравнений методом последовательных приближений.

§1. НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Пусть область D и функция $a(z)$ – как и во введении. Пусть $z_1, \dots, z_n$ – нули функции $a(z)$ в области D. Положим

$$\rho(z) = \min_{\zeta \in \Gamma} |z - \zeta|, \quad z \in D, \tag{1.1}$$

$$a_0 = \min_{z \in \Gamma} |a(z)|, \quad b_0 = \max_{z \in \Gamma} |a'(z)|. \tag{1.2}$$

Из условия (0.1) следует, что $a_0 > 0$.

Лемма 1.1. Имеет место следуюшая оценка :

$$\rho(z_k) \geq \frac{a_0}{b_0}, \quad k = 1, \dots, n. \tag{1.3}$$

Доказательство : Так как Γ – замкнутое множество, то $|z - z_k|$ достигает минимума на контуре Γ, т.е. существует точка $\zeta_k \in \Gamma$ такая, что $|\zeta_k - z_k| = \rho(z_k)$. Отрезок, соединяющий точки z_k и ζ_k находится в замкнутой области $\overline{D} = D \cup \Gamma$. Поэтому

$$a_0 \leq |a(\zeta_k)| = |a(\zeta_k) - a(z_k)| = \left| \int_{\zeta_k}^{z_k} a'(\tau)\, d\tau \right| \leq b_0 |z_k - \zeta_k| = b_0 \rho(z_k).$$

Лемма 1.1 доказана.

Обозначим через $\rho_0(z)$ расстояние от точки z до множества нулей $a(z)$, т.е.

$$\rho_0(z) = \min_{j=1,\dots,n} |z - z_j|.$$

Пусть d – диаметр замкнутой области $\overline{D}$.

Лемма 1.2. Функция $\rho_0(z)$ удовлетворяет оценке

$$\rho_0(z) \leq \frac{d |a(z)|^{1/n}}{a_0^{1/n}}, \quad z \in D. \tag{1.4}$$

Доказательство : Функция

$$\beta(z) = \frac{1}{a(z)} (z - z_1) \cdots (z - z_n) \tag{1.5}$$

аналитична в области D и непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$. Следовательно (см. [1])

$$|\beta(z)| \leq \max_{t \in \Gamma} |\beta(t)|, \quad z \in \overline{D}.$$

Из (1.2) и (1.5) имеем

$$\max_{z\in\overline{D}}|\beta(z)| \le \frac{d^n}{a_0}.$$

Следовательно

$$|\beta(z)| \le \frac{d^n}{a_0}, \quad z\in\overline{D}. \tag{1.6}$$

В силу (1.5), (1.6)

$$|a(z)| \ge \frac{\rho_0^n(z)a_0}{d^n}. \tag{1.7}$$

Из (1.7) получим (1.4). Лемма 1.2 доказана.

Пусть кольцо

$$r_0-\varepsilon_0 < |z-z_0| < r_0+\varepsilon_0, \quad 0<\varepsilon_0\le r_0, \tag{1.8}$$

определенное по z_0, r_0, ε_0, принадлежит области D.

Лемма 1.3. Предположим, что $a(z)\neq 0$ в кольце (1.8). Тогда для каждой точки z, удовлетворяющей $|z-z_0|=r_0$, имеем

$$|a(z)| \ge \frac{\varepsilon_0^n a_0}{d^n}. \tag{1.9}$$

Доказательство : Если $|z-z_0|=r_0$, то $\rho_0(z)\ge\varepsilon_0$. Отсюда и из (1.7) следует (1.9). Лемма 1.3 доказана.

Пусть окружность $|z-z_0|=r_0$ с центром z_0 принадлежит замкнутой области $\overline{D}$. Рассмотрим на этой окружности m точек

$$\zeta_k = z_0 + r_0\exp\left(i\frac{2\pi k}{m}\right), \quad k=0,1,...,m-1. \tag{1.10}$$

Лемма 1.4. Если

$$m\ge 2\pi b_0 r_0 c_0^{-1}, \qquad \min_{k=0,1,\dots,m-1}\left(|a(\zeta_k)|\right)\ge c_0, \tag{1.11}$$

где c_0 – некоторая положительная постоянная, то на окружности $|z-z_0|=r_0$ имеет место оценка

$$|a(z)|\ge\frac{c_0}{2}. \tag{1.12}$$

Доказательство : Пусть имеют место неравенства (1.11), и пусть τ – точка окружности $|z-z_0|=r_0$. На этой окружности существует точка ζ_m как в (1.10) такая, что длина дуги между точками τ и ζ_m меньше, чем $\pi r_0 m^{-1}$. Следовательно,

$$|a(\zeta_m)-a(\tau)| = \left|\int_\tau^{\zeta_m} a'(z)\,dz\right| \le b_0\frac{\pi r_0}{m}\le\frac{c_0}{2}, \tag{1.13}$$

где интегрирование ведется по дуге. Ясно, что

$$|a(\zeta_m)| \leq |a(\tau)| + |a(\zeta_m) - a(\tau)|. \tag{1.14}$$

Из (1.11), (1.13) и (1.14) получим

$$c_0 \leq |a(\zeta_m)| \leq |a(\tau)| + \frac{c_0}{2},$$

что равносильно неравенству (1.12). Лемма 1.4 доказана.

Для заданного $0 < \varepsilon \leq a_0/(4b_0)$, где a_0 и b_0 определяются согласно (1.2), разделим замкнутую область $\overline{D}$ на p замкнутых подобластей $\sigma_1, ..., \sigma_p$, диаметры которых меньше или равны ε. Пусть j $(1 \leq j \leq p)$ – натуральное число такое, что

$$|a(\tau_j)| = \min_{k=1,...,p} |a(\tau_k)|, \tag{1.15}$$

где $\tau_k \in \sigma_k$, $k = 1, ..., p$.

Лемма 1.5. Если $n \geq 1$ и $k_0 = d(b_0/a_0)^{1/n}$, то

$$\rho_0(\tau_j) \leq k_0\varepsilon^{1/n}. \tag{1.16}$$

Доказательство : Пусть z_1 является нулем функции $a(z)$ некоторой подобласти σ_k. Согласно Лемме 1.1. $\rho(z_1)$ удовлетворяет неравенству (1.3). Поэтому круг $|z - z_1| < \frac{a_0}{b_0}$ принадлежит области D. Так как $\varepsilon \leq a_0/(4b_0)$, то интервал с концами z_1 и τ_k принадлежит диску $|z - z_1| < \frac{a_0}{b_0}$. Следовательно

$$|a(\tau_k)| = |a(\tau_k) - a(z_1)| = \left| \int_{z_1}^{\tau_k} a'(z)\, dz \right| \leq b_0|\tau_k - z_1| \leq b_0\varepsilon. \tag{1.17}$$

Из (1.15) и (1.17) имеем $|a(\tau_j)| \leq b_0\varepsilon$. Из (1.4) при $z = t_j$ получим (1.16). Лемма 1.5 доказана.

Лемма 1.5 показывает, что точка τ_j будет приближенным значением одного из нулей функции $a(z)$ с точностью $k_0\varepsilon^{1/n}$. Следовательно, если $a(z)$ имеет только один нуль в области D, то τ_j аппроксимирует этот нуль.

Лемма 1.6. Для $a(\tau_j)$ имеет место оценка : либо $|a(\tau_j)| \leq \frac{1}{4}a_0$, либо $|a(\tau_j)| \geq \frac{3}{4}a_0$.

Доказательство : Если функция $a(z)$ имеет нуль z_0 внутри области D и $z_0 \in \sigma_k$, то

$$|a(\tau_k)| = |a(\tau_k) - a(z_0)| \leq b_0|\tau_k - z_0| \leq b_0\varepsilon \leq \frac{1}{4}a_0,$$

и согласно (1.15) получим $|a(\tau_j)| \leq a_0/4$. Если $a(z)$ не имеет нулей внутри D, то $|a(z)|$ достигает минимума на границе Г. Следовательно, $|a(\tau_j)| \geq a_0$, и поэтому $|a(\tau_j)| \geq \frac{3}{4}a_0$. Лемма 1.6 доказана.

Лемма 1.7. Если $|a(\tau_j)| \leq \frac{1}{4}a_0$, то функция $a(z)$ имеет хотя бы один нуль в области D. Если же $|a(\tau_j)| \geq \frac{3}{4}a_0$, то функция $a(z)$ не имеет нулей в D.

Доказательство : Пусть $|a(\tau_j)| \leq \frac{1}{4}a_0$. Тогда $a(z)$ имеет нуль внутри области D, т.к. в противном случае $|a(\tau_j)| \geq a_0$ (см. доказательство Леммы 1.6). Пусть теперь $|a(\tau_j)| \geq \frac{3}{4}a_0$. Тогда функция $a(z)$ не имеет нулей внутри области D, т.к. в противном случае $|a(\tau_j)| \leq a_0/4$ (см. доказательство Леммы 1.6). Этим доказывается Лемма 1.7.

Лемма 1.8. Если $|z| \leq \mu < 1$ и $|z_0| \leq \mu < 1$, то

$$\frac{|z - z_0|}{|1 - \overline{z}_0 z|} \leq \frac{2\mu}{1 + \mu^2}.$$

Доказательство : следует из обобщенной Леммы Шварца (см. [4]]).

§2. НАХОЖДЕНИЕ НУЛЕЙ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В этом параграфе область D и аналитическая функция $a(z)$ те же, что и выше. Наша цель - найти нули $a(z)$ с заданной точностью : для заданного $\delta > 0$ нужно найти точки $t_1, ..., t_n$ (необязательно различные), принадлежащие D и удовлетворяющие $|t_j - z_j| \leq \delta$, где $z_1, ..., z_n$ - нули функции $a(z)$ в области D.

Для любого числа $0 < \delta \leq a_0/(2b_0)$, согласно Лемме 1.5 можно выбрать точку t_1 такую, что

$$\rho_0(t_1) \leq \frac{\delta}{n+1}. \tag{2.1}$$

По определению функций $\rho(z)$ и $\rho_0(z)$ (см. §1), имеем

$$\rho(t_1) = |t_1 - \zeta_0|, \quad \rho_0(t_1) = |t_1 - z_j|, \tag{2.2}$$

где $z_j \in D$ - некоторый нуль функции $a(z)$, а ζ_0 - некоторая точка на Г. Из (2.2) имеем

$$\rho(t_1) = |(t_1 - z_j) + (z_j - \zeta_0)| \geq |z_j - \zeta_0| - |t_1 - z_j|. \tag{2.3}$$

Из (1.1) имеем $\rho(z_j) \leq |z_j - \zeta_0|$. Из (2.2) и (2.3) следует, что $\rho(t_1) \geq \rho(z_j) - \rho_0(t_1)$. Из неравенств (1.3) и (2.1) вытекает

$$\rho(t_1) \geq \frac{a_0}{2b_0}. \tag{2.4}$$

Неравенство (2.4) означает, что круг $|z - t_1| \leq \dfrac{a_0}{2b_0}$ принадлежит области D. Из (2.1) следует, что в замкнутом круге

$$|z - t_1| \leq \delta_0 = \frac{\delta}{n+1} \tag{2.5}$$

существует хотя бы один нуль функции $a(z)$. Обозначим через G_k кольцо

$$k\delta_0 < |z - t_1| < (k+1)\delta_0, \quad k = 1, ..., n.$$

Из неравенств (2.4) и $\delta \le a_0/(2b_0)$ следует, что замкнутый круг (2.5) и кольца $G_1, ..., G_n$ принадлежат области D. Так как функция $a(z)$ имеет n нулей в D, то существует хотя бы одно кольцо G_m, $1 \le m \le n$, где $a(z)$ не имеет нулей. По Лемме 1.3 на окружности

$$\Gamma_m = \left\{ z : |z - t_1| = \left(m + \frac{1}{2}\right)\delta_0 \right\} \tag{2.6}$$

функция $a(z)$ удовлетворяет неравенству

$$|a(z)| \ge \frac{a_0\delta_0^n}{2^n d^n}. \tag{2.7}$$

Отметим, что в (2.6) точное значение натурального числа m не известно, но мы знаем, что оно существует и удовлетворяет $1 \le m \le n$.

Исходя из этого укажем алгоритм нахождения всех нулей аналитической функции $a(z)$ с заданной точностью. Пусть N – натуральное число такое, что

$$N \ge \frac{2\pi b_0 \delta}{c_0}, \quad c_0 = \frac{a_0\delta_0^n}{2^{n+1}d^n}.$$

На окружности Γ_j, $1 \le j \le n$ рассмотрим точки

$$\zeta_{jk} = t_1 + \left(j + \frac{1}{2}\right)\delta_0 \exp\left(i\frac{2\pi}{N}k\right), \quad k = 0, 1, ..., N.$$

Положим

$$c_j = \min_{k=1,...,N} |a(\zeta_{jk})|, \quad j = 1, ..., n.$$

Пусть m, $1 \le m \le n$ – натуральное число, для которого $a(z) \ne 0$, когда $z \in G_m$. Из неравенства (2.7) следует, что

$$c_m \ge \frac{a_0\delta_0^n}{2^{n+1}d^n}. \tag{2.8}$$

Пусть m_0 – наибольший индекс, для которого имеет место (2.8). По Лемме 1.4 на окружности Γ_{m_0} имеет место оценка

$$|a(z)| \ge \frac{c_0}{2}. \tag{2.9}$$

Так как на Γ_{m_0} функция $a(z)$ не имеет нулей, то число n_1 нулей функции $a(z)$ в круге

$$K_{m_0} = \left\{ z : |z - t_1| < \left(m_0 + \frac{1}{2} \right) \delta_0 \right\} \tag{2.10}$$

определяется формулой (см. [1])

$$n_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{m_0}} \frac{a'(z)}{a(z)} \, dz. \tag{2.11}$$

Так как в замкнутом круге $|z - t_1| \leq \delta_0$ функция $a(z)$ имеет хотя бы один нуль, то $n_1 \geq 1$.

Нули $z_1, ..., z_{n_1}$ функции $a(z)$ внутри круга K_{m_0} аппроксимируем точкой t_1. Ясно, что

$$|z_k - t_1| \leq \left(m_0 + \frac{1}{2} \right) \delta_0 < \delta, \quad k = 1, ..., n_1.$$

Обозначим

$$G = D \setminus (K_{m_0} \cup \Gamma_{m_0}), \quad L = \partial G = \Gamma \cup \Gamma_{m_0}.$$

Согласно (1.2) и (2.9), имеем

$$\min_{z \in L} |a(z)| \geq \min \left(a_0, \frac{c}{2} \right) > 0.$$

Аналогично находятся некоторые нули функции $a(z)$ в области G с заданной точностью δ. Продолжая этот процесс, через конечное число шагов $p \leq n$ можно найти все нули функции $a(z)$ с заданной точностью δ.

В качестве примера рассмотрим следующее уравнение :

$$z^2 = \sum_{k=0}^{m} a_k z^k, \quad |z| < 1, \quad \sum_{k=0}^{m} |a_k| < 1. \tag{2.12}$$

Из (2.12) имеем

$$|z^2| > \left| \sum_{k=0}^{m} a_k z^k \right|, \quad |z| = 1,$$

$$\min_{|z|=1} \left| z^2 - \sum_{k=0}^{m} a_k z^k \right| \geq 1 - \sum_{k=0}^{m} |a_k|.$$

Отсюда следует, что уравнение (2.12) имеет два корня.

В случае, когда уравнение (2.12) имеет хотя бы два корня, их можно найти, не используя контурные интегралы.

Пусть δ – заданное число. Вышеприведенные рассуждения показывают, что уравнение (2.12) имеет хотя бы один корень в круге

$$|z - \zeta_j| < \delta_1, \quad \delta_1 \leq \delta, \quad \delta_1 + |\zeta_j| < 1,$$

а в круге $|z-\zeta_j| = \delta_1$ имеем неравенство

$$\left|z^2 - \sum_{k=0}^{m} a_k z^k\right| \geq c_0,$$

где $c_0 > 0$ можно точно вычислить.

Пусть G – двусвязная область, ограниченная окружностями $|z-\zeta_j| = \delta_1$ и $|z| = 1$. Ясно, что в G уравнение (2.12) имеет не более одного решения. Предположим, что уравнение (2.12) не имеет решения в G, тогда оба решения этого уравнения принадлежат кругу $|z-\zeta_j| < \delta_1$, и точка ζ_j – требуемое приближение.

Предположим теперь, что уравнение (2.12) имеет решение в области G. Ясно, что их число равно 1. Тогда ζ_j – приближенное решение в круге $|z-\zeta_j| < \delta_1$. Приближенное решение в области G можно найти методом, описанным в Лемме 1.5.

§3. РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

1. Пусть D - единичный круг $|z| < 1$ с границей Γ. Рассмотрим уравнение вида

$$z = \varphi(z), \quad z \in D, \tag{3.1}$$

где функция $\varphi(z)$ аналитична в области D, непрерывна в замкнутой области $\overline{D} = D \cup \Gamma$ и удовлетворяет условию

$$|\varphi(z)| \leq \mu < 1, \quad z \in \overline{D}. \tag{3.2}$$

Согласно Теореме Руше уравнение (3.1) имеет одно решение в D. В случае, когда

$$|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| \leq q|z_1 - z_2|, \quad z_1, z_2 \in \overline{D}, \quad 0 < q < 1, \tag{3.3}$$

где q – постоянная, уравнение (3.1) можно решать методом последовательных приближений (см. [3]).

Заметим, что аналитичность функции $\varphi(z)$ и условие (3.2) не всегда обеспечивают выполнение условия (3.3). Например, для аналитической в единичном круге функции $\varphi(z) = \frac{1}{2}z^n + \frac{1}{4}$, $n \geq 2$ имеет место (3.2), а (3.3) не выполняется.

В этом параграфе показываем, что если $\varphi(z)$ аналитична в D и имеет место (3.2), то уравнение (3.1) можно решать методом последовательных приближений.

Рассмотрим последовательность точек $\zeta_n = \varphi(\zeta_{n-1})$, которая начинается с $\zeta_0 = 0$. Пусть z_0 – точное решение уравнения (3.1).

Теорема 3.1. **Последовательность ζ_k сходится к z_0, причем**

$$|\zeta_k - z_0| \le 2\nu^k, \quad \nu = \frac{2\mu}{1+\mu^2}, \quad k = 1, 2, \dots \tag{3.4}$$

Доказательство : Рассмотрим взаимно обратные функции

$$\alpha_0(t) = \frac{t + z_0}{1 + \bar{z}_0 t}, \quad \beta_0(z) = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}, \tag{3.5}$$

которые конформно отображают единичный круг на себя. В частности,

$$\beta_0(\alpha_0(t)) \equiv t, \quad \alpha_0(\beta_0(t)) \equiv t, \quad |\alpha_0(z)| \le 1, \quad |\beta_0(z)| \le 1, \quad |z| \le 1.$$

Так как z_0 есть решение уравнения (3.1), то можем записать

$$z_0 = \varphi(z_0), \quad |z_0| \le \mu. \tag{3.6}$$

Функция

$$\psi_1(t) = \beta_0(\varphi(\alpha_0(t))) \tag{3.7}$$

аналитична в круге D и непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$. Из (3.5) и (3.7) следует, что $\psi_1(0) = 0$ и $\alpha_0(-z_0) = 0$. Положим

$$\psi_n(t) = \psi_1(\psi_{n-1}(t)), \quad n = 2, 3, \dots \tag{3.8}$$

Последовательность ζ_n можно получить следующим образом :

$$\zeta_0 = \alpha_0(-z_0), \quad \zeta_n = \alpha_0(\psi_n(-z_0)), \quad n = 1, 2, \dots$$

Из условия (3.2) следует

$$|\varphi(\alpha_0(t))| \le \mu, \quad |t| \le 1. \tag{3.9}$$

Используя Лемму 1.8 при $z = \varphi(\alpha_0(t))$ и неравенства (3.6) и (3.9), получим

$$\left| \frac{\varphi(\alpha_0(t)) - z_0}{1 - \bar{z}_0 \varphi(\alpha_0(t))} \right| \le \frac{2\mu}{1+\mu^2}, \quad |t| \le 1.$$

Это неравенство можно записать в виде

$$|\beta_0(\varphi(\alpha_0(t)))| \le \frac{2\mu}{1+\mu^2}, \quad |t| \le 1.$$

Следовательно

$$|\psi_1(t)| \le \nu, \quad |t| \le 1, \tag{3.10}$$

где ν определяется формулой (3.4). Применяя теорему Шварца к функции $\psi_1(z)$, из (3.7) и (3.10) имеем

$$|\psi_1(t)| \leq \nu |t|, \quad |t| \leq 1.$$

Из (3.8) получим

$$|\psi_n(t)| \leq \nu^n, \quad |t| \leq 1. \tag{3.11}$$

Следовательно, $|\psi_n(-z_0)| \leq \nu^n$., и из (3.5) имеем

$$\zeta_n = \alpha_0(\psi_n(-z_0)) = \frac{\psi_n(-z_0) + z_0}{1 + \overline{z}_0 \psi_n(-z_0)}. \tag{3.12}$$

Так как $0 < \mu < 1$, то $0 < \nu < 1$. Из (3.11) и (3.12) следует, что $\zeta_n \to z_0$ при $n \to \infty$. Из (3.12) имеем

$$|\zeta_n - z_0| = \frac{|\psi_n(-z_0)|(1 - |z_0|^2)}{|1 + \overline{z}_0 \psi_n(-z_0)|}. \tag{3.13}$$

Из (3.6), (3.11) и (3.13) вытекает (3.4). Теорема 3.1 доказана.

2. В круге $|z| < 1$ рассмотрим уравнение

$$z = \overline{\varphi(z)}, \quad z \in D, \tag{3.14}$$

где $\varphi(z)$ аналитична в D, непрерывна в замкнутом круге $\overline{D}$ и удовлетворяет условию (3.2). Здесь и ниже $\overline{\varphi(z)}$ означает функцию, комплексно сопряженную к $\varphi(z)$.

Согласно теорема Боля–Брауэра, функция $\overline{\varphi(z)}$ имеет хотя бы одну неподвижную точку z_0 в $\overline{D}$ (см. [4]), т.е. $z_0 = \overline{\varphi(z_0)}$. Из (3.2) и (3.14) имеем $|z_0| = |\varphi(z_0)| \leq \mu$. Следовательно, неподвижная точка z_0 принадлежит кругу D. Рассмотрим функцию

$$\omega_1(t) = \beta_0\left(\overline{\varphi(\alpha_0(t))}\right),$$

где α_0 и β_0 определяются формулой (3.5). Функция $\overline{\omega_1(t)}$ аналитична в D и удовлетворяет

$$\overline{\omega_1(0)} = 0, \quad \left|\overline{\omega_1(t)}\right| \leq \nu, \quad |t| \leq 1,$$

где ν определяется формулой (3.4). Согласно Лемме Шварца получим

$$|\omega_1(t)| = \left|\overline{\omega_1(t)}\right| \leq \nu |t|, \quad |t| \leq 1. \tag{3.15}$$

Положим

$$\omega_n(t) = \omega_1(\omega_{n-1}(t)), \quad n = 2, 3, \ldots$$

Из (3.15) получим (ср. (3.11)) $|\omega_n(t)| \le \nu^n$. Определим последовательность точек τ_n следующим образом :

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_n = \overline{\varphi(\tau_{n-1})}, \quad n \ge 1.$$

Последовательность τ_n можно записать в виде

$$\tau_0 = \alpha_0(-z_0), \quad \tau_n = \alpha_0(\omega_n(-z_0)), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Из следующей теоремы вытекает, что уравнение (3.14) имеет единственное решение в круге $|z| < 1$.

Теорема 3.2. Последовательность τ_k сходится к z_0, причем $|\tau_k - z_0| \le 2\nu^k$.
Доказательство : аналогично доказательству Теоремы 3.1.

3. Рассмотрим теперь уравнения вида

$$z = \varphi(z, \overline{z}), \quad |z| \le 1, \tag{3.16}$$

где функция $\varphi(z, \tau)$ аналитична по комплексным переменным z и τ в круге D, непрерывна в замкнутом круге $\overline{D}$ и для некоторой постоянной μ

$$|\varphi(z, \tau)| \le \mu < 1, \quad z, \tau \in \overline{D}. \tag{3.17}$$

Уравнение (3.16) можно записать как систему уравнений по комплексным переменным z и τ :

$$z = \varphi(z, \tau), \tag{3.18}$$

$$\tau = \overline{z}, \quad |z| < 1. \tag{3.19}$$

Согласно (3.17) и теореме Руше, при любом τ, $|\tau| \le 1$ уравнение (3.18) имеет единственное решение

$$z = \psi(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{t(1 - \varphi'_t(t, \tau))}{t - \varphi(t, \tau)}\, dt. \tag{3.20}$$

Функция $\psi(\tau)$ аналитична по комплексной переменной τ в круге $|\tau| \le 1$. Так как $z = \psi(\tau)$ является решением уравнения (3.18), то

$$\psi(\tau) = \varphi(\psi(\tau), \tau), \quad |\tau| \le 1.$$

Из (3.17) получим

$$|\psi(\tau)| = |\varphi(\psi(\tau), \tau)| \leq \mu.$$

Таким образом, уравнение (3.18) можно заменить уравнением (3.20). Подставляя z из (3.20) в (3.19), получим

$$\tau = \overline{\psi(\tau)}, \quad |\tau| < 1. \tag{3.21}$$

С другой стороны, уравнение (3.19) можно записать в виде $z = \overline{\tau}$. Таким образом, $z = \overline{\tau}$ является решением уравнения (3.16), где τ – решение уравнения (3.21). Согласно Теореме 3.2, уравнение (3.21) имеет единственное решение. Поэтому уравнение (3.16) также имеет единственное решение z_0.
Применяя Теорему 3.2 к уравнению (3.21), получим следующую теорему.

Теорема 3.3. Последовательность

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_n = \overline{\psi(\tau_{n-1})}, \quad n \geq 1$$

сходится к z_0, причем $|\overline{\tau}_k - z_0| \leq 2\nu^k$, где ν определяется формулой (3.4).

Замечание 1. Утверждения Теорем 3.1 – 3.3 остаются в силе, если в качестве нулевого решения берем любую точку единичного круга.

4. Пусть теперь D – общая односвязная ограниченная область в комплексной плоскости с гладкой границей Γ. Пусть функция $\varphi(z)$ аналитична в D, непрерывна в $\overline{D} = D \cup \Gamma$ и удовлетворяет условию

$$\varphi(z) \in D_0, \qquad z \in \overline{D}, \tag{3.22}$$

где D_0 – некоторая замкнутая подобласть области D. Не умаляя общности предположим, что $0 \in D$. В области D рассмотрим уравнение

$$z = \varphi(z), \quad z \in D. \tag{3.23}$$

Положим

$$\zeta_0 = 0, \quad \zeta_n = \varphi(\zeta_{n-1}), \quad n \geq 1. \tag{3.24}$$

Теорема 3.4. Уравнение (3.23) имеет единственное решение z_0, последовательность ζ_k сходится к z_0, и имеет место следующая оценка :

$$|\zeta_k - z_0| \leq \gamma\nu^k, \quad k = 1, 2, ..., \tag{3.25}$$

где γ и ν – некоторые положительные числа, $0 < \nu < 1$.

Доказательство : Пусть функция $t = \beta_0(z)$ конформно отображает область D на единичный круг и пусть $\alpha_0(t)$ – функция, обратная к функции $\beta_0(t)$. Ясно, что функция $z = \alpha_0(t)$ конформно отображает единичный круг на область D и

$$\beta_0(\alpha_0(t)) \equiv t, \quad |t| \leq 1. \tag{3.26}$$

Положим

$$\mu = \max_{z \in D_0} |\beta_0(z)|, \quad \nu = \frac{2\mu}{1+\mu^2}. \tag{3.27}$$

Так как $D_0 \subset D$, то имеем $0 < \mu < 1$, $0 < \nu < 1$. Подставляя $z = \alpha_0(t)$ в (3.23), получим $\alpha_0(t) = \varphi(\alpha_0(t))$. Вычисляя β_0, получим

$$t = \varphi_0(t) = \beta_0(\varphi(\alpha_0(t))), \quad |t| < 1. \tag{3.28}$$

Из (3.22) и (3.27) имеем $|\varphi_0(t)| \leq \mu$. Таким образом, решение уравнения (3.23) определяется формулой $z = \alpha_0(t)$, где t – решение уравнения (3.28). Так как уравнение (3.28) имеет единственное решение (Теорема 3.1), то уравнение (3.23) также имеет единственное решение.

Докажем теперь, что последовательность ζ_k сходится к z_0 при $k \to \infty$ и имеет место (3.25), где ν определяется формулой (3.27). Так как $z = \alpha_0(t)$ конформно отображает единичный круг на область D и $0 \in D$, то существует точка τ_0, $|\tau_0| < 1$ такая, что $\alpha_0(\tau_0) = 0$. Определим последовательность точек $\tau_n = \varphi_0(\tau_{n-1})$, $n \geq 1$. Пусть t_0 – решение уравнения (3.28). Согласно Теореме 3.1 и Замечанию 1, имеем $\tau_n \to t_0$ и

$$|\tau_n - t_0| \leq 2\nu^n, \quad n \geq 1. \tag{3.29}$$

В силу (3.26) последовательность ζ_n, определенную формулой (3.24), можно записать в виде

$$\zeta_n = \alpha_0(\tau_n), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3.30}$$

Так как $\tau_n \to t_0$ при $n \to \infty$, то имеем $\zeta_n \to \alpha(t_0)$. В силу $z = \alpha_0(t)$ заключаем, что $z_0 = \alpha_0(t_0)$ является решением уравнения (3.23). Следовательно, $\zeta_n \to z_0$ при $n \to \infty$. Этим доказывается второе утверждение.

Для доказательства (3.25) заметим, что из (3.30) и $z_0 = \alpha(t_0)$ следует

$$|\zeta_n - z_0| = |\alpha_0(\tau_n) - \alpha_0(t_0)|. \tag{3.31}$$

Из неравенства $|\varphi_0(t)| \leq \mu$ имеем $|t_0| \leq \mu$, $|\tau_n| \leq \mu$, $n \geq 1$. Следовательно

$$|\alpha_0(\tau_n) - \alpha_0(t_0)| \leq \max_{|t|\leq\mu} |\alpha_0'(t)| \cdot |\tau_n - t_0|. \tag{3.32}$$

По теореме Коши (см. [1])

$$\alpha_0(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{\alpha_0(\tau)}{\tau - t}\, d\tau, \quad \alpha_0'(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{\alpha_0(\tau)}{(\tau - t)^2}\, d\tau. \tag{3.33}$$

Так как функция $z = \alpha_0(t)$ конформно отображает единичный круг на область D и $0 \in D$, то имеем $|\alpha_0(t)| \leq d_0$, где d_0 – диаметр области $\overline{D}$. Из (3.33) получим

$$\max_{|t|\leq\mu} |\alpha_0'(t)| \leq \frac{d_0}{(1-\mu)^2}. \tag{3.34}$$

Из (3.29), (3.31), (3.32) и (3.34) получим (3.25). Этим завершается доказательство Теоремы 3.4.

Замечание. Пусть функция $\Psi(z, \tau)$ аналитична по комплексным переменным z и τ при $|z| < 1$, $|\tau| < 1$, непрерывна при $|z| \leq 1$, $|\tau| \leq 1$ и удовлетворяет условию $\Psi(0, 0) = 0$. По лемме Шварца [5]

$$|\Psi(z, \overline{z})| \leq ||\Psi|| \cdot |z|, \quad ||\Psi|| = \max_{|z|\leq 1, |\tau|\leq 1} |\Psi(z, \tau)|. \tag{3.35}$$

Используя неравенство (3.35) можно показать, что уравнение (3.16) можно решать методом последовательных приближений $\zeta_k = \varphi(\zeta_{k-1}, \overline{\zeta}_{k-1})$, $k \geq 1$, начиная с произвольной точки $z_0 \in D$. Таким образом, утверждение Теоремы 3.4 остается справедливым для уравнения (3.16).

ABSTRACT. The paper studies the problem of determination of zeros of an analytic function and solves some transcendental equations by the method of successive approximations. Formulae presenting the roots as contour integrals are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы Теории Функций Комплексного Переменного, Наука, Москва, 1973.
2. Н. Е. Товмасян, Т. М. Кошелева, "Об одном методе нахождения нулей аналитических функций", Сибирский Мат. журнал, том 36, № 5, стр. 1146 - 1156, 1995.
3. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, Элементы Функционального Анализа, Гостехиздат, Москва, 1951.
4. И. Г. Петровский, Лекции по Теории Обыкновенных Дифференциальных Уравнений, Наука, Москва, 1970.
5. А. О. Бабаян, "Об одном функциональном уравнении", Годичная научная конф. Армянского государственного инженерного университета, стр. 5 - 6, 1988.

24 сентября 1999

Армянский государственный инженерный университет