НЕКОТОРЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В КЛАССЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Н. Е. Товмасян, В. С. Закарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 1, 2000

В статье изучаются несколько функциональных уравнений с особенностями и выводятся необходимые и достаточные условия для их разрешимости в классе аналитических функций. Получены формулы для решений в терминах сходящихся рядов. Результаты применяются для эффективного решения некоторых нелокальных краевых задач для уравнения Лапласа.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть D^+ – односвязная ограниченная область в комплексной плоскости с достаточно гладкой границей Γ, и пусть D^- – дополнение замкнутой области $\overline{D^+} = D^+ \cup \Gamma$ до полной комплексной плоскости. В области D^+ рассмотрим "сингулярное" функциональное уравнение

$$z^n \varphi(z) - \alpha(z)\,\overline{\varphi(\overline{\beta(z)})} = f(z), \quad z \in D^+, \tag{0.1}$$

где $z = x + iy$, n – натуральное число, называемое порядком особенности, $\alpha(z)$, $\beta(z)$ и $f(z)$ – аналитические функции в D^+. Наша задача – найти функцию $\varphi(z)$, аналитическую в D^+. Черта над комплексным числом (или комплекснозначной функцией) означает комплексное сопряжение. Предположим, что $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $f(z)$ и $\varphi(z)$ удовлетворяют условию Гельдера в замкнутой области $\overline{D^+}$ и

$$\overline{\beta(z)} \in D^+ \quad \text{при} \quad z \in \overline{D^+}, \tag{0.2}$$

$$\beta(0) = 0, \quad \alpha(0) \neq 0.$$

Уравнение (0.1) при $f \equiv 0$ называется однородным.

Будем говорить, что функция $\psi_j(z)$ исчезает на бесконечности, если $\psi_j(z) \to 0$ при $|z| \to \infty$. Если неоговорено противное, линейная зависимость или независимость понимается в поле вещественных чисел. В статье доказывается следующая теорема.

Теорема 0.1. Если $\beta'(0) \neq 0$, то однородное уравнение (0.1) имеет только нулевое решение. Необходимым и достаточным условием для разрешимости неоднородного уравнения (0.1) является условие

$$\mathrm{Re}\left(\int_\Gamma f(z)\,\psi_j(z)\,dz\right) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 2n. \tag{0.3}$$

где $\psi_1(z), \ldots, \psi_{2n}(z)$ – некоторые линейно независимые функции, аналитические в D^-, исчезающие на бесконечности. Эти функции зависят от натурального числа n и от функций $\alpha(z)$, $\beta(z)$, но не зависят от $f(z)$.

Статья состоит из четырех параграфов. В §1 доказывается Теорема 0.1. В §2 указывается метод решения уравнения (0.1). В §3 рассматривается уравнение (0.1) в случае $n \geq 1$ и $\beta'(0) = 0$. В §4 результаты применяются к нелокальным краевым задачам для уравнения Лапласа.

§1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ (0.1)

В этом параграфе полагаем, что $n \geq 1$, $\beta'(0) \neq 0$, $\alpha(0) \neq 0$. Сначала докажем, что однородное уравнение

$$z^n\,\varphi(z) - \alpha(z)\,\overline{\varphi(\overline{\beta(z)})} = 0 \tag{1.1}$$

имеет только нулевое решение. Пусть $\varphi(z)$ – решение уравнения (1.1). Подставляя $z = 0$ в (1.1), получим $\alpha(0)\,\overline{\varphi(0)} = 0$. Поэтому $\varphi(0) = 0$. Дифференцируя обе части уравнения (1.1) по z и используя $\varphi(z) = 0$, получим $\varphi'(0) = 0$. Аналогично получим, что $\varphi^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, \ldots$. Следовательно, $\varphi(z) \equiv 0$. Рассмотрим краевую задачу Гильберта (задача сопряжения, [1]) :

$$z^n\,\varphi(z) - \alpha(z)\,\overline{\varphi(\overline{\beta(z)})} = \omega(z) + g(z), \quad z \in \Gamma, \tag{1.2}$$

где $\varphi(z)$ и $\omega(z)$ – искомые функции, аналитические в D^+ и D^-, соответственно, а $g(z)$ – заданная функция на контуре Γ. Предположим, что $\varphi(z)$ и $\omega(z)$ непрерывны в замкнутых областях $\overline{D^+}$ и $\overline{D^-}$ соответственно, $\omega(z)$ исчезает на бесконечности, а $g(z)$ удовлетворяет условию Гельдера на Γ.

Прежде чем использовать несколько результатов из [1], докажем, что однородная задача (1.2) (при $g(z) \equiv 0$) имеет только нулевое решение. Пусть $(\varphi(z), \omega(z))$ – решение однородной задачи (1.2). Из (1.2) при $g(z) \equiv 0$ следует, что функция $\omega(z)$ является аналитическим продолжением аналитической функции $z^n\,\varphi(z) - \alpha(z)\,\overline{\varphi(\overline{\beta(z)})}$ через контур Γ на всю комплексную плоскость. Так как функция $\omega(z)$ исчезает на бесконечности, то по теореме Лиувилля (см. [2]) имеем, что $\omega(z) = 0$, $z \in D^-$, а решением уравнения

$$z^n\,\varphi(z) - \alpha(z)\,\overline{\varphi(\overline{\beta(z)})} = 0, \quad z \in D^+$$

является только $\varphi(z) \equiv 0$. Следовательно, однородная задача (1.2) имеет только нулевое решение. Индекс задачи (1.2) равен $(-2n)$ (см. [1]). Так как однородная задача (1.2) имеет только нулевое решение, то (см. [1]) для разрешимости однородной задачи (1.2) необходимо и достаточно выполнение $2n$ условий вида

$$\operatorname{Re}\int\limits_{\Gamma} g(z)\,\omega_j(z)\,dz = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 2n, \tag{1.3}$$

где $\omega_1(z), \dots, \omega_{2n}(z)$ – некоторые линейно независимые функции на Γ, независящие от $g(z)$.

В (1.3) возьмем $g(z) = c\,\omega_0(z)$, где c – комплексная постоянная, а $\omega_0(z)$ – аналитическая функция в D^-, непрерывная в замкнутой области $\overline{D^-}$ и исчезающая на бесконечности. Ясно, что для такой функции $g(z)$ задача (1.2) имеет решение $\varphi(z) = 0$, $\omega(z) = -c\,\omega_0(z)$. Следовательно, функция $g(z) = c\,\omega_0(z)$ удовлетворяет условиям (1.3). Подставляя $g(z) = \omega_0(z)$ и $g(z) = i\,\omega_0(z)$ в (1.3), получим

$$\int\limits_{\Gamma} \omega_0(z)\,\omega_j(z)\,dz = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 2n. \tag{1.4}$$

Из (1.4) следует, что $\omega_j(z)$ является граничным значением аналитической в D^- функции, исчезающей на бесконечности (см. [1]).

Докажем теперь, что условия (1.3) при $g(z) = f(z)$ являются необходимыми и достаточными для разрешимости уравнения (0.1). Пусть $\varphi(z)$ – решение уравнения (0.1). Тогда задача (1.2) при $g(z) = f(z)$ имеет решение $(\varphi(z), 0)$. Следовательно, функция $g(z) = f(z)$ удовлетворяет условиям (1.3). И обратно, пусть функция $g(z) = f(z)$ удовлетворяет условиям (1.3). Тогда задача (1.2) имеет решение $(\varphi(z), \omega(z))$. Из (1.2) при $g(z) = f(z)$ следует, что $\omega(z)$ – аналитическое где

$$K(\Phi_0) = \alpha(z)\, z^{-n} \left[\overline{\Phi_0(\overline{\beta(z)})} - \sum_{k=m-n}^{m-1} \frac{\overline{\Phi_0^{(k)}(0)}}{k!} \beta^k(z) \right], \qquad F_1(z) = z^{-n} F_0(z). \tag{2.17}$$

Из (2.15) следует, что $F_1^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, ..., m-n-1$. Если $\Phi_0(z)$ удовлетворяет условиям (2.10), то $K(\Phi_0)$ также удовлетворяет этим условиям. Мы ищем решение уравнения (2.16) в классе аналитических в области D^+ функций, непрерывных в замкнутой области $\overline{D^+}$ и удовлетворяющих условиям (2.10). Норму функции $\Phi_0(z)$ в этом классе определим формулой

$$\|\Phi_0(z)\| = \max_{z \in \overline{D^+}} |\Phi_0(z)|.$$

Тогда этот класс будет банаховым пространством, которое обозначим через B_{m-n}. Оператор K, определяемый формулой (2.17), является ограниченным оператором, отображающим B_{m-n} в B_{m-n}.

Таким образом, решение уравнения (0.1) определяется формулой (2.12), где $\Phi_0(z)$ – решение уравнения (2.16), удовлетворяющее условиям (2.11), а постоянные $c_1, ..., c_{m-1}$ определяются формулой (2.8).

2. Сначала предположим, что область D^+ является кругом $|z| \le R$. Покажем, что если число m достаточно большое, то уравнение (2.16) имеет единственное решение и его можно найти методом последовательных приближений.

Для оценивания нормы оператора K положим

$$W(z) = \Phi_0(z) - \sum_{k=m-n}^{m-1} \frac{\overline{\Phi_0^{(k)}(0)}}{k!} z^k, \tag{2.18}$$

где $\Phi_0(z) \in B_{m-n}$. Ясно, что $W^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, ..., m-1$. Согласно принципу максимума модуля (см. [2])

$$|W(z)\, z^{-m}| \le \max_{|t|=R} |W(t)|\, R^{-m}, \quad z \le R. \tag{2.19}$$

Применяя неравенство Коши, получим

$$\left| \frac{\Phi_0^{(k)}(0)}{k!} \right| \le \frac{\|\Phi_0\|}{R^k}. \tag{2.20}$$

Из (2.18) и (2.20) имеем

$$\|W\| \le (n+1)\, \|\Phi_0\|. \tag{2.21}$$

Из (2.19) и (2.21) следует, что $|W(z)| \leq (n+1)\, R^{-m}\, \|\Phi_0\|\, |z^m|$, $|z| \leq R$ и

$$|W(\overline{\beta(z)})| \leq (n+1)\, R^{-m}\, \|\Phi_0\|\, |\beta(z)|^m, \quad |z| \leq R. \tag{2.22}$$

Из условия (0.2) вытекает $|\beta(z)| \leq R_0 \leq R$. Так как $\beta(0) = 0$, то

$$\left|\frac{\beta(z)}{z}\right| \leq \max_{|z|=R} \left|\frac{\beta(z)}{z}\right| \leq \frac{R_0}{R}.$$

Следовательно

$$|\beta(z)| \leq \mu\, |z|, \tag{2.23}$$

где $\mu = \dfrac{R_0}{R} < 1$. Из (2.22) и (2.23) имеем

$$|z^{-n}\, \overline{W(\overline{\beta(z)})}| \leq (n+1)\, R^{-m}\, \|\Phi_0\|\, \mu^m\, |z|^{m-n}, \quad |z| \leq R. \tag{2.24}$$

Так как $|z| \leq R$, то в силу (2.24) можем записать

$$\left|z^{-n}\, \overline{W(\overline{\beta(z)})}\right| \leq (n+1)\, R^{-n}\, \|\Phi_0\|\, \mu^m. \tag{2.25}$$

В силу (2.18) оператор K запишем в виде

$$K(\Phi_0) = \alpha(z)\, z^{-n}\, \overline{W(\overline{\beta(z)})}. \tag{2.26}$$

Из (2.25) и (2.26) следует, что $|K(\Phi_0)| \leq \|\alpha\|\, (n+1)\, R^{-n}\, \|\Phi_0\|\, \mu^m$.

Так как $0 < \mu < 1$, то для достаточно больших натуральных значений m имеем

$$\|\alpha\|\, (n+1)\, R^{-n}\, \mu^m < 1, \tag{2.27}$$

т.е. норма оператора K в соответствующем пространстве B_{m-n} меньше 1. Следовательно, в этом пространстве уравнение (2.16) имеет единственное решение, задаваемое рядом Неймана (см. [3])

$$\Phi_0(z) = F_1(z) + K(F_1) + K^2(F_1) + \dots, \tag{2.28}$$

где K^j – действие оператора K j раз.

Ряд (2.28) сходится равномерно в замкнутом круге $|z| \leq R$ и

$$|K^j(F_1)| \leq \frac{q_m^j\, \|F_1\|}{1 - q_m}, \quad |z| \leq R,$$

где q_m – левая часть неравенства (2.27). Условие (2.11) можно записать в виде

$$\operatorname{Re}\left(c_k - \frac{\Phi_0^{(k)}(0)}{k!}\right) = 0, \quad k = m-n, \dots, m-1, \tag{2.29}$$

$$\operatorname{Im}\left(c_k - \frac{\Phi_0^{(k)}(0)}{k!}\right) = 0, \quad k = m-n, \ldots, m-1. \tag{2.30}$$

Подставляя c_j и $\Phi_0(z)$ из (2.8) и (2.28) в (2.29) и (2.30), получим

$$L_j(f) = 0, \quad j = 1, \ldots, 2n, \tag{2.31}$$

где $L_j(f)$ - линейные ограниченные функционалы, определенные на B_{m-n}. Следовательно, условия (2.31) являются необходимыми и достаточными для разрешимости уравнения (0.1). Пусть функция $f(z)$ удовлетворяет условиям (2.31). Тогда решение уравнения (0.1) определяется формулой (2.12), где постоянные $c_1, \ldots, c_{m-1}$ и функция $\Phi_0(z)$ определяются формулами (2.8) и (2.28), соответственно. Из Теоремы 0.1 следует, что функционалы $L_1, \ldots, L_{2n}$ линейно независимы и условие (2.31) можно записать в виде (0.3).

3. Теперь рассмотрим уравнение (0.1) в произвольной односвязной области D^+. Пусть $\beta(z)$ - аналитическая функция, входящая в уравнение (0.1) и D_k ($k = 0, 1, \ldots$) - последовательность замкнутых областей, где $D_0 = \overline{D^+}$, а D_n - образ области D_{n-1} при отображении $\xi = \overline{\beta(z)}$ ($n = 0, 1, \ldots$). Ясно, что $D_{k+1} \in D_k \in \overline{D^+}$ ($k = 1, 2, \ldots$).

Лемма 2.1. Последовательность $d_n = \max_{z \in D_n} |z|$ монотонно сходится к нулю при $n \to +\infty$.

Лемма 2.2. Имеет место оценка $|\beta'(0)| < 1$.

В случае, когда область D является кругом $|z| < R$, Леммы 2.1 и 2.2 непосредственно следуют из (2.23). Общий случай можно свести к этому при помощи конформного отображения области D на круг $|z| < R$.

Теперь решим уравнение (0.1) в области D^+. Согласно Лемме 2.2, область D^+ содержит круг $|z| < R$ такой, что $|\beta(z)| \leq q\,|z|$, $|z| \leq R$, где $0 < q < 1$ - постоянная. Поэтому условия (2.31) необходимы для разрешимости уравнения (0.1) в области D^+. Предположим, что условия (2.31) выполняются и пусть $\varphi_0(z)$ - решение уравнения (0.1) в круге $|z| < R$, т.е.

$$\varphi_0(z) = z^{-n}\left(f(z) + \alpha(z)\,\overline{\varphi_0(\overline{\beta(z)})}\right), \quad |z| < R. \tag{2.32}$$

При $z = 0$ правая часть равенства (2.32) понимается как предел этого выражения при $z \to 0$. При $0 < |z| < R$, из (2.32) следует, что этот предел равен $\varphi_0(0)$.

Следовательно, правая часть (2.32) аналитична в круге $|z| < R$ и непрерывна в замкнутом круге $|z| \leq R$.

Определим последовательность функций $\varphi_k(z)$ рекуррентным соотношением

$$\varphi_k(z) = z^{-n}\left(f(z) + \alpha(z)\,\overline{\varphi_{k-1}(\overline{\beta(z)})}\right), \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{2.33}$$

Из (2.32) и (2.33) имеем

$$\varphi_k(z) = \varphi_0(z), \quad |z| < R, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{2.34}$$

По Лемме 2.1 существует натуральное число ν такое, что область D_ν принадлежит кругу $|z| < R$. Поэтому неравенства (2.32) и (2.34) имеют место в области D_ν.

Так как $\varphi_0(z)$ аналитична в D_ν, то из соотношений (2.33) и (2.34) следует, что функция $\varphi_1(z)$ аналитична в области $D_{\nu-1}$. Аналогично, при $k = 2$ из этих соотношений следует, что $\varphi_2(z)$ аналитична в $D_{\nu-2}$, и т.д.. Наконец получим, что $\varphi_\nu(z)$ аналитична в D^+.

Теперь покажем, что $\varphi_\nu(z)$ удовлетворяет уравнению (0.1), т.е.

$$z^{-n}\,\varphi_\nu(z) - \alpha(z)\,\overline{\varphi_\nu(\overline{\beta(z)})} = f(z), \quad z \in D^+. \tag{2.35}$$

Обе части равенства (2.35) аналитичны в D^+. Так как $\varphi_\nu(z) = \varphi_0(z)$ при $z \in D_\nu$ и $\varphi_0(z)$ удовлетворяет (0.1) в области D_ν, то заключаем, что (2.35) справедливо сперва в D_ν, а потом в D^+.

Из (0.2) следует, что $\overline{\varphi_\nu(\overline{\beta(z)})}$ аналитична в замкнутой области $\overline{D^+}$. Поэтому из (2.35) следует, что функция $\varphi_\nu(z)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{D^+}$ и на контуре Γ удовлетворяет условию Гельдера. Следовательно, условие (2.31) является необходимым и достаточным для разрешимости уравнения (0.1) в области $\overline{D^+}$ и функция $\varphi_\nu(z)$ является решением (0.1).

§3. ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ УРАВНЕНИЯ (0.1)

Пусть $n \geq 1$, $\alpha(0) \neq 0$ и

$$\beta^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, \nu - 1; \quad \beta^{(\nu)}(0) \neq 0, \tag{3.1}$$

где $\nu \geq 2$ – натуральное число.

1. Сначала рассмотрим однородное уравнение (1.1). Положим

$$q = \frac{n}{\nu - 1}, \quad p = \alpha(0)\left[\frac{\beta^{(\nu)}(0)}{\nu!}\right]^q. \tag{3.2}$$

Теорема 3.1. Если q – натуральное число и $|p| = 1$, то однородное уравнение (1.1) имеет единственное линейно независимое решение. В остальных случаях это уравнение имеет только нулевое решение.

Доказательство : Пусть уравнение (1.1) имеет нетривиальное решение. Тогда это решение можно представить в виде

$$\varphi(z) = z^m \varphi_0(z), \tag{3.3}$$

где m - натуральное число, $\varphi_0(z)$ аналитична в D^+, непрерывна в замкнутой области $\overline{D^+}$ и $\varphi_0(0) \neq 0$. Из условия (3.1) следует

$$\beta(z) = z^\nu \beta_0(z), \quad \beta_0(0) = \frac{\beta^{(\nu)}(0)}{\nu!}, \tag{3.4}$$

где $\beta_0(z)$ аналитична в D^+ и непрерывна в замкнутой области $\overline{D^+}$.

Подставляя $\varphi(z)$ из (3.3) в (1.1) и учитывая (3.4), получим

$$z^{n+m} \varphi_0(z) = z^{m\,\nu} \alpha_0(z) \overline{\varphi_0(\overline{\beta(z)})} = 0, \quad z \in D^+, \tag{3.5}$$

где

$$\alpha_0(z) = \alpha(z) \beta_0^m(z). \tag{3.6}$$

Так как $\varphi_0(0) \neq 0$ и $\alpha_0(0) \neq 0$, то точка $z = 0$ является $(n+m)$-кратным нулем левой части (3.5) и $m\,\nu$-кратным нулем правой части (3.5). Следовательно, $m + n = m\,\nu$. Отсюда следует, что

$$q \equiv \frac{n}{\nu - 1} = m. \tag{3.7}$$

Следовательно, q есть натуральное число.

Разделив обе части (3.5) на z^{n+m} и учитывая (3.7), получим

$$\varphi_0(z) = \alpha_0(z) \overline{\varphi_0(\overline{\beta(z)})}, \quad z \in D^+. \tag{3.8}$$

Подставляя $z = 0$ в (3.8), получим

$$\varphi_0(0) = \alpha_0(0) \overline{\varphi_0(0)} \quad \text{или} \quad \overline{\varphi_0(0)} = \overline{\alpha_0(0)} \varphi_0(0). \tag{3.9}$$

Из (3.9) имеем

$$\varphi_0(0)(1 - |\alpha_0(0)|^2) = 0. \tag{3.10}$$

Так как $\varphi_0(0) \neq 0$, то из (3.10) получим

$$|\alpha_0(0)| = 1. \tag{3.112}$$

Из (3.4), (3.6) и (3.11) имеем $|p| = 1$. Таким образом, для того, чтобы уравнение (1.1) имело нетривиальное решение, необходимо, чтобы q было натуральным числом и $|p| = 1$. Предположим, что эти условия выполняются. Тогда

$$\alpha_0(0) = p = e^{i\theta}, \tag{3.12}$$

где θ – аргумент числа p.

Умножая обе части (3.9) на $e^{-i\theta}$ и учитывая (3.12), получим

$$\varphi_0(0)\, e^{-i\theta/2} = e^{i\theta/2}\, \overline{\varphi_0(0)}. \tag{3.13}$$

Следовательно, $\varphi_0(0)\, e^{-i\theta/2} = c_0$, где c_0 – некоторая вещественная постоянная. Таким образом, функцию $\varphi_0(z)$ можно представить в виде

$$\varphi_0(z) = \varphi_0(0) + z\,\psi_0(z) = c_0\, e^{i\theta/2} + z\,\psi_0(z), \tag{3.14}$$

где $\psi_0(z)$ аналитична в D^+ и непрерывна в замкнутой области $\overline{D^+}$. Подставляя $\varphi_0(z)$ из (3.14) в (3.8), получим

$$\psi_0(z) = b(z)\, \overline{\psi_0(\overline{\beta(z)})} + c_0\, g(z), \tag{3.15}$$

где

$$b(z) = \frac{\alpha_0(z)\,\beta(z)}{z}, \quad g(z) = \frac{\alpha_0(z)\, e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}}{z}.$$

Из (3.1) и (3.12) следует, что функции $b(z)$ и $g(z)$ аналитичны в D^+, непрерывны в $\overline{D^+}$ и $b(0) = 0$. Определим оператор K так : $K(g) \equiv b(z)\, \overline{g(\overline{\beta(z)})}$. По Леммам 2.1 и 2.2, при любой вещественной постоянной c_0 уравнение (3.15) имеет единственное решение, определяемое рядом Неймана :

$$\psi_0(z) = c_0\,(g + K(g) + K^2(g) + \ldots). \tag{3.16}$$

Ряд в (3.16) абсолютно сходится в $\overline{D^+}$. Следовательно, общее решение уравнения (1.1) определяется формулами (3.3), (3.14) и (3.16), где c_0 – произвольная вещественная постоянная. Из этих формул следует, что уравнение (1.1) имеет единственное линейно независимое решение. Теорема 3.1 доказана.

2. Теперь рассмотрим неоднородное уравнение (0.1) при $\beta'(0) = 0$. Решение уравнения (0.1) представим в виде

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{m-1} (c_k + i\,d_k)\, z^k + z^m\, \psi(z), \tag{3.17}$$

где c_j и d_j ($j = 0, 1, \ldots, m-1$) – вещественные постоянные, $\psi(z)$ аналитична в D^+ и непрерывна в замкнутой области $\overline{D^+}$, а m – натуральное число, удовлетворяющее условию

$$m > q, \tag{3.18}$$

где q определяется формулой (3.2).

Неравенство (3.18) можно записать в виде

$$m + n < m\nu. \tag{3.19}$$

Подставляя $\varphi(z)$ из (3.19) в (0.1), получим

$$z^{n+m}\,\psi(z) - \alpha(z)\,\beta^m(z)\,\overline{\psi(\overline{\beta(z)})} = F(z), \tag{3.20}$$

где

$$F(z) = f(z) - z^n \sum_{k=0}^{m-1}(c_k + i\,d_k)\,z^k + \alpha(z)\sum_{k=0}^{m-1}(c_k - i\,d_k)\,\beta^k(z). \tag{3.21}$$

Из (3.1) и (1.1) следует, что все производные левой части (3.20) до порядка $m + n - 1$ в точке $z = 0$ равны нулю. Следовательно, условие

$$F^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, m + n - 1 \tag{3.22}$$

необходимо для разрешимости уравнения (3.20).

Условие (3.22) можно записать в виде

$$\mathrm{Re}F^{(j)}(0) = 0, \quad \mathrm{Im}F^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, m + n - 1. \tag{3.23}$$

Подставляя $F(z)$ из (3.21) в (3.23), получим систему алгебраических уравнений

$$A\,\alpha = b, \tag{3.24}$$

где $\alpha = (c_0, \ldots, c_{m-1}, d_0, \ldots, d_{m-1})$ – $2m$–мерный вектор-столбец, b – $2(m+n)$–мерный вектор-столбец с элементами $\mathrm{Re}f^{(k)}(0)$, $\mathrm{Im}f^{(k)}(0)$, ($k = 0, 1, \ldots, m+n-1$), а A вполне определенная вещественная матрица размерности $2(m+n) \times 2m$. Элементы матрицы A не зависят от функции $f(z)$. Наряду с уравнением (3.24) рассмотрим однородное уравнение

$$B\,\beta = 0, \tag{3.25}$$

где B – транспонированная к матрице A, а β – искомый вещественный $2(m+n)$-мерный вектор-столбец.

Обозначим через r ранг матрицы A. Однородное уравнение (3.24) (для $b = 0$) имеет $2(m+n) - r$ линейно независимых решения и (см. [4]) необходимым и достаточным условием разрешимости неоднородного уравнения (3.24) является следующее условие :

$$(b, \beta^k) = 0, \quad k = 1, ..., 2(m+n) - r, \tag{3.26}$$

где β^k $(k = 1, ..., 2(m+n) - r)$ – линейно независимые решения уравнения (3.25), а (b, β^k) является скалярным произведением векторов b и β^k.

Следовательно, условия (3.26) необходимы для разрешимости уравнения (0.1). Предположим, что эти условия выполнены и $\alpha = (c_0, ..., c_{m-1}, d_0, ..., d_{m-1})$ является частным решением уравнения (3.24). Подставляя это решение в (3.17) находим, что $F(z)$ удовлетворяет условию (3.22). Следовательно, функция $F(z)\, z^{-n-m}$ – аналитическая в D^+ и непрерывная в замкнутой области $\overline{D^+}$. Обе части уравнения (3.20) разделив на z^{n+m} получим

$$\psi(z) = \alpha_0(z)\, \overline{\psi(\overline{\beta(z)})} + F_0(z), \tag{3.27}$$

где $\alpha_0(z) = \alpha(z)\beta^m(z)\, z^{-n-m}$, $F_0(z) = F(z)\, z^{-n-m}$. Из условий (3.1) и (3.19) получаем $\alpha_0(0) = 0$. Определим оператор K_0 по формуле $K_0(\psi) = \alpha_0(z)\, \overline{\psi(\overline{\beta(z)})}$. Как и (3.15), уравнение (3.27) имеет единственное решение, определяемое рядом Неймана

$$\psi(z) = F_0(z) + K_0(F_0) + K_0^2(F_0) + ... \tag{3.28}$$

Подставляя $\psi(z)$ из (3.28) в (3.17) получим частное решение уравнения (0.1). Таким образом, условие (3.26) необходимо и достаточно для разрешимости уравнения (0.1). Так как уравнение (0.1) линейное (над полем действительных чисел), то общее решение уравнения (0.1) определяется формулой $\varphi(z) = \varphi_0(z) + \varphi_1(z)$, где $\varphi_0(z)$ – частное решение неоднородного уравнения (0.1), а $\varphi_1(z)$ – общее решение однородного уравнения (0.1). Таким образом, для $\beta'(0) = 0$ уравнение (0.1) полностью решено.

Теперь определим ранг матрицы A. Подставляя общее решение однородного уравнения (3.25) (для $b = 0$) в (3.17), аналогично покажем, что однородное уравнение (0.1) (для $f \equiv 0$) имеет $(2m - r)$ линейно независимых решений.

Отсюда и из Теоремы 3.1 следует, что если q – натуральное число и $|p| = 1$, то $r = 2m - 1$. В остальных случаях $r = 2m$.

Следовательно, если q – натуральное число и $|p| = 1$, то число линейно независимых решений уравнения (3.25) равно $2n + 1$. Во всех остальных случаях это число равно $2n$.

§4. НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Задача. Найти дважды непрерывно дифференцируемое вещественное решение уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad |z| < 1, \quad z = x + i\,y, \tag{4.1}$$

удовлетворяющее граничному условию

$$u(z) - \alpha(z)\, u(\overline{\beta(z)}) = g(z), \quad |z| = 1, \tag{4.2}$$

где $\alpha(z)$, $g(z)$ – заданные вещественнозначные функции на Γ, а $\beta(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$ и удовлетворяет условиям $|\beta(z)| < 1, \quad |z| \le 1, \quad \beta(0) = 0$.

Предполагается, что функция $g(z)$ удовлетворяет условию Гельдера на окружности $|z| = 1$. $\beta(z)$ и $u(z)$ непрерывны в замкнутой области $|z| \le 1$, а $\alpha(z)$ имеет вид

$$\alpha(z) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} (c_k\, z^k + \overline{c_k}\, \overline{z^k}), \tag{4.3}$$

где c_k $(k = 0, ..., n)$ – постоянные (c_0 – вещественная, а $c_n \neq 0$).

Известно, что любую непрерывную вещественнозначную функцию можно аппроксимировать функциями вида (4.3).

В [1] эта задача была решена методом, аналогичным методу решения сингулярных интегральных уравнений. Здесь предлагается более эффективный метод решения этой задачи. Функцию (4.3) можно записать в виде

$$\alpha(z) = \frac{Q(z)}{z^n}, \quad |z| = 1, \tag{4.4}$$

где

$$Q(z) = c_0\, z^n + \sum_{k=1}^{n} (c_k\, z^{n+k} + \overline{c_k}\, z^{n-k}).$$

А решение уравнения Лапласа представим в виде (см. [2])

$$u(z) = b_{n-1} + \mathrm{Re}(z\, \varphi(z)), \tag{4.5}$$

где b_{n-1} – вещественная постоянная, а $\varphi(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$ и непрерывна в замкнутом круге $|z| \le 1$.

Подставляя (4.5) в (4.2) получим

$$\mathrm{Re}[z\,\varphi(z) - \alpha(z)\,\varphi(\overline{\beta(z)})\,\overline{\beta(z)}] = f(z), \quad |z| = 1, \tag{4.6}$$

где $f(z) = g(z) - b_{n-1}(\alpha(z) - 1)$.

Так как $\alpha(z)$ – вещественнозначная функция на окружности $|z| = 1$, то

$$\mathrm{Re}(\alpha(z)\,\varphi(\overline{\beta(z)})\,\overline{\beta(z)}) = \mathrm{Re}(\alpha(z)\,\overline{\varphi(\overline{\beta(z)})}\,\beta(z)). \tag{4.7}$$

Из (4.4) и (4.7) следует, что граничное условие (4.6) можно записать в виде

$$\mathrm{Re}\frac{\Phi(z)}{z^{n-1}} = f(z), \quad |z| = 1, \tag{4.8}$$

где

$$\Phi(z) = z^n\,\varphi(z) + Q_0(z)\,\varphi(\overline{\beta(z)}), \quad |z| < 1, \qquad Q_0(z) = \frac{Q(z)\cdot\beta(z)}{z}. \tag{4.9}$$

Из условия $\beta(0) = 0$ вытекает, что функции $\Phi(z)$ и $Q_0(z)$ являются аналитическими в круге $|z| < 1$ и непрерывны в замкнутом круге $|z| \le 1$. Следовательно,

$$\Phi(z) = F_1(z) + F_2(z), \tag{4.10}$$

где $\Phi(z)$ определяется из граничного условия (4.8), причем (см. [1])

$$F_1(z) = \frac{z^{n-1}}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{(t+z)\,f(t)\,dt}{(t-z)\,t},$$

$$F_2(z) = i\,d_{n-1}z^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2}\left[b_k(z^k - z^{2n-2-k}) + i\,d_k\,(z^k + z^{2n-2-k})\right],$$

где b_k $(k = 0, ..., n-2)$ и d_k $(k = 0, ..., n-1)$ – произвольные вещественные постоянные. Таким образом, для определения функции $\varphi(z)$ получим уравнение (4.9), где функция $\Phi(z)$ определяется формулой (4.10). Уравнение (4.9) при заданной аналитической функции $\Phi(z)$ полностью исследовано в §§2, 3. Сначала рассмотрим случай, когда $\beta(0) = 0$, $\beta'(0) \ne 0$. В §2 для этого случая показано, что уравнение (4.9) относительно аналитической функции $\varphi(z)$ имеет решение тогда и только тогда, когда функция $\Phi(z)$ удовлетворяет $2n$ условиям вида (см. (2.33)) :

$$L_j(\Phi) = 0, \quad j = 1, ..., 2n, \tag{4.11}$$

где L_j – некоторые линейно независимые функции. Подставляя $\Phi(z)$ из (4.10) в (4.11), получим систему алгебраических уравнений вида

$$BC = \mu, \tag{4.12}$$

где $C = (b_0, ..., b_{n-1}, d_0, ..., d_{n-1})$ – искомый вещественный вектор–столбец, $\mu = \mu_1, ..., \mu_{2n}$ – $2n$-мерный вещественный вектор–столбец, а B – квадратная матрица порядка $2n \times 2n$, элементы которой вещественные постоянные. Отметим, что матрица B и вектор μ известны, элементы матрицы B не зависят от функции $f(z)$, а элементы вектора μ представляются в виде $\mu_k = L_k(f)$, $(k = 1, ..., 2n)$, где $L_1, L_2, ..., L_{2n}$ – некоторые линейные, ограниченные функционалы в классе аналитических функций в круге $|z| < 1$. Следовательно, задача А имеет решение тогда и только тогда, когда уравнение (4.12) имеет решение. Пусть C – решение уравнения (4.12). Подставляя это решение в (4.10) и решая уравнение (4.9) относительно $\varphi(z)$, получим решение задачи А с помощью формулы (4.5). Таким образом, мы доказали следующие следствия.

Следствие 4.1. Задача А имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $\mathrm{Det} B \neq 0$.

Следствие 4.2. Число линейно независимых решений однородной задачи А равно $2n - r$, где r – ранг матрицы B.

ABSTRACT. The paper studies certain functional equations with singularities and derives necessary and sufficient conditions for their solvability in a class of analytic functions. Formulae for solutions in terms of convergent series are obtained. The results are applied for effective solution of some nonlocal boundary value problems for Laplace equation.

REFERENCES

1. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные Интегральные Уравнения, Наука, Москва, 1962.
2. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы Теории Функций Комплексного Переменного, Наука, Москва, 1973.
3. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, Элементы Функционального Анализа, Гостехиздат, Москва – Ленинград, 1951.
4. А. И. Мальцев, Основы Линейной Алгебры, Гостехиздат, Москва, 1956.

22 июля 1999

Армянский государственный инженерный университет