АНАЛИЗ ОДНОРОДНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРЯМЫХ НА ПЛОСКОСТИ МЕТОДОМ ИНВАРИАНТНОГО ВЛОЖЕНИЯ

В. К. Оганян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 6, 1999

Статья изучает однородные процессы прямых второго порядка на плоскости, а именно, маркированные точечные процессы пересечений, индуцированные на тестовой прямой. Марками служат углы, под которыми происходят пересечения с тестовой прямой. Тематика этой статьи совпадает с тематикой статьи Р. В. Амбарцумян, В. К. Оганян, "Распределения Пальма в анализе однородных случайных процессов прямых на плоскости", Известия НАН Армении, Математика, том 33, № 4, стр. 31 — 58, 1998. В более ранней статье имелась методологическая неоднородность : она использовала метод инвариантного вложения для анализа первого порядка и разложения из Комбинаторной интегральной геометрии для анализа второго порядка. Настоящая статья устраняет эту неоднородность, применяя метод инвариантного вложения и в анализе второго порядка. Используя метод инвариантного вложения получены два дифференциальных соотношения между совместными вероятностями числа пересечений на системе непересекающихся интервалов на тестовой прямой и вероятностями Пальма первого и второго порядка тех же событий. Анализом этих соотношений получены условия пуассоновости n-мерных распределений для любого $n \geq 1$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение случайных точечных процессов, индуцированных на тестовых прямых случайными геометрическими процессами на плоскости $\mathbb{R}^2$, одна из основных проблем стохастической геометрии (см. [1], глава 10; [2], глава 10; [4] — [6]). В этих работах важным инструментом исследования являются формулы комбинаторной интегральной геометрии, впервые примененные в контексте стохастической геометрии в [1]. Однако, эти исследования ограничивались в основном случайными геометрическими процессами, инвариантными относительно группы $\mathbb{M}_2$ евклидовых движений плоскости.

Применение аппарата инвариантного вложения, предложенного в [7], открывает путь для замены сильного условия $\mathbb{M}_2$-инвариантности геометрических процессов на более слабое условие его $\mathbf{T}_2$-инвариантности ($\mathbf{T}_2$ — группа параллельных переносов плоскости. $\mathbf{T}_2$-инвариантные геометрические процессы иначе называются однородными).

Однако, результаты работы [7] касаются только одномерных распределений числа пересечений в интервале на тестовой прямой. Попытка изучать многомерные распределения числа пересечений на нескольких интервалах была сделана в [8] (см. также [6]). Однако, в работе [8] имелась методологическая неоднородность : метод инвариантного вложения в [8] использовался только при анализе первого порядка, а для анализа второго порядка применялись разложения из комбинаторной интегральной геометрии. Настоящая статья устраняет эту неоднородность, распространяя метод инвариантного вложения и в анализе второго порядка многомерных распределений. Здесь предмет исследований тот же, что и в [8] : $\mathbf{T}_2$-инвариантные случайные процессы прямых $\{g_i\}$ на плоскости и маркированный точечный процесс $\{x_i, \Psi_i\}_\alpha$, индуцированный на тестовой прямой $g(\alpha)$ направления α. Точечный процесс $\{x_i\}_\alpha$ - множество точек пересечений $\{g_i\} \bigcap g(\alpha)$, а марки $\{\Psi_i\}$ суть углы, под которыми прямые из реализации пересекают тестовую прямую $g(\alpha)$ в точках $\{x_i\}_\alpha$.

Для системы $\overline{\gamma} = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$ непересекающихся интервалов в $g(\alpha)$ и последовательности $\overline{k} = (k_1, ..., k_n)$ неотрицательных целых чисел определим многомерные вероятности

$$p_{\overline{k}}(\overline{\gamma}, \alpha) = \text{ совместная вероятность иметь } k_j \text{ точек из } \{x_i\}_\alpha \text{ на } \gamma_j, \quad j = 1, ..., n.$$

Так как вероятностное распределение случайного точечного процесса $\{x_i\}_\alpha$ полностью определяется величинами $p_{\overline{k}}(\overline{\gamma}, \alpha)$, $n \geq 1$ (см. [9]), изучение n-мерных вероятностных распределений $p_{\overline{k}}(\overline{\gamma}, \alpha)$ приводит к утверждениям единственности, касающихся вероятностных распределений точечных процессов $\{x_i\}_\alpha$.

В [8] для $\mathbf{T}_2$-инвариантного случайного процесса прямых, обладающих первой и второй моментными мерами, были получены два дифференциальных соотношения (первого и второго порядков) для $p_{\overline{k}}(\overline{\gamma}, \alpha)$. Так как эти два подхода приводят к одному и тому же уравнению, то основные результаты [8] теперь получают независимое подтверждение.

Статья организована следующим образом. §1 содержит необходимые предпосылки из теории трансляционно-инвариантных случайных процессов прямых (см. также [1], [2], [10]). В §2 мы развиваем важную тему – обобщенные формулы Пальма. Отметим, что систематическое использование формул Пальма в стохастической геометрии начато в [2]. В §3 метод инвариантного вложения применяются в так называемом анализе первого порядка. Анализ второго порядка методом инвариантного вложения проводится в §4. Как и в [8], мы используем следующие три предположения :

a) для каждого направления α последовательность $\{\cot\Psi_i\}$ некоррелирована с числом точек из $\{x_i\}_\alpha$,

b) последовательность $\{\cot\Psi_i\}$ есть последовательность некоррелированных случайных величин,

c) $\{g_i\}$ удовлетворяет так называемому условию "достаточного перемешивания", а именно, точечные процессы, индуцированные на тестовой прямой направления α и на "типичной" прямой из $\{g_i\}$ с тем же направлением, имеют одно и то же распределение.

Для удобства читателя мы приводим много фактов из [8] в виде кратких доказательств или замечаний. Мы также стараемся, насколько возможно, следовать обозначениям работы [8].

§1. ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРЯМЫХ

Случайный процесс прямых определяется как случайный точечный процесс в пространстве прямых $\mathbf{G}$ на плоскости (стандартная литература по точечным процессам —[2], [9]). Прямую $g\in\mathbf{G}$ можно задавать полярными координатами (φ, p) основания перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую g (φ — точка на единичной окружности $\mathbf{S}_1$, $p\in[0,+\infty)$). Естественная топология в $\mathbf{G}$ есть топология листа Мебиуса.

Обозначим через dg единственную (с точностью до постоянного множителя) меру в пространстве прямых, инвариантную относительно евклидовых движений $\mathbb{R}^2$ (см. [2] и [15]). Определение процесса прямых следующее. Обозначим через $\mathcal{M}$ пространство реализаций процессов прямых

$$\mathcal{M}=\{\mathbf{m}\subset\mathbf{G}:\quad \mathbf{m} \text{ не имеет точек сгущения в пространстве } \mathbf{G}\}.$$

Обозначим через $\mathcal{A}$ минимальную σ-алгебру подмножеств $\mathcal{M}$, относительно которой функции $N(\mathbf{m}, B)=\operatorname{card}(\mathbf{m}\cap B)$ измеримы для всех борелевских

$B \subset \mathbf{G}$. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ — вероятностное пространство, $\omega \in \Omega$. Любое измеримое отображение $\mathrm{m}(\omega)\colon \Omega \longmapsto \mathcal{M}$ называется случайным точечным процессом в $\mathbf{G}$. Вместо m мы часто используем символ $\{g_i\}$, подчеркивая тот факт, что процесс прямых есть счетное случайное множество прямых. Через $\mathbf{P}$ обозначим вероятностное распределение процесса $\{g_i\}$ (вероятностная мера на $(\mathcal{M}, \mathcal{A})$). Группа $\mathbf{T}_2$ параллельных переносов $\mathbb{R}^2$ индуцирует группу преобразований множества реализаций $\mathcal{M}$ (группа параллельных переносов множества $\mathcal{M}$). $\{g_i\}$ называется однородным, если его распределение $\mathbf{P}$ инвариантно относительно этой группы ($\mathbf{T}_2$-инвариантно).

Примером $\mathbf{T}_2$-инвариантного случайного процесса прямых является пуассоновский процесс прямых, управляемый мерой $f(\varphi)\cdot dg$, где $f(\varphi)$ – функция, определенная на окружности $\mathbf{S}_1$. Ниже нам понадобятся понятия первой и второй моментных мер процесса прямых.

Будем говорить, что $\{g_i\}$ — случайный процесс прямых второго порядка, если существуют первая и вторая моментные меры ($m_1(\cdot)$ и $m_2(\cdot)$) :

$$m_1(B) = \mathbf{E_P} N(\mathbf{m}, B) < \infty, \quad m_2(B_1 \times B_2) = \mathbf{E_P}\left[N(\mathbf{m}, B_1)\cdot N(\mathbf{m}, B_2)\right] < \infty,$$

где $\mathbf{E_P}$ — математическое ожидание относительно $\mathbf{P}$, $\mathcal{B}_0(\mathbf{G})$ — кольцо всех ограниченных борелевских подмножеств, а $B, B_1, B_2 \in \mathcal{B}_0(\mathbf{G})$.

Будем говорить, что прямая g "пересекает" отрезок γ, если $\gamma \cap g$ есть точка *внутренности* отрезка γ. Задавая "тестовый отрезок" γ, рассмотрим событие

$$\binom{\gamma}{k} = \{\gamma \text{ пересекается точно } k \text{ прямыми из } \{g_i\}\}.$$

Для заданных n тестовых отрезков $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ и неотрицательных целых чисел $k_1, \ldots, k_n$ будем обозначать

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 & \ldots & \gamma_n \\ k_1 & \ldots & k_n \end{pmatrix} = \bigcap_{i=1}^{n} \binom{\gamma_i}{k_i} = \binom{\overline{\gamma}}{\overline{k}}. \qquad (1.1)$$

Определение 1. Случайный процесс прямых $\{g_i\}$ принадлежит классу Ti2, если его вероятностное распределение $\mathbf{P}$ инвариантно относительно группы $\mathbf{T}_2$ и первые и вторые моментные меры $\{g_i\}$ имеют форму $f\,dg$ и (вне $g_1 = g_2$) $f_2\,dg_1\,dg_2$ соответственно, с непрерывными (трансляционно-инвариантными) плотностями $f(g)$ и $f_2(g_1, g_2)$.

Приведем некоторые свойства процессов из класса Ti2, которые нам понадобятся в параграфах 3 и 4. Их строгие доказательства легко получаются методом, описанным в [2].

1. Для случайного процесса прямых из класса Ti2 с вероятностью 1 в реализации нет параллельных прямых.

2. Отрезки, принадлежащие $g(\alpha)$, будем называть горизонтальными, а отрезки, ортогональные к $g(\alpha)$ — вертикальными. Горизонтальные отрезки обозначаем через h, а вертикальные – через v. Если $|h| = l \to 0$, то имеем

$$\mathbf{P}\begin{pmatrix} h \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda(\alpha)\, l + o(l), \quad \mathbf{P}\begin{pmatrix} h \\ 2 \end{pmatrix} = O(l^2) \quad \text{и} \quad \mathbf{P}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = o(l^2), \text{ если } \quad k > 2, \tag{1.2}$$

где $\lambda(\alpha)$ — **интенсивность** точечного процесса $\{x_i\}_\alpha$. Аналогичные утверждения справедливы для вертикальных отрезков v, при $|v| \to 0$.

3. Предполагая, что интервалы h_i или v_i стягиваются при $l \to 0$ к некоторым фиксированным точкам $y_i \in g(\alpha)$, $i = 1, 2$ рассмотрим последовательность событий $\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Для пары вертикальных отрезков v_1, v_2 имеем $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A \bigcup B$, где $A \subset \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ происходит, когда **одна и та же прямая** из $\{g_i\}$ пересекает отрезки v_1 и v_2, а B — дополнение события A в $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, т.е. B обозначает событие, когда отрезки v_1 и v_2 пересекаются **двумя разными прямыми** из $\{g_i\}$. Существуют следующие пределы :

$$\lim_{l\to 0} l^{-2}\mathbf{P}\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = c_{y_1,y_2,hh}, \quad \lim_{l\to 0} l^{-2}\mathbf{P}(A) = c_A \quad \text{и} \quad \lim_{l\to 0} l^{-2}\mathbf{P}(B) = c_{y_1,y_2,vv}. \tag{1.3}$$

Заметим, что существуют версии формул (1.3) для окон не обязательно одинаковых длин. В этом случае l^2 заменяется произведением длин окон. Окна v_1, v_2 могут находиться или в одной или в разных полуплоскостях относительно $g(\alpha)$.

4. Распределения типа Пальма $\Pi_{y,h}$, $\Pi_{y,v}$ $\Pi_{y_1,y_2,hh}$ и $\Pi_{y_1,y_2,vv}$ определены. Грубо говоря, каждое из этих распределений типа Пальма есть предел условного вероятностного распределения процесса $\{g_i\}$, при условиях $\begin{pmatrix} h \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ или B. Наши обозначения указывают на зависимость вероятностей Пальма от позиции предельных точек (в смысле 3.). Можем говорить о процессе прямых, который соответствует каждому из вышеупомянутых распределений Пальма.

Оба **первого порядка** вероятностных распределения $\Pi_{y,h}$ и $\Pi_{y,v}$ определены на $\mathcal{M} \times (0, \pi)$, т.е. сосредоточены на множестве реализаций, обладающих прямой, проходящей через точку $y \in g(\alpha)$. Рассмотрим их значения на событиях типа $\begin{pmatrix} \gamma_1 & \dots & \gamma_n \\ k_1 & \dots & k_n \end{pmatrix} \times \Theta_1$, где $\Theta_1 \subset (0, \pi)$ обозначает событие $\Psi \in \Theta_1$. Через Ψ обозначим угол между $g(\alpha)$ и случайной прямой, проходящей через точку y.

Оба **второго порядка** вероятностных распределения $\Pi_{y_1,y_2,vv}$ и $\Pi_{y_1,y_2,hh}$ сосредоточены на множестве реализаций, в которых имеются две прямые, проходящие через точки $y_1, y_2 \in g(\alpha)$. Параметризируем последние две прямые углами Ψ_1 и Ψ_2. Таким образом, $\Pi_{y_1,y_2,hh}$ и $\Pi_{y_1,y_2,vv}$ суть вероятностные меры на пространстве $\mathcal{M} \times (0,\pi) \times (0,\pi)$. В частности, $\Pi_{y_1,y_2,hh}$ и $\Pi_{y_1,y_2,vv}$ определены на событиях типа $\begin{pmatrix} \gamma_1 & \dots & \gamma_n \\ k_1 & \dots & k_n \end{pmatrix} \times \Theta_1 \times \Theta_2$, где $\Theta_1, \Theta_2 \subset (0,\pi)$.

Существует еще одно распределение Пальма, которое будем обозначать через Π_g. Можно дать нестрогое определение распределения Π_g, как условное вероятностное распределение процесса $\{g_i\}$, при условии, что одна прямая из $\{g_i\}$ совпадает с неслучайной прямой g. Одно из точных определений распределения Пальма Π_g для $\{g_i\} \in$ Ti2 состоит в следующем :

$$\Pi_g\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right) = \lim_{l\to 0}[\mathbf{P}(A)]^{-1}\mathbf{P}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)\cap A\right) = c_A^{-1}\lim_{l\to 0} l^{-2}\,\mathbf{P}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)\cap A\right). \tag{1.4}$$

Будем писать E_Z для *математического ожидания* относительно вероятностной меры Π_Z.

Лемма 1 (см. [8]). **Пусть $F(\mathrm{m},\Psi_1)$ — ограниченная функция, определенная на $\mathrm{M} \times (0,\pi)$. Если $\{g_i\} \in$ Ti2, то для каждого направления α и точки $y \in g(\alpha)$ имеем**

$$\lambda(\alpha)\, E_{y,h} F(\mathrm{m},\Psi_1)\cdot|\cot\Psi_1| = \lambda(\alpha+\pi/2)\, E_{y,v}\, F(\Psi_1,\mathrm{m}).$$

Лемма 2 (см. [8]). **Пусть $F(\mathrm{m},\Psi_1,\Psi_2)$ — ограниченная функция, определенная на $\mathrm{M} \times (0,\pi) \times (0,\pi)$. Если $\{g_i\} \in$ Ti2, то для каждого направления α и точек y_1, $y_2 \in g(\alpha)$**

$$c_{y_1,y_2,hh}\, E_{y_1,y_2,hh} F(\mathrm{m},\Psi_1,\Psi_2)|\cot\Psi_1\cot\Psi_2| = c_{y_1,y_2,vv}\, E_{y_1,y_2,vv}\, F(\mathrm{m},\Psi_1,\Psi_2).$$

§2. ОБОБЩЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ПАЛЬМА

Если случайный процесс прямых $\{g_i\}$ из класса Ti2, то соответствующий процесс пересечений $\{x_i\}_\alpha$ на тестовой прямой $g(\alpha)$ инвариантен относительно сдвигов вдоль $g(\alpha)$ и имеет конечную интенсивность $\lambda(\alpha)$. Для отрезка $\gamma \subset g(\alpha)$ длины t имеем классическую формулу Пальма (см. [4])

$$\frac{\partial p_k(t,\alpha)}{\partial t} = \lambda(\alpha)\left[\Pi_{y,h}\begin{pmatrix}\gamma\\ k-1\end{pmatrix} - \Pi_{y,h}\begin{pmatrix}\gamma\\ k\end{pmatrix}\right], \quad \text{где} \quad p_k(t,\alpha) = P\begin{pmatrix}\gamma\\ k\end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Эта формула справедлива для обоих концов y отрезка γ.

Здесь и ниже $\Pi_{y,h}\begin{pmatrix}\gamma\\ -1\end{pmatrix} = 0$. Не оговаривая особо, в дальнейшем мы будем следовать аналогичной практике относительно отрицательных чисел пересечений.

Ниже нам понадобятся некоторые обобщения формулы Пальма для вероятностей $p_{\overline{k}}(\overline{\gamma},\alpha)$ с несколькими интервалами γ_i, разделенными непустыми пробелами. Для $\mathbf{T}_2$-инвариантного процесса прямых вероятность $p_{\overline{k}}(\overline{\gamma},\alpha)$ на самом деле есть функция от $2n$ переменных

$$p_{\overline{k}}(\overline{\gamma},\alpha) = p_{k_1,\ldots,k_n}(t_1,\ldots,t_n,u_1,\ldots,u_{n-1},\alpha) = p_{\overline{k}}(\overline{t},\overline{u},\alpha),$$

где $\overline{t} = (t_1,\ldots,t_n)$ – последовательность длин отрезков γ_i, а $\overline{u} = (u_1,\ldots,u_{n-1})$ – последовательность длин пробелов между γ_i (см. Рис. 1).

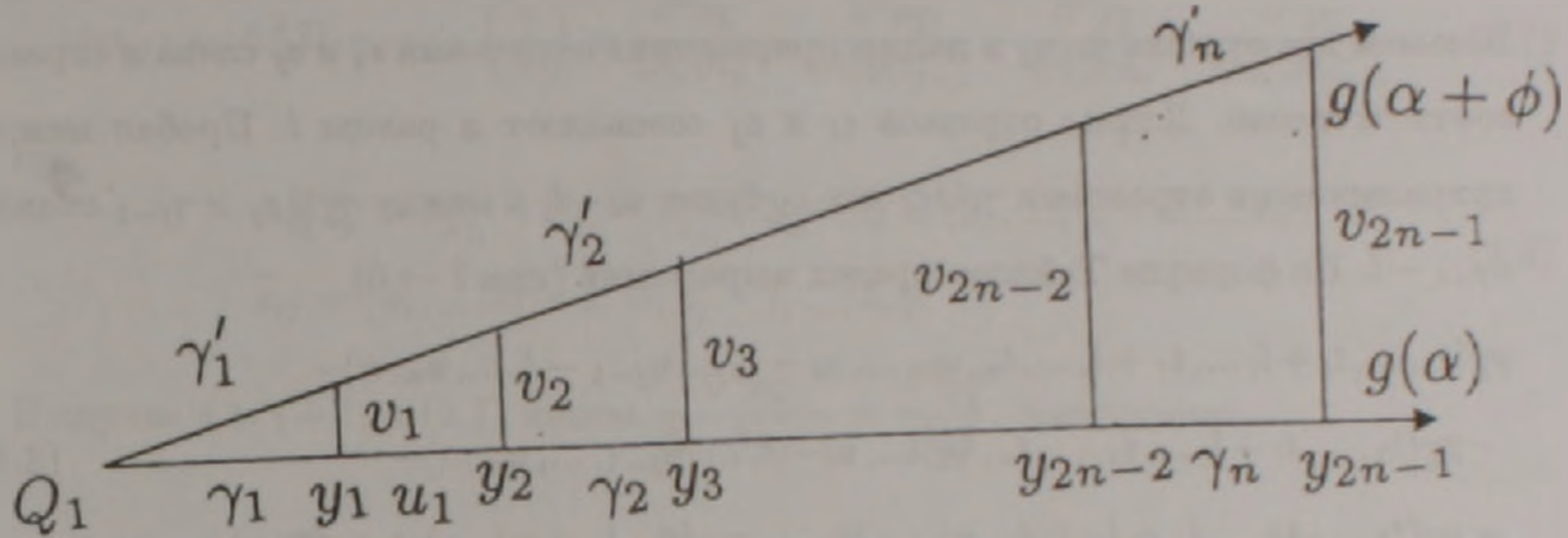

Рис. 1.

Возьмем один из отрезков γ_i и в его правом конце дадим приращение на отрезок ε_i длины $|\varepsilon_i|$. Пробел между приращенным отрезком и γ_{i+1} становится $u_i - |\varepsilon_i|$. По формуле Тейлора

$$\lim_{|\varepsilon_i|\to 0} \frac{p_{\overline{k}}(t_1,\ldots,t_i+|\varepsilon_i|,\ldots,t_n,u_1,\ldots,u_i-|\varepsilon_i|,\ldots,u_n,\alpha) - p_{\overline{k}}(\overline{t},\overline{u},\alpha)}{|\varepsilon_i|} = \frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial t_i} - \frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial u_i}. \tag{2.2}$$

С другой стороны, из формулы полной вероятности получаем

$$P\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{\overline{k}}\right)_i \bigcap \begin{pmatrix} \gamma_i \cup \varepsilon_i \\ k_i \end{pmatrix}\right) =$$
$$= P\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{\overline{k}}\right) \bigcap \begin{pmatrix} \varepsilon_i \\ 0 \end{pmatrix}\right) + P\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{\overline{k}}\right)_i \bigcap \begin{pmatrix} \gamma_i & \varepsilon_i \\ k_i-1 & 1 \end{pmatrix}\right) + o(|\varepsilon_i|),$$

$$P\left(\frac{\overline{\gamma}}{\overline{k}}\right) = P\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{\overline{k}}\right) \bigcap \begin{pmatrix} \varepsilon_i \\ 0 \end{pmatrix}\right) + P\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{\overline{k}}\right) \bigcap \begin{pmatrix} \varepsilon_i \\ 1 \end{pmatrix}\right) + o(|\varepsilon_i|),$$

где

$$\left(\frac{\overline{\gamma}}{\overline{k}}\right)_i = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \ldots & \gamma_{i-1} & \gamma_{i+1} & \ldots & \gamma_n \\ k_1 & \ldots & k_{i-1} & k_{i+1} & \ldots & k_n \end{pmatrix}.$$

Подставляя эти формулы в (2.2), получим

$$\lambda(\alpha)\Delta_i\Pi_{iR,h}\left(\frac{\overline{\gamma}}{\overline{k}}\right) = \frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial t_i} - \frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial u_i}, \tag{2.3}$$

где iR обозначает правый конец отрезка γ_i. Здесь и ниже

$$\Delta_i Y_{\overline{k}} = Y_{(k_1,\ldots k_i-1,\ldots,k_n)} - Y_{(k_1,\ldots k_i,\ldots,k_n)}. \tag{2.4}$$

Если дадим приращение отрезка γ_i слева, то получим следующую версию формулы (2.3) :

$$\lambda(\alpha)\,\Delta_i \Pi_{iL,h}\begin{pmatrix}\overline{\gamma}\\ \overline{k}\end{pmatrix} = \frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial t_i} - \frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial u_{i-1}}, \tag{2.5}$$

где iL — левый конец отрезка γ_i.

Ниже нам понадобятся формулы для распределений Пальма второго порядка. Возьмем два отрезка γ_i, γ_j и дадим приращения отрезками ε_i и ε_j слева и справа, соответственно. Длины отрезков ε_i и ε_j совпадают и равны l. Пробел между приращенными отрезками $\gamma_i \cup \varepsilon_i$ и γ_{i+1} будет $u_i - l$, а между $\gamma_j \cup \varepsilon_j$ и γ_{j-1} станет $u_{j-1} - l$. По формуле Тейлора предел выражения (при $l \to 0$)

$$\begin{aligned}&p_{\overline{k}}(t_1,\ldots,t_i+l,\ldots,t_j+l,\ldots,t_n,u_1,\ldots,u_i-l,\ldots,u_{j-1}-l,\ldots,u_n,\alpha)-\\ &-p_{\overline{k}}(t_1,\ldots,t_i+l,\ldots,t_j,\ldots,t_n,u_1,\ldots,u_i-l,\ldots,u_{j-1},\ldots,u_n,\alpha)-\\ &-p_{\overline{k}}(t_1,\ldots,t_i,\ldots,t_j+l,\ldots,t_n,u_1,\ldots,u_i,\ldots,u_{j-1}-l,\ldots,u_n,\alpha)+p_{\overline{k}}(\overline{\gamma},\alpha),\end{aligned} \tag{2.6}$$

умноженный на l^{-2}, имеет вид

$$\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_i \partial t_j} - \frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_i \partial u_{j-1}} - \frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_j \partial u_i} + \frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial u_i\, \partial u_{j-1}}.$$

С другой стороны, можно разлагать вероятности в (2.6), применяя формулу полной вероятности. Используя обозначение

$$\begin{pmatrix}\overline{\gamma}\\ \overline{k}\end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix}\gamma_1 & \ldots & \gamma_{i-1} & \gamma_{i+1} & \ldots & \gamma_n\\ k_1 & \ldots & k_{i-1} & k_{i+1} & \ldots & k_n\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix}\overline{\gamma}\\ \overline{k}\end{pmatrix}_{ij} = \left(\begin{pmatrix}\overline{\gamma}\\ \overline{k}\end{pmatrix}_i\right)_j,$$

где $\begin{pmatrix}\overline{\gamma}\\ \overline{k}\end{pmatrix}$ - как и в (1.1)

$$\begin{aligned}&P\left(\begin{pmatrix}\overline{\gamma}\\ \overline{k}\end{pmatrix}_{ij}\bigcap\begin{pmatrix}\gamma_i\cup\varepsilon_i & \gamma_j\cup\varepsilon_j\\ k_i & k_j\end{pmatrix}\right) =\\ &= \sum_{0\le s_1+s_2\le 2} P\left(\begin{pmatrix}\overline{\gamma}\\ \overline{k}\end{pmatrix}_{ij}\bigcap\begin{pmatrix}\gamma_i & \gamma_j & \varepsilon_i & \varepsilon_j\\ k_i-s_1 & k_j-s_2 & s_1 & s_2\end{pmatrix}\right) + o(l^2).\end{aligned}$$

Аналогично, имеем

$$\begin{aligned}P\left(\begin{pmatrix}\overline{\gamma}\\ \overline{k}\end{pmatrix}_{ij}\bigcap\begin{pmatrix}\gamma_i\cup\varepsilon_i & \gamma_j\\ k_i & k_j\end{pmatrix}\right) &= \sum_{s=0,1} P\left(\begin{pmatrix}\overline{\gamma}\\ \overline{k}\end{pmatrix}_{ij}\bigcap\begin{pmatrix}\gamma_i & \gamma_j & \varepsilon_i & \varepsilon_j\\ k_i-1 & k_j & 1 & s\end{pmatrix}\right) +\\ &+\sum_{s=0,1,2} P\begin{pmatrix}\overline{\gamma} & \varepsilon_i & \varepsilon_j\\ \overline{k} & 0 & s\end{pmatrix} + P\left(\begin{pmatrix}\overline{\gamma}\\ \overline{k}\end{pmatrix}_{ij}\bigcap\begin{pmatrix}\gamma_i & \gamma_j & \varepsilon_i & \varepsilon_j\\ k_i-2 & k_j & 2 & 0\end{pmatrix}\right) + o(l^2)\end{aligned}$$

$$P\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)_{ij}\bigcap\begin{pmatrix}\gamma_i & \gamma_j\cup\varepsilon_j\\ k_i & k_j\end{pmatrix}\right)=\sum_{s=0,1}P\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)_{ij}\bigcap\begin{pmatrix}\gamma_i & \gamma_j & \varepsilon_i & \varepsilon_j\\ k_i & k_j-1 & s & 1\end{pmatrix}\right)+$$

$$+\sum_{s=0,1,2}P\begin{pmatrix}\frac{\overline{\gamma}}{k} & \varepsilon_i & \varepsilon_j\\ & s & 0\end{pmatrix}+P\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)_{ij}\bigcap\begin{pmatrix}\gamma_i & \gamma_j & \varepsilon_i & \varepsilon_j\\ k_i & k_j-2 & 0 & 2\end{pmatrix}\right)+o(l^2).$$

Наконец

$$P\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)=\sum_{0\le s_1+s_2\le 2}P\begin{pmatrix}\frac{\overline{\gamma}}{k} & \varepsilon_i & \varepsilon_j\\ & s_1 & s_2\end{pmatrix}+o(l^2).$$

Используя 3. и 4. из §1, получаем

$$c_{iR,jL,hh}\,\Delta^2_{ij}\Pi_{iR,jL,hh}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)=\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_i\partial t_j}-\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_i\partial u_{j-1}}-\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_j\partial u_i}+\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial u_i\,\partial u_{j-1}},\tag{2.7}$$

где

$$\begin{aligned}&\Delta^2_{ij}Y_{\overline{k}}=Y_{\overline{k}_{ij}}-Y_{\overline{k}_i}-Y_{\overline{k}_j}+Y_{\overline{k}}\quad \overline{k}_i=(k_1,\dots,k_i-1,\dots,k_n),\\ &\overline{k}_{ij}=(k_1,\dots,k_i-1,\dots,k_j-1,\dots,k_n).\end{aligned}\tag{2.8}$$

В случае $j=i+1$, в (2.7) имеем $\dfrac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial u_i\,\partial u_{j-1}}=\dfrac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial u_i^2}$. Аналогично

$$c_{iL,jR,hh}\,\Delta^2_{ij}\Pi_{iL,jR,hh}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)=\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_i\partial t_j}-\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_i\partial u_j}-\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_j\partial u_{i-1}}+\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial u_{i-1}\,\partial u_j}.\tag{2.9}$$

В случае $i=1$ или $j=n$ полагаем $\dfrac{\partial}{\partial u_0}\equiv 0$ и $\dfrac{\partial}{\partial u_n}\equiv 0$. В частности, для $i=1$ и $j=n$ имеем

$$c_{1L,nR,hh}\,\Delta^2_{1n}\,\Pi_{1L,nR,hh}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)=\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_1\partial t_n}.\tag{2.10}$$

Распределения Пальма $\Pi_{y_1,y_2,hh}$ определены также и для $y_1=y_2=y$. Ниже будем использовать обозначение $\Pi^{(2)}_{y,h}=\Pi_{y,y,hh}$. Грубо говоря, $\Pi^{(2)}_{y,h}$ определяется условием, что обе прямые из $\{g_i\}$ содержат точку $y\in g(\alpha)$. Используя формулу Тейлора и действуя как и выше, получим

$$c^{(2)}_{iR,h}\,\Delta^2_{ii}\Pi^{(2)}_{iR,h}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)=\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_i^2}-2\,\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_i\partial u_i}+\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial u_i^2},\tag{2.11}$$

где $c^{(2)}_{iR,h}$ — постоянная, iR — правый конец отрезка γ_i, а Δ^2_{ii} — обычная вторая разность по i. Аналогичная формула существует и для $\Pi^{(2)}_{iL,h}$.

§3. АНАЛИЗ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Для заданной системы непересекающихся замкнутых интервалов $\gamma_1,\dots,\gamma_n\subset g(\alpha)$ рассмотрим треугольник, показанный на Рис. 1.

На прямой $g(\alpha+\phi)$ рассмотрим n отрезков $\gamma_1',\dots,\gamma_n'$, чьи перпендикулярные проекции на $g(\alpha)$ суть начальные отрезки $\gamma_1,\dots,\gamma_n$. Длины γ_i' пусть будут

t_i', а пробелы между γ_i' и γ_{i+1}' обозначим через u_i'. Так как при $\phi \to 0$ имеем $t_i' - t_i = o(\phi)$ и $u_j' - u_j = o(\phi)$ $(i = 1, 2, ..., n,\ j = 1, ..., n-1)$, то

$$\lim_{\phi\to 0} \frac{p_{\overline{k}}(\overline{t'}, \overline{u'}, \alpha+\phi) - p_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha)}{\phi} = \frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial \alpha}. \tag{3.1}$$

Вычислим те же пределы, используя разложения

$$\left(\frac{\overline{\gamma}'}{\overline{k}}\right) = \bigcup_{s_1,...,s_{2n-1}\geq 0} \left(\left(\frac{\overline{\gamma}'}{\overline{k}}\right) \bigcap \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & ... & v_{2n-1} \\ s_1 & s_2 & ... & s_{2n-1}\end{pmatrix}\right), \tag{3.2}$$

$$\left(\frac{\overline{\gamma}}{\overline{k}}\right) = \bigcup_{s_1,...,s_{2n-1}\geq 0} \left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{\overline{k}}\right) \bigcap \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & ... & v_{2n-1} \\ s_1 & s_2 & ... & s_{2n-1}\end{pmatrix}\right), \tag{3.3}$$

приходим к следующей лемме.

Лемма 3.

$$\frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial \alpha} = \lim_{\phi\to 0} \phi^{-1} \left[\sum_{i=1}^{2n-1} P\left(\left(\frac{\overline{\gamma}'}{\overline{k}}\right)\bigcap\begin{pmatrix} v_i \\ 1\end{pmatrix}\right) - P\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{\overline{k}}\right)\bigcap\begin{pmatrix} v_i \\ 1\end{pmatrix}\right)\right]. \tag{3.4}$$

Доказательство : следует из (1.1) и (1.2). Очевидно, имеем разложение

$$\begin{pmatrix} v_i \\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_i \\ 1\end{pmatrix}\bigcap \Theta_a \bigcup \begin{pmatrix} v_i \\ 1\end{pmatrix}\bigcap\Theta_o, \tag{3.5}$$

где $\Theta_a = \{\Psi \in (0, \pi/2)\}$ (острые углы) и $\Theta_o = \{\Psi \in (\pi/2, \pi)\}$ (тупые углы). Используя (3.4), (3.5) и

$$P\begin{pmatrix} v_i \\ 1\end{pmatrix} = \lambda(\alpha + \pi/2)\, y_i\, \phi + o(\phi), \qquad i = 1, ..., 2n-1, \tag{3.6}$$

где y_i — координата основания v_i на $g(\alpha)$ (см. Рис. 1), получим

$$\begin{gathered}
[\lambda(\alpha+\pi/2)]^{-1}\frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial\alpha} = \sum_{i=1}^{n} y_{iL}\left[\Pi_{iL,v}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{\overline{k}_i}\right)\bigcap\Theta_a\right) + \Pi_{iL,v}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{\overline{k}}\right)\bigcap\Theta_o\right) - \right. \\
\left. - \Pi_{iL,v}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{\overline{k}}\right)\bigcap\Theta_a\right) - \Pi_{iL,v}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{\overline{k}_i}\right)\bigcap\Theta_o\right)\right] + \sum_{i=1}^{n} y_{iR}\left[\Pi_{iR,v}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{\overline{k}}\right)\bigcap\Theta_a\right) + \right. \\
\left. + \Pi_{iR,v}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{\overline{k}_i}\right)\bigcap\Theta_o\right) - \Pi_{iR,v}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{\overline{k}_i}\right)\bigcap\Theta_a\right) - \Pi_{iR,v}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{\overline{k}}\right)\bigcap\Theta_o\right)\right].
\end{gathered} \tag{3.7}$$

В (3.7) сумма распространяется на отрезки $\gamma_1, ..., \gamma_n$; как и выше iL — левый, а iR — правый концы отрезка γ_i. Наконец, $\overline{k}_i = (k_1, ..., k_{i-1}, k_i - 1, k_{i+1}, ..., k_n)$. Следующий шаг состоит в вычислении (3.7) при Условии а) (см. Введение). Заменим вертикальные окна горизонтальными. Очевидно

$$\Pi_{iL,v}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{\overline{k}}\right)\bigcap\Theta_o\right) - \Pi_{iL,v}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{\overline{k}}\right)\bigcap\Theta_a\right) = E_{iL,v}\left(I\left(\frac{\overline{\gamma}}{\overline{k}}\right)[I_{\Theta_o}(\Psi) - I_{\Theta_a}(\Psi)]\right),$$

где I — индикаторная функция соответствующего события. Применяя Лемму 1 для $F(\mathbf{m},\Psi) = I\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)[I_{\Theta_o}(\Psi) - I_{\Theta_a}(\Psi)]$ и соотношение $[I_{\Theta_o}(\Psi) - I_{\Theta_a}(\Psi)]\cdot|\cot\Psi| = \cot\Psi$, получим (сравни с [8])

$$\lambda(\alpha+\pi/2)\left[\Pi_{iL,v}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)\bigcap\Theta_o\right) - \Pi_{iL,v}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)\bigcap\Theta_a\right)\right] =$$
$$= -\lambda(\alpha)\,E_{iL,h}\left[I\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)\cdot\cot\Psi\right].$$

При Условии а) оно равно

$$-\lambda(\alpha)\cdot E_{iL,h}\left[I\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)\cdot\cot\Psi\right] = -\lambda(\alpha)\cdot\Pi_{iL,h}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)\cdot E_\alpha\cot\Psi.$$

Стационарность дает нам возможность использования упрощенной записи $E_{iL,h}\cot\Psi = E_\alpha\cot\Psi$. Аналогично, при Условии а)

$$\lambda(\alpha+\pi/2)\left[\Pi_{iL,v}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k_i}\right)\bigcap\Theta_a\right) - \Pi_{iL,v}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k_i}\right)\bigcap\Theta_o\right)\right] =$$
$$= \lambda(\alpha)\cdot\Pi_{iL,h}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k_i}\right)\cdot E_\alpha\cot\Psi,$$

$$\lambda(\alpha+\pi/2)\left[\Pi_{iR,v}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)\bigcap\Theta_a\right) - \Pi_{iR,v}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)\bigcap\Theta_o\right)\right] =$$
$$= \lambda(\alpha)\cdot\Pi_{iR,h}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)\cdot E_\alpha\cot\Psi,$$

$$\lambda(\alpha+\pi/2)\left[\Pi_{iR,v}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k_i}\right)\bigcap\Theta_o\right) - \Pi_{iR,v}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k_i}\right)\bigcap\Theta_a\right)\right] =$$
$$= -\lambda(\alpha)\cdot\Pi_{iR,h}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k_i}\right)\cdot E_\alpha\cot\Psi.$$

Подставляя эти формулы в (3.7), получим

$$\frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial\alpha} = \lambda(\alpha)\sum_{i=2}^{n}\left\{y_{iL}\left[\Pi_{iL,h}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k_i}\right) - \Pi_{iL,h}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)\right] +\right.$$
$$\left. + y_{iR}\left[\Pi_{iR,h}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right) - \Pi_{iR,h}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k_i}\right)\right]\right\} E_\alpha\cot\Psi.$$

Из (2.1), (2.3) и (2.5) получим

$$\frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial\alpha} = \left\{\sum_{i=2}^{n} y_{iL}\left[\frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial t_i} - \frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial u_{i-1}}\right] - \sum_{i=1}^{n-1} y_{iR}\left[\frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial t_i} - \frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial u_i}\right] - y_{nR}\frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial t_n}\right\} E_\alpha\cot\Psi. \tag{3.8}$$

Ниже мы используем выражение (доказательство можно найти в [7], [8])

$$E_\alpha\cot\Psi = -\frac{\lambda'(\alpha)}{\lambda(\alpha)}. \tag{3.9}$$

Так как $y_{iR} - y_{iL} = t_i$ и $y_{(i+1)R} - y_{iR} = u_i$, то (3.8) можно записать в виде однородного уравнения в частных производных

$$\frac{\lambda(\alpha)}{\lambda'(\alpha)} \frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial \alpha} - \sum_{i=1}^{n} t_i \frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial t_i} - \sum_{i=1}^{n-1} u_i \frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial u_i} = 0. \tag{3.10}$$

Первые интегралы уравнения (3.10) (см. [12]) суть

$$\lambda(\alpha)\, t_i = c_i, \quad i = 1, 2, ..., n, \qquad \lambda(\alpha)\, u_j = b_j, \quad j = 1, ..., n-1.$$

Предложение 1 (см. [8]). **Для любого случайного процесса прямых $\{g_i\} \in$ Ti2, удовлетворяющего дополнительному условию а)**

$$p_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha) = q_{\overline{k}}(\lambda(\alpha)\, \overline{t}, \lambda(\alpha)\, \overline{u}), \tag{3.11}$$

где $q_{\overline{k}}$ суть некоторые функции от $2n-1$ переменных, а $\lambda(\alpha)$ – интенсивность процесса $\{x_i\}_\alpha$.

§4. ИНВАРИАНТНОЕ ВЛОЖЕНИЕ В АНАЛИЗЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим прямоугольник R, основанием которого является минимальный отрезок, содержащий $\gamma_1, ..., \gamma_n$ (см. (1.1)). Пусть T – длина горизонтального основания прямоугольника R, $T = \sum_{i=1}^{n} t_i + \sum_{i=1}^{n-1} u_i$. Через $D_i \subset R$ обозначим замкнутый прямоугольник, чье основание есть γ_i, вертикальные стороны прямоугольников D_1, ..., D_n обозначим через v_1,...,v_{2n}, $|v_1| = ... = |v_{2n}| = l$, а сторону прямоугольника D_i, параллельную γ_i, будем обозначать через γ_i'. Прямую, содержащую отрезки γ_1', ..., γ_n', обозначим через $g'(\alpha)$ (см. Рис. 2). Обозначим через d_i, $i = 1, 2$ диагонали прямоугольника R. Пусть $\overline{d_i} = (d_{i1}, d_{i2}, ..., d_{in})$, где $d_{ij} = d_i \bigcap D_j$, $j = 1, ..., n$, $i = 1, 2$. Пробелы на диагонали d_i будем обозначать через $\overline{\delta}_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, ..., \delta_{i(n-1)})$.

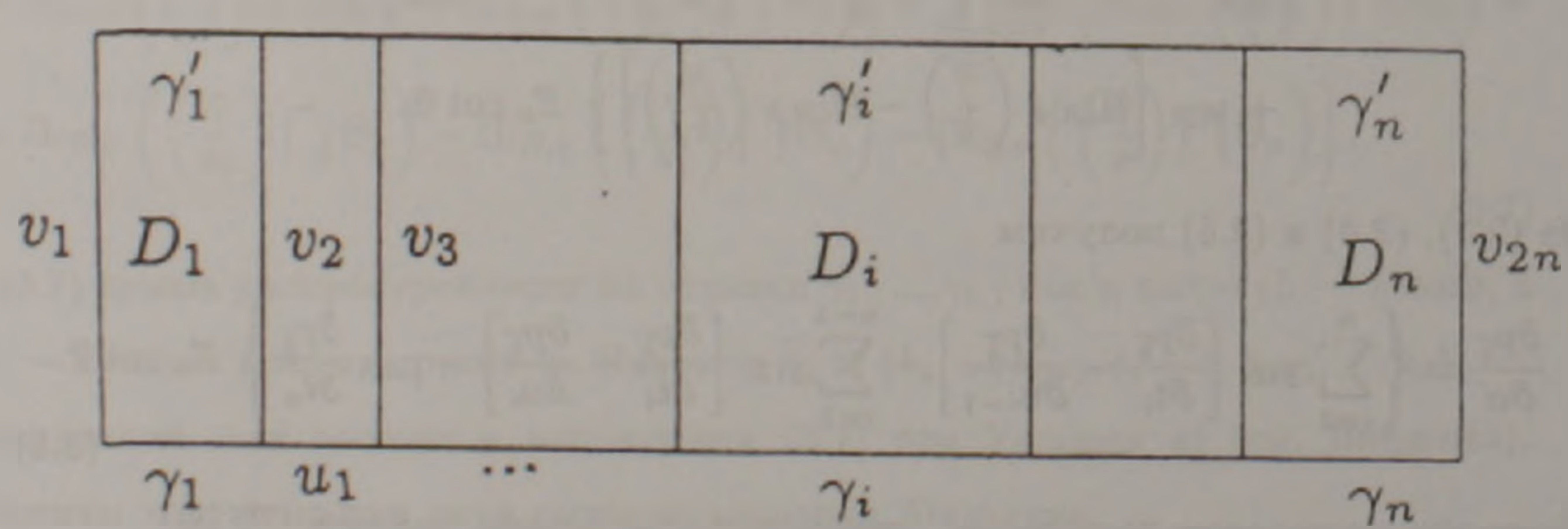

Рис. 2.

Используя $\mathbf{T}_\gamma$-инвариантность, получаем

$$\mathbf{P}\left(\frac{\overline{\gamma}}{\overline{k}}\right) = \mathbf{P}\left(\frac{\overline{\gamma}'}{\overline{k}}\right) = p_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha), \qquad \overline{\gamma}' = (\gamma_1', \dots, \gamma_n').$$

Используя формулу Тейлора, предел

$$\mathcal{L}_2 = \lim_{\phi \to 0} \frac{p_{\overline{k}}(\overline{d}_1, \overline{\delta}_1, \alpha + \phi) + p_{\overline{k}}(\overline{d}_2, \overline{\delta}_2, \alpha - \phi) - 2\, p_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha)}{\phi^2} \tag{4.1}$$

равен

$$\mathcal{L}_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha)}{\partial t_i} t_i + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial p_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha)}{\partial u_i} u_i + \frac{\partial^2 p_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha)}{\partial \alpha^2}, \tag{4.2}$$

где ϕ – угол между $g(\alpha)$ и диагональю d_1.

Мы хотим вычислить тот же предел, используя разложения

$$\left(\frac{\overline{d}_i}{\overline{k}}\right) = \bigcup_{s_1, \dots, s_{2n} \geq 0} \begin{pmatrix} \overline{d}_i & v_1 & v_2 & \dots & v_{2n} \\ \overline{k} & s_1 & s_2 & \dots & s_{2n} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2,$$

$$\left(\frac{\overline{\gamma}}{\overline{k}}\right) = \bigcup_{s_1, \dots, s_{2n} \geq 0} \begin{pmatrix} \overline{\gamma} & v_1 & v_2 & \dots & v_{2n} \\ \overline{k} & s_1 & s_2 & \dots & s_{2n} \end{pmatrix},$$

$$\left(\frac{\overline{\gamma}'}{\overline{k}}\right) = \bigcup_{s_1, \dots, s_{2n} \geq 0} \begin{pmatrix} \overline{\gamma}' & v_1 & v_2 & \dots & v_{2n} \\ \overline{k} & s_1 & s_2 & \dots & s_{2n} \end{pmatrix}.$$

Ниже мы будем использовать следующие обозначения :

$\begin{pmatrix} v_q & \overline{v_q} \\ k & 0 \end{pmatrix}$ = вертикальное окно v_q пересекается k прямыми из $\{g_i\}$, а все другие вертикальные окна (т.е. окна из $\overline{v_q}$) не имеют пересечений ;

$\begin{pmatrix} v_q \\ 1 \end{pmatrix}_A$ = вертикальное окно v_q пересекается одной прямой $g_0 \in \{g_i\}$, которая пересекает, по крайней мере, одно вертикальное окно из $\overline{v_q}$, и ни одна другая прямая из $\{g_i\}$ не пересекает ни одно из вертикальных окон ;

$\begin{pmatrix} v_q & v \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ = вертикальное окно v_q пересекается прямой из $\{g_i\}$ и существует точно одно окно $v \neq v_q$ из множества окон $v_1, \dots v_{2n}$, которое пересекается другой прямой из $\{g_i\}$.

Замечание. В этих формулах индекс q относится к концам интервалов $\gamma_1, \dots \gamma_n$. Множество значений q отождествляется с множеством $\{iL, iR\}_{i=1}^{n}$.

Следующая лемма вытекает из свойств (1.2).

Лемма 4, [8]. Для любого $\mathrm{P} \in \mathrm{Ti2}$, вероятность противоположного к

$$Z = \bigcup_{q=1}^{2n} \left[\begin{pmatrix} v_q & \overline{v_q} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} v_q & \overline{v_q} \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} v_q \\ 1 \end{pmatrix}_A \cup \begin{pmatrix} v_q & v \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

имеет порядок $o(l^2)$.

Так как $\mathbf{P}\begin{pmatrix} \overline{d_i} & v_1 & \dots & v_{2n} \\ \overline{k} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \overline{\gamma} & v_1 & \dots & v_{2n} \\ \overline{k} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, $i = 1, 2$, то из Леммы 4 получаем

$$\mathcal{L}_2 = \lim_{\phi \to 0} \frac{1}{\phi^2} \left\{ \sum_{q=1}^{2n} \left(\kappa_{q,1} + \kappa_{q,A} + \kappa_{q,2} + \sum_{b \neq q} \kappa_{q,b} \right) \right\}, \tag{4.3}$$

где использованы следующие обозначения :

$$\kappa_{q,m} = \sum_{i=1,2} \mathbf{P}\begin{pmatrix} \overline{d_i} & v_q & \overline{v_q} \\ \overline{k} & m & \overline{0} \end{pmatrix} - \mathbf{P}\begin{pmatrix} \overline{\gamma} & v_q & \overline{v_q} \\ \overline{k} & m & \overline{0} \end{pmatrix} - \mathbf{P}\begin{pmatrix} \overline{\gamma'} & v_q & \overline{v_q} \\ \overline{k} & m & \overline{0} \end{pmatrix}, \quad m = 1, 2,$$

$$\kappa_{q,A} = \sum_{i=1,2} \mathbf{P}\begin{pmatrix} \overline{d_i} \\ \overline{k} \end{pmatrix} \bigcap \begin{pmatrix} v_q \\ 1 \end{pmatrix}_A - \mathbf{P}\begin{pmatrix} \overline{\gamma} \\ \overline{k} \end{pmatrix} \bigcap \begin{pmatrix} v_q \\ 1 \end{pmatrix}_A - \mathbf{P}\begin{pmatrix} \overline{\gamma} \\ \overline{k} \end{pmatrix} \bigcap \begin{pmatrix} v_q \\ 1 \end{pmatrix}_A,$$

$$\kappa_{q,b} = \sum_{i=1,2} \mathbf{P}\begin{pmatrix} \overline{d_i} & v_q & v_b & \overline{v_q, v_b} \\ \overline{k} & 1 & 1 & \overline{0} \end{pmatrix} - \mathbf{P}\begin{pmatrix} \overline{\gamma} & v_q & v_b & \overline{v_q, v_b} \\ \overline{k} & 1 & 1 & \overline{0} \end{pmatrix} -$$

$$- \mathbf{P}\begin{pmatrix} \overline{\gamma'} & v_q & v_b & \overline{v_q, v_b} \\ \overline{k} & 1 & 1 & \overline{0} \end{pmatrix}.$$

Мы по отдельности анализируем слагаемые $\kappa_{q,1}$, $\kappa_{q,2}$, $\kappa_{q,A}$ и $\kappa_{q,b}$. Анализ слагаемого $\kappa_{q,1}$ включает "геометрическое вычитание", необходимое для выделения главного члена, порядок которого – $O(l^2)$. Для слагаемых $\kappa_{q,2}$, $\kappa_{q,A}$ и $\kappa_{q,b}$ нет необходимости проводить аналогичную работу, и поэтому анализ сводится к чистой комбинаторике.

Анализ $\kappa_{q,1}$. Разделим v_q на три подинтервала $v_{q,1}$, $v_{q,2}$ и $v_{q,3}$ (см. Рис. 3). По аддитивности $\kappa_{q,1} = \kappa_{q,1}(1) + \kappa_{q,1}(2) + \kappa_{q,1}(3)$, где соответствующие $\kappa_{q,1}(j)$, $j = 1, 2, 3$ получаются из $\kappa_{q,1}$ подстановкой $v_{q,j}$ вместо v_q. Из определения события $\begin{pmatrix} v_{q,3} & \overline{v_q} \\ 1 & \overline{0} \end{pmatrix}$ вытекает, что

$$\mathbf{P}\begin{pmatrix} \overline{d_1} & v_q & \overline{v_q} \\ \overline{k} & 1 & \overline{0} \end{pmatrix} = \mathbf{P}\begin{pmatrix} \overline{\gamma} & v_q & \overline{v_q} \\ \overline{k} & 1 & \overline{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}\begin{pmatrix} \overline{d_2} & v_q & \overline{v_q} \\ \overline{k} & 1 & \overline{0} \end{pmatrix} = \mathbf{P}\begin{pmatrix} \overline{\gamma'} & v_q & \overline{v_q} \\ \overline{k} & 1 & \overline{0} \end{pmatrix},$$

$$\kappa_{q,1}(3) = 0. \tag{4.4}$$

Прямую из $m \in \begin{pmatrix} v_{q,1} & \overline{v_q} \\ 1 & \overline{0} \end{pmatrix}$, пересекающую $v_{q,1}$, будем задавать координатами (x, ψ), $x \in v_{q,1}$, ψ – угол между $v_{q,1}$ и этой прямой. Мы используем аналогичные координаты для прямой из $m \in \begin{pmatrix} v_{q,2} & \overline{v_q} \\ 1 & \overline{0} \end{pmatrix}$, пересекающей $v_{q,2}$. Имеем

$$\kappa_{q,1} = \kappa_{q,1}(1) + \kappa_{q,1}(2) = \tag{4.5}$$

$$= \int_{v_{q,1}} dx \int_{\Psi(x)} \Pi_{x,\psi} \left[\sum_{i=1,2} \begin{pmatrix} \overline{d_i} & \overline{v_q} \\ \overline{k} & \overline{0} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \overline{\gamma} & \overline{v_q} \\ \overline{k} & \overline{0} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \overline{\gamma'} & \overline{v_q} \\ \overline{k} & \overline{0} \end{pmatrix} \right] f(\psi) \sin\psi \, d\psi +$$

$$+ \int_{v_{q,2}} dx \int_{\Psi(x)} \Pi_{x,\psi} \left[\sum_{i=1,2} \begin{pmatrix} \overline{d_i} & \overline{v_q} \\ \overline{k} & \overline{0} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \overline{\gamma} & \overline{v_q} \\ \overline{k} & \overline{0} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \overline{\gamma'} & \overline{v_q} \\ \overline{k} & \overline{0} \end{pmatrix} \right] f(\psi) \sin\psi \, d\psi,$$

где $\Pi_{x,\psi}$ – распределение Пальма Π_g для $g = (x, \psi)$. Множество направлений $\Psi(x)$ зависит от x и соответствует условию $\{g_{x,\psi}$ не пересекает окна $\overline{v_q}\}$. Используя трансляционную инвариантность, перепишем (4.5) в виде (точка Q' указана на Рис. 3)

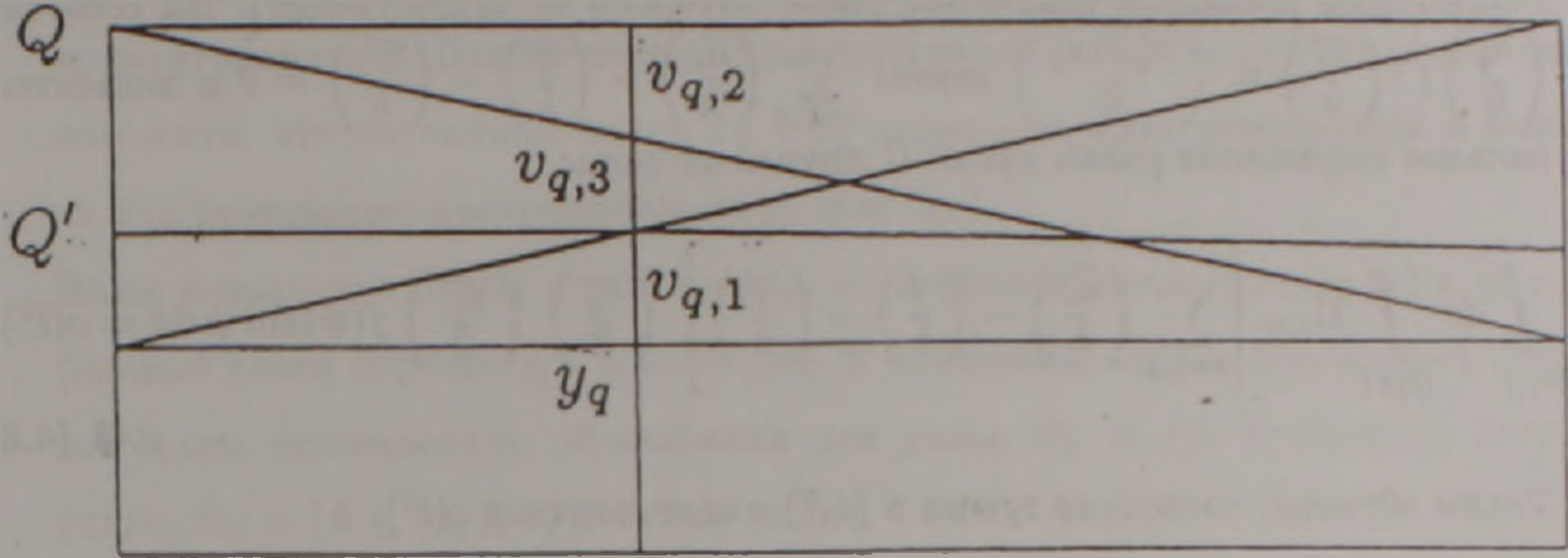

Рис. 3. Прямоугольник R' получается из R с помощью сдвига вниз. В R' верхняя горизонтальная сторона содержит верхний конец $v_{q,1}$.

$$\begin{aligned}
\kappa_{q,1} = \int\limits_{v_{q,1}} dx \int\limits_{\Psi(x)} \Pi_{x,\psi} \Bigg[\sum_{i=1,2} \begin{pmatrix} \bar{d}_i & \overline{v_q} \\ k & \bar{0} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{\gamma} & \overline{v_q} \\ k & \bar{0} \end{pmatrix} - \\
- \begin{pmatrix} \bar{\gamma}' & \overline{v_q} \\ k & \bar{0} \end{pmatrix} \Bigg] f(\psi) \sin\psi \, d\psi + \int\limits_{v_{q,1}} dx \int\limits_{\Psi'(x)} \Pi_{x,\psi} \Bigg[\sum_{i=1,2} \begin{pmatrix} \bar{d}_i & \overline{v_q} \\ k & \bar{0} \end{pmatrix} - \\
- \begin{pmatrix} \bar{\gamma} & \overline{v_q'} \\ k & \bar{0} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{\gamma}' & \overline{v_q} \\ k & \bar{0} \end{pmatrix} \Bigg] f(\psi) \sin\psi \, d\psi + o(l^2),
\end{aligned} \tag{4.6}$$

где $\Psi'(x) = \Psi(x')$ с $x' = x + |Q'Q|$. Интервалы v_q' суть образы v_q при том же сдвиге. Теперь мы можем переписать (4.6) в виде

$$\begin{aligned}
\int\limits_{v_{q,1}} dx \int\limits_{\Psi(x)\cap\Psi'(x)^c} \Pi_{x,\psi} \Bigg[\sum_{i=1,2} \begin{pmatrix} \bar{d}_i & \overline{v_q} \\ k & \bar{0} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{\gamma} & \overline{v_q} \\ k & \bar{0} \end{pmatrix} - \\
- \begin{pmatrix} \bar{\gamma}' & \overline{v_q} \\ k & \bar{0} \end{pmatrix} \Bigg] f(\psi) \sin\psi \, d\psi + \int\limits_{v_{q,1}} dx \int\limits_{\Psi'(x)\cap\Psi(x)^c} \Pi_{x,\psi} \Bigg[\sum_{i=1,2} \begin{pmatrix} \bar{d}_i & \overline{v_q} \\ k & \bar{0} \end{pmatrix} - \\
- \begin{pmatrix} \bar{\gamma} & \overline{v_q'} \\ k & \bar{0} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{\gamma}' & \overline{v_q} \\ k & \bar{0} \end{pmatrix} \Bigg] f(\psi) \sin\psi \, d\psi \pm
\end{aligned}$$

$$\pm \int_{v_{q,1}} dx \int_{\Psi(x)\bigcap \Psi'(x)} \Pi_{x,\psi} \left[\sum_{i=1,2} \binom{\overline{d}_i}{k} - \binom{\overline{\gamma}}{k} - \binom{\overline{\gamma}'}{k} \right] \times$$

$$\times \left[\binom{\overline{v}_q}{0} - \binom{\overline{v}_q'}{0} \right] f(\psi) \sin\psi \, d\psi + o(l^2). \tag{4.7}$$

Рассмотрим последнее слагаемое (знак которого не существенен). На событии $\binom{\overline{v}_q'}{0} \bigcap \binom{\overline{v}_q}{0} = \binom{\overline{v_q' \cup v_q}}{0}$ имеем $\sum_{i=1,2} \binom{\overline{d}_i}{k} - \binom{\overline{\gamma}}{k} - \binom{\overline{\gamma}'}{k} = 0$ и подынтегральное выражение равно нулю. С другой стороны

$$\int_{v_{q,1}} dx \int_{(0,\pi)} \Pi_{x,\psi} \left[\sum_{i=1,2} \binom{\overline{d}_i}{k} - \binom{\overline{\gamma}}{k} - \binom{\overline{\gamma}'}{k} \right] \binom{\overline{v}_q}{0} \binom{\overline{v}_q'}{0} f(\psi) \sin\psi \, d\psi = o(l^2). \tag{4.8}$$

Таким образом, последняя сумма в (4.7) имеет порядок $o(l^2)$.

Вернемся к первым двум интегралам в (4.7). Так как каждое множество интегрирования стягивается к точке $(0,\alpha)$ на $x,\psi-$ плоскости, которая соответствует горизонтальной прямой $g(\alpha)$, для каждого интеграла главный член пропорционален $l^2 \Delta_i \Pi_{g(\alpha)} \binom{\overline{\gamma}}{k} = l^2 \Delta_i \pi_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha)$.

Важно отметить, что коэффициент пропорциональности зависит только от расположения отрезков на Рис. 2 и не зависит от выбора вероятностного распределения $\mathrm{P} \in$ Ti2. Таким образом, пришли к следующему результату.

Величина $\sum_{q=1}^{2n} \kappa_{q1}$ имеет порядок l^2. А именно

$$\sum_{q=1}^{2n} \kappa_{q1} = -2\, f(\alpha) \sum_{i=1}^{n} C_i' \, \Delta_i \pi_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha)\, l^2 + o(l^2), \tag{4.9}$$

где C_i' константы, зависящие только от взаимного расположения точек $y_1, \ldots, y_{2n}$. и $\pi_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha) = \Pi_g \binom{\overline{\gamma}}{k}$.

Анализ $\kappa_{q,A}$. Очевидно, что $\kappa_{q,A} = O(l^2)$ (см. §1) и предельное положение прямой из $\{g_i\}$, пересекающей v_q, есть тестовая прямая $g(\alpha)$. Следовательно, $\sum_{q=1}^{2n} \kappa_{q,A}$ имеет вид (4.9) с некоторыми новыми коэффициентами C_i''. Из этого результата и из (4.9) следует

Величина $\sum_{q=1}^{2n} (\kappa_{q1} + \kappa_{qA})$ имеет порядок l^2. А именно

$$\sum_{q=1}^{2n} (\kappa_{q1} + \kappa_{qA}) = -2\, f(\alpha) \sum_{i=1}^{n} C_i \, \Delta_i \pi_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha)\, l^2 + o(l^2), \tag{4.10}$$

где C_i – константы, зависящие только от взаимного расположения точек y_1, ..., y_{2n} и $\pi_{\overline{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha) = \Pi_A \left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)$. Точные значения постоянных C_i будут вычислены в конце этого параграфа.

Анализ $\kappa_{q,b}$. Анализ разбивается на случаи, зависящие от положений точек пересечения $x_q \in v_q$ и $x_b \in v_b$ относительно подразбиений v_q и v_b диагоналями прямоугольника R. Для вычисления соответствующих вероятностей можно предположить, что случайные точки x_q и x_b асимптотически независимы и каждая из них равномерно распределена на v_q или v_b.

Ниже используем $S(q, b) = +1$, если $y_q = iL$ (левый конец отрезка γ_i) и $y_b = jR$ (правый конец отрезка γ_j), и наоборот. В противном случае $S(q, b) = -1$. Также мы будем использовать обозначения для углов $\Theta_a = \{\Psi \in (0, \pi/2)\}$ (острые углы), $\Theta_o = \{\Psi \in (\pi/2, \pi)\}$ (тупые углы).

Величина $\sum_{q=1}^{2n} \sum_{b \neq q} \kappa_{qb}$ **имеет порядок** l^2. **А именно**

$$
\begin{aligned}
&\sum_{q=1}^{2n} \sum_{b \neq q} \kappa_{qb} = \\
&= \sum_{q<b} (y_q - y_b)^2 \, c_{q,b,vv} \, S(q, b) \left[\Delta_{ij}^2 \Pi_{q,b,vv} \left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right) \times \left(\Theta_a \times \Theta_a \bigcup \Theta_o \times \Theta_o\right) \right) - \right. \\
&\qquad \left. - \Delta_{bq}^2 \Pi_{i,j,vv} \left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right) \times \left(\Theta_o \times \Theta_a \bigcup \Theta_a \times \Theta_o\right) \right) \right] - \\
&\qquad - \frac{1}{T} \sum_{q=2}^{2n-1} y_q (T - y_q) \sum_{b \neq q} S(q, b) \, c_{q,b,vv} \, \Delta_{ij}^2 \Omega(q, b) l^2 + o(l^2),
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

где $\Omega(q, b) = \Pi_{q,b,vv} \left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right) \times (\Theta_a \times \Theta_a \bigcup \Theta_o \times \Theta_o) \right) -$
$-\Pi_{q,b,vv} \left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right) \times (\Theta_o \times \Theta_a \bigcup \Theta_a \times \Theta_o) \right)$.

Анализ $\kappa_{q,2}$. Случайные точки $x_1, x_2 \in v_q$, в которых происходит пересечение, асимптотически независимы, и каждая из них равномерно распределена на v_q. Рассуждая как и в предыдущем случае, получаем

Величина $\sum_{q=1}^{2n} \kappa_{q,2}$ **имеет порядок** l^2. **А именно**

$$
\sum_{q=1}^{2n} \kappa_{q,2} = \sum_{q=2}^{2n-1} y_q (T - y_q) \, c_{q,q,vv} \Delta_{ii}^2 \, \Omega(q, q) \, l^2 + o(l^2). \tag{4.12}
$$

Анализ соотношения (4.3) завершен, и мы в состоянии привести результат приравнивания коэффициентов при слагаемых порядка l^2. Из (4.2), (4.10) – (4.12) получаем

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha)}{\partial t_i} t_i + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial p_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha)}{\partial u_i} u_i + \frac{\partial^2 p_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha)}{\partial \alpha^2} =$$
$$= -2\, f(\alpha) \sum_{i=1}^{n} C_i\, \Delta_i \pi_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha) + \tag{4.13}$$
$$+ \sum_{i<j} (y_i - y_j)^2\, c_{i,j,vv}\, S(i,j)\, \Delta^2_{rq} \Omega(i,j) + \Xi,$$

где

$$\Xi = -\sum_{q=2}^{2n-1} y_q (T - y_q) \sum_{b \neq q} S(q,b)\, c_{q,b,vv}\, \Delta^2_{ij}\, \Omega(q,b) + \sum_{q=2}^{2n-1} y_q (T - y_q)\, c_{q,q,vv}\, \Delta^2_{ii} \Omega(q,q). \tag{4.14}$$

Остается вычислить значения постоянных C_i. Умножим (4.13) на k_i и просуммируем по $\overline{k}$.

Так как $\sum_{\overline{k}} k_i\, p_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha) = \lambda(\alpha)\, t_i$ и все члены, содержащие вторую разность, обращаются в нуль, получаем $\lambda(\alpha)\, t_i + \lambda''(\alpha)\, t_i = -2\, f(\alpha)\, C_i$. Используя $\lambda''(\alpha) + \lambda(\alpha) = 2\, f(\alpha)$ (см. [2]), получим $C_i = -\, t_i$.

§5. УСЛОВИЯ ФАКТОРИЗАЦИИ И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Начнем с условий факторизации a) и b), указанных во введении. Используя Лемму 2 для

$$F(m, \Psi_1, \Psi_2) = I\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right) \cdot [I(\Theta_a \times \Theta_a) + I(\Theta_o \times \Theta_o) - I(\Theta_a \times \Theta_o) - I(\Theta_o \times \Theta_a)],$$

произведения $c_{i,j,vv}\, \Omega(i,j)$ в (4.7), (4.8) можно записать в терминах горизонтальных окон. Получим

$$c_{i,j,vv}\, \Omega(i,j) = c_{i,j,hh}\, E_{i,j,hh} \left(I\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right) [I(\Theta_a \times \Theta_a) + I(\Theta_o \times \Theta_o) - \right.$$
$$\left. - I(\Theta_a \times \Theta_o) - I(\Theta_o \times \Theta_a)]\, |\cot \Psi_1 \cdot \cot \Psi_2| \right). \tag{5.1}$$

Вместе с элементарным тождеством $\cot \Psi_1 \cdot \cot \Psi_2 = [I(\Theta_a \times \Theta_a) + I(\Theta_o \times \Theta_o) - I(\Theta_a \times \Theta_o) - I(\Theta_o \times \Theta_a)]\, |\cot \Psi_1 \cdot \cot \Psi_2|$, из (5.1) следует

$$c_{i,j,vv}\, \Omega(i,j) = c_{i,j,hh}\, E_{i,j,hh} \left(I\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right) \cot \Psi_1 \cot \Psi_2 \right). \tag{5.2}$$

При выполнении Условий a) и b), и используя (3.9), получаем

$$E_{i,j,hh} \left(I\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right) \cot \Psi_1 \cot \Psi_2 \right) = \Pi_{i,j,hh} \left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right) E_{i,j,hh} (\cot \Psi_1 \cot \Psi_2) =$$
$$= \frac{\lambda'(\alpha)^2}{\lambda(\alpha)^2}\, \Pi_{i,j,hh} \left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right). \tag{5.4}$$

Докажем, что при выполнении Условий a) и b) выражение $\Xi = 0$. Действительно, используя обобщенные формулы Пальма, получаем

$$\Xi = -\sum_{q=2}^{2n-1} y_q(T-y_q)\sum_{b\neq q} S(q,b)\left[\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_i\,\partial t_j}-\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_i\,\partial u_s}-\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_j\,\partial u_r}+\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial u_s\,\partial u_r}\right]+$$
$$+\sum_{q=2}^{2n-1} y_q(T-y_q)\left[\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_i^2}-\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_i\,\partial u_i}-\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_i\,\partial u_{i-1}}+\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial u_i\,\partial u_{i-1}}\right],$$

где в двойных суммах индекс $s=i$, если $q=iR$ и $s=i-1$, если $q=iL$ (см. §2). Аналогично, индекс $r=j$, если $q=jR$ и $r=j-1$, если $q=jL$ (см. Замечание). Для любого $i\neq j$ наличие множителя $S(q,b)$ обращает в нуль члены, соответствующие $b=jL$ и $b=jR$. Также и в двойной сумме, если $i=j$, то y_q и y_b суть концы одного и того же интервала γ_i, поэтому $S(q,b)=S(b,q)=+1$. Так как частные производные в первой и во второй строчках выражения Ξ встречаются с разными знаками, то получаем $\Xi=0$.

Остается преобразовать слагаемое (см. (4.7))

$$\frac{[\lambda'(\alpha)]^2}{[\lambda(\alpha)]^2}\sum_{i<j}(y_i-y_j)^2\, c_{i,j,\bullet\bullet}\, S(i,j)\,\Delta^2_{rq}\Pi_{i,j,hh}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)=$$
$$=\frac{[\lambda'(\alpha)]^2}{[\lambda(\alpha)]^2}\sum_{\substack{\gamma_i,\gamma_j\\ i<j}}\Big[(y_{iL}-y_{jR})^2 c_{iL,jR,hh}\,\Delta^2_{ij}\Pi_{iL,jR,hh}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)+$$
$$+(y_{iR}-y_{jL})^2 c_{iR,jL,hh}\,\Delta^2_{ij}\Pi_{iR,jL,hh}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)\Big]-$$
$$-\frac{[\lambda'(\alpha)]^2}{[\lambda(\alpha)]^2}\sum_{\substack{\gamma_i,\gamma_j\\ i<j}}\Big[(y_{iR}-y_{jR})^2 c_{iR,jR,hh}\,\Delta^2_{ij}\Pi_{iR,jR,hh}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)+$$
$$+(y_{iL}-y_{jL})^2 c_{iL,jL,hh}\,\Delta^2_{ij}\Pi_{iL,jL,hh}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)\Big]+$$
$$+\frac{[\lambda'(\alpha)]^2}{[\lambda(\alpha)]^2}\sum_{i=1}^{n} t_i^2\, c_{iL,iR,hh}\,\Delta^2_{ii}\Pi_{iL,iR,hh}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right).$$

Используя (2.7), (2.9) — (2.11) и

$$-(y_{iL}-y_{jL})^2-(y_{iR}-y_{jR})^2+(y_{iR}-y_{jL})^2+(y_{iL}-y_{jR})^2=2t_it_j,$$

$$-(y_{iR}-y_{jR})^2+(y_{iL}-y_{jR})^2-(y_{iL}-y_{(j+1)L})^2+(y_{iR}-y_{(j+1)L})^2=-2t_iu_j,$$

$$-(y_{iR}-y_{jR})^2+(y_{iR}-y_{(j+1)L})^2+(y_{(i+1)L}-y_{jR})^2-(y_{(i+1)L}-y_{(j+1)L})^2=2u_iu_j.$$

вышеупомянутое слагаемое можно переписать в виде

$$\frac{[\lambda'(\alpha)]^2}{[\lambda(\alpha)]^2}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_i^2}t_i^2+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial u_j^2}u_j^2+2\sum_{i<j}\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_i\,\partial t_j}t_i\,t_j+\right.$$
$$\left.+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_i\,\partial u_j}t_i\,u_j+2\sum_{i<j}^{n-1}\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial u_i\,\partial u_j}u_i\,u_j\right]. \tag{5.5}$$

Таким образом, при выполнении Условий a), b) формула (4.7) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial p_{\overline{k}}(\overline{t},\overline{u},\alpha)}{\partial t_i}t_i+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial p_{\overline{k}}(\overline{t},\overline{u},\alpha)}{\partial u_i}u_i+\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}(\overline{t},\overline{u},\alpha)}{\partial\alpha^2}=$$
$$=2\,f(\alpha)\sum_{i=1}^{n}t_i\,\Delta_i\pi_{\overline{k}}(\overline{t},\overline{u},\alpha)+\frac{[\lambda'(\alpha)]^2}{[\lambda(\alpha)]^2}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_i^2}t_i^2+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial u_j^2}u_j^2+\right. \tag{5.6}$$
$$\left.+2\sum_{i<j}\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_i\,\partial t_j}t_i\,t_j+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_i\,\partial u_j}t_i\,u_j+2\sum_{i\neq j=1}^{n-1}\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial u_i\,\partial u_j}u_i\,u_j\right].$$

Теперь рассмотрим условие "достаточного перемешивания" c) (см. Введение). Аналитически оно имеет вид

$$\pi_{\overline{k}}(\overline{t},\overline{u},\alpha)=p_{\overline{k}}(\overline{t},\overline{u},\alpha). \tag{5.7}$$

Очевидно, что используя условие (5.7), можно соотношение (5.6) свести к дифференциальному уравнению. Решая это уравнение вместе с начальными условиями

$$p_{\overline{0}}(\overline{0},\overline{u},\alpha)=1 \quad \text{и} \quad p_{\overline{k}}(\overline{0},\overline{u},\alpha)=0, \quad \text{при} \quad \overline{k}\not\equiv\overline{0}$$

приходим к следующей теореме (см. [8]).

Теорема. Пусть для случайного процесса прямых $\{g_i\}$ из класса Ti2 маркированный точечный процесс $\{x_i,\Psi_i\}_\alpha$ удовлетворяет Условию a). Если для некоторого направления α выполнены Условия b) и c), то для того же значения α точечный процесс $\{x_i\}_\alpha$ необходимо пуассоновский, т. е. $p_{\overline{k}}(\overline{t},\overline{u},\alpha)=\prod_{i=1}^{n}\frac{[\lambda(\alpha)\,t_i]^{k_i}}{k_i!}\,e^{-\lambda(\alpha)\,t_i}.$

ABSTRACT. The present paper studies second order homogeneous line processes in the plane, especially the marked point processes of intersections that they induce on test lines, the marks being the angles at which the intersections with a test line occur. Its scope is essentially the same as that of the earlier paper by R. V. Ambartzumian and V. K. Oganian "Palm distributions in the analysis of homogenous random line processes

in the plane", Journal of Contemporary Math. Anal. (Armenian Academy of Sciences), vol. 33, no. 4, pp. 31 — 58, 1998. The earlier paper had the disadvantage of being methodologically inhomogeneous : it used Invariant Imbedding for the first order analysis and Combinatorial integral geometry decompositions for the second order analysis. The present paper removes this disadvantage by extending Invariant Imbedding approach to the second order analysis, thus yielding necessary methodological integrity. Applying "Invariant Imbedding" we obtain two relations expressing the derivatives of the joint probabilities for numbers of intersections that occur in a system of disjoint intervals on a test line in terms of the first and the second order Palm probabilities of the same events. From these relations, conditions of Poissonity of n–dimensional distributions for any $n \geq 1$ are derived.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology, John Wiley and Sons, Chichester, 1982.
2. R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge University Press, 1990.
3. R. V. Ambartzumian, W. Weil (editors), Stochastic Geometry, Geometric Statistics, Stereology, Teubner Texte zur Mathematik, vol. 65, 1984.
4. V. K. Oganian, "On Palm distributions of processes of lines in the plane", in [5], pp. 124 - 132, 1984.
5. V. K. Oganian, " Combinatorial decompositions and homogeneous geometrical processes", Acta Appl. Math., Holland, vol. 9, no. 1 — 2, pp. 71 — 81, 1987.
6. В. К. Оганян, А. Абдалла, "Маркированные точечные процессы пересечений, порожденные случайными процессами прямых на плоскости", Изв. НАН Армении, Математика том 28, № 5, стр. 67 — 77, 1993.
7. R. V. Ambartzumian, "Invariant imbedding in stochastic geometry", Докл. АН Армении, том 98, № 3, стр. 185 — 196, 1998. Перепечатано в Известия АН Армении, Математика, том 33, № 4, стр. 5 - 17, 1998.
8. Р. В. Амбарцумян, В. К. Оганян, "Распределения Пальма в анализе однородных случайных процессов прямых на плоскости", Известия АН Армении, Математика, том 33, № 4, стр. 31 — 58, 1998.
9. Й. Керстан, К. Маттес, Й. Мекке, Безгранично делимые точечные процессы, Москва, Наука, 1982.
10. D. Stoyan, W. S. Kendall and J. Mecke, Stochastic Geometry and its Applications, John Wiley, Chichester, 1987.
11. E. F. Harding and D. G. Kendall (Editors), Stochastic Geometry, J. Wiley & Sons, London, New York, Sydney, Toronto, 1974.
12. В. В. Степанов, Дифференциальные Уравнения, Москва, Физ. Мат. ГИЗ., 1950.
13. R. V. Ambartzumian, "Factorization in integral and stochastic geometry," Teubner Texte zur Mathematik, in [3], pp. 14 - 33, 1984.
14. O. Kallenberg, Random Measures, Akademie Verlag, Berlin, Reading, Mass., 1983.
15. Л. А. Сантало, Интегральная Геометрия и Геометрические Вероятности, Москва, Наука, 1983.

12 декабря 1998

Ереванский государственный университет
E–mail : victo@aua.am