ФУНКЦИИ ОТРЕЗКА В $\mathbb{R}^3$ И ПОРОЖДЕНИЕ МЕР

А. Н. Давтян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 6, 1999

Статья изучает линейно–аддитивные функции $L(\nu)$, определенные на отрезках $\nu \subset \mathbb{R}^3$. Такие сегментные функции представляют интерес при изучении мер m в пространстве $\mathbb{E}$ плоскостей в $\mathbb{R}^3$, так как m порождает сегментную функцию $L(\nu)$ по формуле $L(\nu) = m$(множество плоскостей, пересекающих ν). С другой стороны, сегментные функции $L(\nu)$ появляются при комбинаторном построении валюаций Ψ_L в пространстве $\mathbb{\Gamma}$ прямых в $\mathbb{R}^3$. В статье доказано, что при некоторых предположениях гладкости, валюация Ψ_L продолжается до знакопеременной меры в $\mathbb{\Gamma}$ тогда и только тогда, когда сегментная функция $L(\nu)$ порождается знакопеременной мерой m в $\mathbb{E}$. Как следствие этого результата получена характеризация линейно–аддитивных метрик в терминах знакопеременных мер в $\mathbb{E}$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Классическую четвертую проблему Гильберта на плоскости $\mathbb{R}^2$ можно сформулировать следующим образом : описать все плоские метрики, для которых геодезическими являются обычные евклидовы прямые или, эквивалентно, описать все плоские линейно–аддитивные метрики. К настоящему времени эта проблема имеет три решения (см. [1], [12] и [2]). Методы, использованные в [1], [12] и [2], различны, но все три автора описывают метрики в терминах мер в пространстве $\mathbf{G}$ прямых на плоскости $\mathbb{R}^2$. В [4] Р. В. Амбарцумян указал на связь между четвертой проблемой Гильберта на плоскости и проблемой продолжения комбинаторных валюаций до мер в пространстве $\mathbf{G}$. Этот подход является основным и в работах [5] — [8]. В пространстве $\mathbb{E}$ плоскостей в $\mathbb{R}^3$ проблема продолжения валюаций до мер рассматривалась в [9], [10]. Также имеется более ранний результат Погорелова [12], согласно которому знакопеременные меры, а не меры в пространстве $\mathbb{E}$, должны быть использованы при описании линейно–аддитивных метрик в $\mathbb{R}^3$.

Сегментная функция $L(\nu)$ – функция, определенная в пространстве отрезков ν в $\mathbb{R}^3$. Эквивалентно, $L(\nu)$ – симметричная функция $L(\nu) = L(P_1, P_2)$, $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^3$. Сегментная функция L линейно–аддитивна, если для любых трех коллинеарных точек P_1, P_2 и P_3 в $\mathbb{R}^3$ с P_2 между P_1 и P_3

$$L(P_1, P_3) = L(P_1, P_2) + L(P_2, P_3).$$

Пусть $\mathcal{L}$ – класс непрерывных, линейно–аддитивных сегментных функций в $\mathbb{R}^3$. Пусть $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}$ – класс линейно–аддитивных метрик в $\mathbb{R}^3$, а $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}$ – класс функций L, представимых в виде

$$L(P_1, P_2) = m([P_1, P_2]), \tag{1.1}$$

где $[P_1, P_2]$ – множество плоскостей, пересекающих прямолинейный отрезок (P_1, P_2), а m – **беспучковая знакопеременная мера в** $\mathbb{E}$ (см. §4). Результат Погорелова гласит, что $\mathcal{H} \subset \mathcal{M}$, т.е. любая линейно–аддитивная метрика в $\mathbb{R}^3$ допускает представление в виде (1.1).

В недавней работе [11] дано описание класса $\mathcal{H}$ в рамках подхода о продолжении меры, начиная с комбинаторной валюации Ψ_L в пространстве $\mathbb{G}$ прямых в $\mathbb{R}^3$, которая была определена в [3], Глава 10. Пусть $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}$ – класс, определенный условием, что для любой $L \in \mathcal{L}_0$, соответствующая комбинаторная валюация Ψ_L, определенная в пространстве $\mathbb{G}$, продолжается до **знакопеременной меры** в $\mathbb{G}$, и пусть $\mathcal{L}_0^+ \subset \mathcal{L}$ соответствует случаям, в которых валюация порождает неотрицательную меру в $\mathbb{G}$. В [11] дана характеризация класса $\mathcal{L}_0$ в терминах **флаговой плотности** функции L и показано, что $\mathcal{H} = \mathcal{L}_0^+$. Настоящая статья использует эту характеризацию, чтобы описать класс $\mathcal{M}$. Оказывается, что при некоторых условиях гладкости, валюация Ψ_L продолжается до знакопеременной меры в $\mathbb{G}$ тогда и только тогда, когда сегментная функция $L(\nu)$ порождается знакопеременной мерой m в $\mathbb{E}$. Как следствие этого результата получена характеризация линейно–аддитивных метрик в терминах знакопеременных мер в $\mathbb{E}$.

Статья имеет следующую структуру : §2 содержит необходимые интегрально–геометрические обозначения и определения. §3 знакомит с основным результатом работы [11], о порождении мер в пространстве $\mathbb{G}$ с помощью комбинаторных валюаций Ψ_L (необходимое и достаточное условия на флаговую плотность функции L, при которых соответствующая валюация является знакопеременной мерой на

$\mathbb{\Gamma}$). Необходимые результаты по аналогичным вопросам для пространства $\mathbb{E}$, полученные в [9] и [10], описаны в параграфе 4. Опираясь на ранние работы, в параграфе 5 доказывается основной результат : $\mathcal{M} = \mathcal{L}_0$.

§2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

В этом параграфе приводятся необходимые обозначения и определения :

$\mathbb{E}$ = пространство плоскостей в $\mathbb{R}^3$, $e \in \mathbb{E}$;

$\mathbb{\Gamma}$ = пространство прямых в $\mathbb{R}^3$, $\gamma \in \mathbb{\Gamma}$;

S^2 = пространство направлений (единичная сфера) в $\mathbb{R}^3$;

$\mathcal{E}_2$ = пространство пространственных направлений, т.е. проективная плоскость ;

$\mathcal{E}_1$ = пространство плоских направлений (грубо говоря, полуокружность) ;

δ = **пластина** , т.е. ограниченное выпуклое подмножество на плоскости в $\mathbb{R}^3$;

$\partial\delta$ = граница пластины δ ;

$[\delta] = \{\gamma \in \mathbb{\Gamma} : \gamma$ пересекает внутренность пластины $\delta\}$;

$\nu = (P_1, P_2)$ = прямолинейный отрезок в $\mathbb{R}^3$, концы которого суть $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^3$;

$[\nu] = [P_1, P_2] = \{e \in \mathbb{E} : e$ пересекает отрезок $\nu\}$;

$\mathcal{F}$ = пространство флагов в $\mathbb{R}^3$.

Флаг f в $\mathbb{R}^3$ есть триада (P, γ, e), состоящая из точки $P \in \mathbb{R}^3$, прямой γ, проходящей через точку P, и плоскости e (плоскость флага f), проходящей через γ. Альтернативно, $f = (P, \Omega, \phi)$ с $P \in \mathbb{R}^3$, $\Omega \in \mathcal{E}_2$, $\phi \in \mathcal{E}_1(\Omega)$, где Ω – пространственное направление прямой γ, ϕ – угол вращения плоскости e вокруг γ и $\mathcal{E}_1(\Omega) = \mathcal{E}_1(\gamma)$ представляет пространство плоских направлений, ортогональных к γ.

Флаг f представляется парой $f = (P, \Lambda)$, где $P \in \mathbb{R}^3$ и $\Lambda = (\Omega, \phi)$ – **свободный флаг** флага f. Итак, пространство $\mathcal{F}$ является произведением $\mathbb{R}^3 \times \nabla$, где ∇ – пространство свободных флагов. Ясно, что свободные флаги можно представить в следующем дуальном виде $\Lambda = (\omega, \varphi)$ с помощью параметров ω и φ, где $\omega \in \mathcal{E}_2$ – направление, нормальное к плоскости флага f, и $\varphi \in \mathcal{E}_1(\omega)$ – плоское направление в плоскости флага f, который соответствует направлению Ω. Следовательно, флаг $f \in \mathcal{F}$ можно представить в виде $f = (P, \omega, \varphi) = (P, e, g)$, где e – плоскость, содержащая P и нормальное направление которой есть ω, а g – прямая в e, содержащая точку P, плоское направление которой в плоскости e есть φ.

Неполный флаг в $\mathbb{R}^3$ есть пара $(P, \gamma) = (P, \Omega)$, состоящая из точки $P \in \mathbb{R}^3$ и прямой γ, проходящей через P и определяемой своим пространственным направлением Ω. Пространство неполных флагов обозначается через $\mathcal{F}_0$.

Клин есть пара $w = (\nu, V)$, где $\nu \subset \gamma$ – прямолинейный отрезок, а V – замкнутая дуга в $\mathcal{E}_1(\nu) = \mathcal{E}_1(\gamma)$. Каждому клину w соответствует множество флагов

$$[w] = \{f = (P, \gamma, e) : \; P \in \nu, \, \Omega \text{ совпадает с направлением отрезка } \nu, \, \phi \in V\},$$

а также две бесконечные двугранные области, ограниченные двумя плоскостями, проходящими через ν, ориентации которых соответствуют концам дуги V.

Пусть $\rho : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ – трижды непрерывно дифференцируемая по всем аргументам флаговая функция. Обозначим через $\lambda = \lambda(\eta, \sigma)$ положительный поворот сферы S^2 (эквивалентно пространства ∇) вокруг оси $\eta \in S^2$ на угол σ ; положительное направление поворота вокруг $\eta \in S^2$ определяется по правилу буравчика. Для заданного свободного флага Λ будем писать $\lambda\Lambda$ для свободного флага, полученного из Λ вращением λ. Положим

$$\frac{\partial \rho(f)}{\partial_\eta \Lambda} = \left. \frac{\partial \rho(P, \lambda\Lambda)}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=0}.$$

Обозначим через $\dfrac{\partial \rho(f)}{\partial_\eta P}$ производную функции ρ по P в направлении η.

§3. ПОРОЖДЕНИЕ МЕР В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbb{\Gamma}$

В этом параграфе мы приводим результаты работы [11]. Для конечного множества пластин $\{\delta_i\}$ рассмотрим кольцо Сильвестра

$$Sr\{\delta_i\} = \text{ минимальное кольцо подмножеств } \mathbb{\Gamma} \text{ содержащее все множества } [\delta_i],$$

и определим кольцо $U_{\mathbb{\Gamma}}$ следующим образом : $U_{\mathbb{\Gamma}} = \bigcup Sr\{\delta_i\}$, где объединение берется по всевозможным конечным множествам пластин $\{\delta_i\} \subset \mathbb{R}^3$.

Пусть ρ_0 – флаговая функция, определенная в пространстве $\mathcal{F}_0$. Она порождает сегментную функцию

$$L(\nu) = \int_\nu \rho_0(P, \Omega)\, dl, \tag{3.1}$$

где интегрирование по мере длины на ν, а путем интегрирования является отрезок ν, т.е. $P \in \nu$, в аргументе ρ_0 параметр Ω совпадает с направлением отрезка ν. Для заданного клина $w = (\nu, V)$ определим следующую функцию :

$$W_0(w) = \frac{L(\nu)}{2} (\sin|V| - |V| \cos|V|), \tag{3.2}$$

где функция L определяется по формуле (3.1), а $|V|$ – величина угла дуги V. Напомним, что функция клина W_0 впервые была рассмотрена в [3], глава 10 для случая $L(\nu)$ = евклидовой длине отрезка ν. Мы будем говорить, что функция клина W_0 соответствует ρ_0 (или L).

Для определения валюации Ψ_L на $U_{\mathbb{\Gamma}}$ будем использовать следующие геометрические построения (см. [3], глава 10). Для каждого $B \in U_{\mathbb{\Gamma}}$, множество $\{\delta_i\}$ можно найти так, чтобы $B \in Sr\{\delta_i\}$. С каждой парой пластин δ_1 и δ_2, расположенных в общей позиции в $\mathbb{R}^3$ и с прямолинейным отрезком ν, соединяющем точки l_1 и l_2, $(l_1, l_2) \in \partial\delta_1 \times \partial\delta_2$, свяжем два клина $w^+ = (\nu, V^+)$ и $w^- = (\nu, V^-)$, где дуги V^+ и V^- соответствуют плоским углам между плоскостями $e_1(l_1, l_2)$ и $e_2(l_1, l_2)$. По определению, $e_s(l_1, l_2)$ содержит прямую (l_1, l_2) и прямую, касательную к $\partial\delta_s$ в точке l_s, $s = 1, 2$. Обозначим через ψ_i угол между прямой, проходящей через точки l_1, l_2 и прямой, касательной к $\partial\delta_i$ в точке l_i. Положим

$$\Psi_L(B) =$$
$$= \sum_{i \le j} \frac{1}{\pi} \int_{\partial\delta_i} \int_{\partial\delta_j} \frac{\sin\psi_1 \sin\psi_2}{|l_1, l_2|} \left[c_B^+(l_1, l_2)\, W_0(w^+) + c_B^-(l_1, l_2)\, W_0(w^-)\right] \mathrm{d}l_1\, \mathrm{d}l_2, \tag{3.3}$$

где интегрирование проводится по мере длины на $\partial\delta_i$, целочисленные коэффициенты $c_B^{\pm}$ не зависят от ρ_0. Алгоритм вычисления коэффициентов $c_B^{\pm}$ можно найти в [4]. Возможность продолжения Ψ_L до знакопеременной меры на $\mathbb{\Gamma}$ изучалась в [11] и было доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть валюация Ψ_L определена на кольце $U_{\mathbb{\Gamma}}$ с помощью флаговой функции $\rho_0(P, \Omega) \in C^{(3)}$ по формулам (3.1), (3.2) и (3.3). Валюация Ψ_L является знакопеременной мерой μ в $\mathbb{\Gamma}$ тогда и только тогда, когда для любого направления n, перпендикулярного к Ω, флаговая функция $\rho_0(P, \Omega)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению :

$$\frac{\partial\rho_0(P, \Omega)}{\partial_n P} = \frac{\partial^2\rho_0(P, \Omega)}{\partial_\Omega P\, \partial_n \Omega}. \tag{3.4}$$

Если условие (3.4) выполняется, то функция

$$H(\gamma) = \frac{1}{4}\left[2\rho_0 + \Delta_2\rho_0\right],$$

где Δ_2 – лапласиан на сфере S^2, зависящий только от $\gamma \in \mathbb{\Gamma}$, т.е. постоянный на парах (P, Ω) с $P \in \gamma$ и направлением Ω, совпадающим с направлением прямой γ. Плотность соответствующей знакопеременной меры μ совпадает с $H(\gamma)$.

Другая теорема, доказанная в [11], относится к случаю неотрицательной меры μ.

Теорема 2. Валюация Ψ_L является неотрицательной мерой μ в Γ тогда и только тогда, когда сегментная функция L является метрикой в $\mathbb{R}^3$, для которой евклидовы прямые суть геодезические, т.е. $\mathcal{H} = \mathcal{L}_0^+$.

§4. ПОРОЖДЕНИЕ МЕР В $\mathbb{E}$

Пусть в $\mathbb{R}^3$ задано конечное множество точек $\{P_i\}$, содержащее по крайней мере две точки. Определим кольцо Сильвестра в $\mathbb{E}$ следующим образом :

$$Sr\{P_i\} = \text{минимальное кольцо подмножеств из } \mathbb{E}, \text{ содержащее все } [P_i, P_j].$$

Кольцо $U_{\mathbb{E}}$ подмножеств пространства $\mathbb{E}$ определяется так : $U_{\mathbb{E}} = \bigcup Sr\{P_i\}$, где объединение берется по всем конечным подмножествам $\{P_i\} \subset \mathbb{R}^3$.

Каждой непрерывной функции ρ, определенной в пространстве флагов $\mathcal{F}$, соответствует функция клина W :

$$W(\nu, V) = \int_\nu \int_V \rho(P, \Omega, \phi)\, \mathrm{d}l\, \mathrm{d}\phi, \tag{4.1}$$

где $\mathrm{d}l$ обозначает меру длины на ν, а $\mathrm{d}\phi$ – равномерную угловую меру на $\mathcal{E}_1(\Omega)$. Для любого $A \in U_{\mathbb{E}}$ множество $\{P_i\}$ можно подобрать так, что $A \in Sr\{P_i\}$ (множество $\{P_i\}$ с этим свойством не единственно). Положим

$$\Phi(A) = \sum_{w_s \in W\{P_i\}} c_s(A)\, W(w_s), \tag{4.2}$$

где суммирование ведется по множествам $\mathbf{W}\{P_i\}$ клиньев, **ассоциированных** с $\{P_i\}$, целочисленные коэффициенты $c_s(A)$ не зависят от выбора ρ. Полное описание множества $\mathbf{W}\{P_i\}$ и алгоритм вычисления коэффициентов c_s можно найти в [9] и [10].

В [9] показано, что (4.2) определяет аддитивный функционал на кольце $U_{\mathbb{E}}$; в частности, значение $\Phi(A)$ не зависит как от выбора множества $\{P_i\}$, так и от $A \in Sr\{P_i\}$.

Знакопеременная мера m в $\mathbb{E}$ называется **беспучковой**, если мера m равна нулю на пучках $[P]$ плоскостей, проходящих через точку $P \in \mathbb{R}^3$, т.е. $m([P]) = 0$ для любой $P \in \mathbb{R}^3$.

Замечание 1. В [13] конкретное ядро $K(f, e)$ было определено по формуле

$$\rho(f) = \int K(f, e)\, m(\mathrm{d}e),$$

которая отображает меру m в флаговую функцию ρ такую, что значения меры m на $U_{\mathbb{E}}$ совпадают со значениями функционала Φ, построенного по флаговой плотности ρ при помощи формул (4.1) и (4.2).

Задача продолжения функционала Φ до знакопеременной меры в $\mathbb{E}$ исследовалась в [9] и [10]. В [10] было доказано следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть Φ – валюация на $U_{\mathbb{E}}$, порожденная флаговой функцией $\rho \in C^{(3)}$ с помощью формул (4.1) и (4.2). Валюация Φ порождает беспучковую, локально–конечную знакопеременную меру m в $\mathbb{E}$ тогда и только тогда, когда ρ удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$2\,\frac{\partial\rho(f)}{\partial_\omega P}+\frac{\partial^2\rho(f)}{\partial_\Omega P\,\partial_N\Lambda}+\frac{\partial^2\rho(f)}{\partial_N P\,\partial_\Omega\Lambda}-\frac{\partial^3\rho(f)}{\partial_\Omega P\,\partial_\Omega\Lambda\,\partial_\omega\Lambda}=0, \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial^2\rho(f)}{(\partial_\Omega P)^2}+\frac{\partial^2\rho(f)}{(\partial_N P)^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^4\rho(f)}{(\partial_\Omega P)^2\,(\partial_\omega\Lambda)^2}-\frac{\partial^3\rho(f)}{\partial_\Omega P\,\partial_N P\,\partial_\omega\Lambda}=0, \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial^3\rho(f)}{(\partial_\omega\Lambda)^3}+4\frac{\partial\rho(f)}{\partial_\omega\Lambda}=0, \tag{4.5}$$

где $f=(P,\omega,\varphi)=(P,\Omega,\phi)$, а N – направление, ортогональное к Ω и ω. В действительности, эти уравнения записаны для направленных версий направлений Ω, ω и N, и выполнены когда они составляют правую систему.

§5. МЕРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ $\mathbb{\Gamma}$ И $\mathbb{E}$

В этом параграфе исследуется связь между порождением сегментных функций L знакопеременными мерами в $\mathbb{E}$ и порождением знакопеременной меры с помощью валюации Ψ_L. Обозначим сужение $\mathcal{M}$ или $\mathcal{L}_0$ на сегментные функции, порожденные флаговыми функциями $\rho(f)$, $f\in\mathcal{F}_0$ из стандартного класса гладкости $C^{(3)}$ через $\mathcal{M}\cap C^{(3)}$ или $\mathcal{L}_0\cap C^{(3)}$, соответственно.

Теорема 4. $\mathcal{M}\cap C^{(3)}=\mathcal{L}_0\cap C^{(3)}$.

Доказательство : Пусть $L\in\mathcal{M}$, т.е. существует беспучковая, знакопеременная мера m в $\mathbb{E}$ такая, что

$$L(P_1,P_2)=m([P_1P_2]) \tag{5.1}$$

для каждого прямолинейного отрезка (P_1,P_2). Ниже покажем, что соответствующая валюация Ψ_L, определенная по (3.3), является знакопеременной мерой на $\mathbb{\Gamma}$.

По Теореме 3 и Замечанию 1, существует флаговая функция ρ, удовлетворяющая уравнениям (4.3) — (4.5), и значения валюации Φ, построенной по ρ при помощи (4.1) и (4.2), совпадает с значением меры m на $U_{\mathbb{E}}$.

Для множества $[P_1, P_2] = [\nu]$ множество $\mathbf{W}\{P_i\}$ состоит из единственного клина $w_1 = (\nu, \pi)$ и $c_1([\nu]) = 1$ (см. [9]). Следовательно

$$L(\nu) = \int_\nu \rho_0(P, \Omega)\,\mathrm{d}l, \tag{5.2}$$

где

$$\rho_0(P, \Omega) = \int \rho(P, \Omega, \phi)\,\mathrm{d}\phi. \tag{5.3}$$

Пусть $\rho_0(P, \Omega) \in C^{(3)}$. Для доказательства того, что валюация Ψ_L является знакопеременной мерой на $\mathbb{\Gamma}$, достаточно показать, что ρ_0, определенная по (5.3), удовлетворяет уравнению (3.4). По Теореме 3 имеем

$$2\,\frac{\partial\rho(f)}{\partial_\omega P} + \frac{\partial^2\rho(f)}{\partial_\Omega P\,\partial_N\Lambda} + \frac{\partial^2\rho(f)}{\partial_N P\,\partial_\Omega\Lambda} - \frac{\partial^3\rho(f)}{\partial_\Omega P\,\partial_\Omega\Lambda\,\partial_\omega\Lambda} = 0. \tag{5.4}$$

Здесь $\Lambda = (\Omega, N)$, где $\Omega \in S^2$ – одно из двух направлений, соответствующих прямой свободного флага Λ, $N \in S^2$ – одно из двух направлений, которые перпендикулярны к Ω и лежат в плоскости флага. В плоскости, ортогональной к Ω, определим два координатных направления X и Y. Аргумент ϕ отождествляется с углом между N и направлением X. В этой параметризации имеем

$$\frac{\partial\rho}{\partial_\omega P} = -\frac{\partial\rho}{\partial_X P}\sin\phi + \frac{\partial\rho}{\partial_Y P}\cos\phi, \qquad \frac{\partial\rho}{\partial_N P} = \frac{\partial\rho}{\partial_X P}\cos\phi + \frac{\partial\rho}{\partial_Y P}\sin\phi,$$

$$\frac{\partial\rho 1}{\partial_\omega\Lambda} = \frac{\partial\rho}{\partial_X\Omega}\cos\phi + \frac{\partial\rho}{\partial_Y\Omega}\sin\phi, \qquad \frac{\partial\rho}{\partial_N\Lambda} = \frac{\partial\rho}{\partial_X\Omega}\sin\phi - \frac{\partial\rho}{\partial_Y\Omega}\cos\phi,$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial_\Omega\Lambda} = \frac{\partial\rho}{\partial\phi},$$

где символы типа $\dfrac{\partial}{\partial_X\Omega}$ определены, так как X ортогонально к Ω : они определяют обычные производные по направлению на сфере S^2. Подставляя эти значения в (5.4), получаем

$$-2\sin\phi\,\frac{\partial\rho}{\partial_X P} + 2\cos\phi\,\frac{\partial\rho}{\partial_Y P} + 2\sin\phi\,\frac{\partial^2\rho}{\partial_\Omega P\,\partial_X\Omega} - 2\cos\phi\,\frac{\partial^2\rho}{\partial_\Omega P\,\partial_Y\Omega} +$$

$$+\cos\phi\,\frac{\partial^2\rho}{\partial\phi\partial_X P} + \sin\phi\,\frac{\partial^2\rho}{\partial\phi\partial_Y P} - \cos\phi\,\frac{\partial^3\rho}{\partial\phi\partial_\Omega P\,\partial_X\Omega} - \sin\phi\,\frac{\partial^3\rho}{\partial\phi\partial_\Omega P\,\partial_Y\Omega} = 0.$$

Умножая это уравнение на $\sin\phi$ или $\cos\phi$ и интегрируя относительно ϕ, получаем

$$\int\left(\frac{\partial\rho}{\partial_X P} - \frac{\partial^2\rho}{\partial_\Omega P\,\partial_X\Omega}\right)\mathrm{d}\phi = 0, \qquad \int\left(\frac{\partial\rho}{\partial_Y P} - \frac{\partial^2\rho}{\partial_\Omega P\,\partial_Y\Omega}\right)\mathrm{d}\phi = 0.$$

Так как X и Y являются перпендикулярными направлениями, то из последних двух уравнений следует, что для любого направления n, перпендикулярного к Ω, имеем

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial_n P} = \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial_\Omega P\, \partial_n \Omega},$$

(см. (5.3)). Из Теоремы 1 вытекает, что для сегментной функции L валюация Ψ_L является знакопеременной мерой на $\mathbb{\Gamma}$, т.е. $\mathcal{M} \cap C^{(3)} \subset \mathcal{L}_0 \cap C^{(3)}$. Для доказательства обратного включения $\mathcal{L}_0 \cap C^{(3)} \subset \mathcal{M} \cap C^{(3)}$, для $\rho_0(P, \Omega) \in C^{(3)}$ определим сегментную функцию L по формуле

$$L(\nu) = \int_\nu \rho_0(P, \Omega)\, \mathrm{d}l, \tag{5.5}$$

для которой Ψ_L является знакопеременной мерой на $\mathbb{\Gamma}$. Рассмотрим (единственное) решение z_P уравнения

$$\rho_0(P, \Omega) = \int_{S^2} z_P(\xi)\, |\cos(\Omega, \xi)|\, \mathrm{d}\xi, \tag{5.6}$$

где $d\xi$ обозначает площадь на S^2. По стандартной формуле из сферической геометрии для любого направления n, перпендикулярного к Ω, имеем

$$\frac{\partial \cos(\Omega, \xi)}{\partial_n \Omega} = \cos(\xi, n).$$

Так как функция z_P четна и на окружности, перпендикулярной к Ω, имеем $\cos(\Omega, \xi) = 0$, то

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial_n \Omega} = 2 \int_{\cos(\Omega, \xi) > 0} z_P(\xi)\, \cos(\xi, n)\, \mathrm{d}\xi.$$

Дифференцируя по P, получим

$$\frac{\partial^2 \rho_0}{\partial_\Omega P\, \partial_n \Omega} = 2 \int_{\cos(\Omega, \xi) > 0} \frac{\partial z_P(\xi)}{\partial_\Omega P}\, \cos(\xi, n)\, \mathrm{d}\xi,$$

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial_n P} = 2 \int_{\cos(\Omega, \xi) > 0} \frac{\partial z_P(\xi)}{\partial_n P}\, \cos(\Omega, \xi)\, \mathrm{d}\xi.$$

Следовательно

$$\frac{\partial^2 \rho_0}{\partial_\Omega P\, \partial_n \Omega} - \frac{\partial \rho_0}{\partial_n P} = 2 \int_{\cos(\Omega, \xi) > 0} \frac{\partial z_P(\xi)}{\partial_\Omega P}\, \cos(\xi, n) - \frac{\partial z_P(\xi)}{\partial_n P}\, \cos(\xi, \Omega)\, \mathrm{d}\xi =$$

$$= 2 \int_{\cos(\Omega, \xi) > 0} \nabla z \cdot (\xi \times \Omega \times n)\, \mathrm{d}\xi, \tag{5.7}$$

где ∇ – градиентный оператор, а $\times$ означает векторное произведение. Так как $L \in \mathcal{L}_0$ порождает знакопеременную меру в $\mathbb{\Gamma}$ и $\Omega \times n = n_1$ перпендикулярна к Ω, то

$$\int_{\cos(\Omega,\xi)>0} \nabla z \cdot (\xi \times n_1)\, d\xi = 0$$

для всех Ω и n_1, перпендикулярных к Ω. Для любого направления n_1, перпендикулярного к Ω, имеем

$$\int_{\cos(\Omega,\xi)>0} \nabla z \cdot (\xi \times n_1)\, \mathrm{d}\xi = \int_{\cos(\Omega,\xi)>0} n_1 \cdot (\nabla z \times \xi)\, \mathrm{d}\xi = 0,$$

и поэтому для любого Ω

$$\int_{\cos(\Omega,\xi)>0} (\nabla z \times \xi)\, \mathrm{d}\xi = 0. \tag{5.8}$$

Это уравнение изучалось в [12] и мы следуем анализу, проведенному там. Запишем уравнение (5.8) для двух направлений Ω_1 и Ω_2, а затем вычтем их. Так как функция $(\nabla z \times \xi)$ нечетна, то получаем

$$\int_{C(\Omega_1,\Omega_2)} (\nabla z \times \xi)\, \mathrm{d}\xi = 0,$$

где $C(\Omega_1, \Omega_2)$ – область, ограниченная большими полукругами, ортогональными к Ω_1 и Ω_2.

Отсюда получаем (см. [12]), что $\nabla z \times \xi = 0$ и для любого ω, перпендикулярного к ξ, имеем $\nabla z \cdot \omega = 0$. Следовательно, $\dfrac{\partial z_P(\xi)}{\partial_\omega P} = 0$, и поэтому $z_P(\xi) = z(e)$ есть функция, определенная в пространстве $\mathbb{E}$. Таким образом, сегментную функцию L можно записать в виде

$$L(\nu) = \int_\nu \int_{S^2} z_P(\xi) |\cos(\Omega\, \xi)|\, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}l = \int_{[\nu]} z(e)\, \mathrm{d}e = m([\nu]),$$

откуда следует, что $\mathcal{L}_0 \cap C^{(3)} \subset \mathcal{M} \cap C^{(3)}$. Предположим, что мера m в пространстве $\mathbb{E}$ имеет плотность $z(e)$ относительно меры, инвариантной относительно евклидовых движений, т.е. $m(\mathrm{d}e) = z(e)\mathrm{d}e$. Обозначим через $p(\gamma)$ **веер** плоскостей, содержащих прямую $\gamma \in \mathbb{\Gamma}$. Пусть ϕ – угол поворота вокруг γ, который определяет плоскость из $p(\gamma)$. Обозначим через $Z_\gamma(\phi)$ сужение функции $z(e)$ на веер $p(\gamma)$.

Следствие 1. Плотность H знакопеременной меры в пространстве $\mathbb{\Gamma}$, порожденной по Ψ_L, с $L(\nu)$ по формуле (5.1), вычисляется так

$$H(\gamma) = \int_{p(\gamma)} Z_\gamma(\phi)\, \mathrm{d}\phi.$$

Следствие 2. Из Теорем 2 и 4 вытекает результат Погорелова $\mathcal{H} \cap C^{(3)} \subset \mathcal{M} \cap C^{(3)}$.

Автор благодарит профессоров Р. Амбарцумяна и Д. Штойяна за многочисленные полезные обсуждения и замечания.

ABSTRACT. The paper studies linearly-additive functions $L(\nu)$ defined on linear segments $\nu \subset \mathbb{R}^3$. Such segment functions are of interest in the study of measures m in the space $\mathbb{E}$ of planes in $\mathbb{R}^3$, since each m generates a segment function $L(\nu)$ by $L(\nu) = m$(the set of planes that hit ν). On the other hand, the segment functions $L(\nu)$ appear in the combinatorial construction of valuations Ψ_L in the space $\mathbb{\Gamma}$ of lines in $\mathbb{R}^3$. The paper proves that under certain smoothness assumptions a valuation Ψ_L extends to signed measure in $\mathbb{\Gamma}$ if and only if the segment function $L(\nu)$ is generated by a signed measure m in $\mathbb{E}$. As a corollary of this result, a characterization of linearly-additive metrics in terms of signed measures on $\mathbb{E}$ is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Alexander, "Planes for which the lines are shortest paths between points. Ill. J. Math., vol. 22, pp. 177 – 190, 1978.
2. R. V. Ambartzumian, "A note on pseudo-metrics on the plane", Z. Wahrscheinlichkeitsth. verw. Geb., vol. 29, pp. 25 – 31, 1974.
3. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology, John Wiley and Sons, Chichester, 1982.
4. Р. В. Амбарцумян, "Замечания о порождении мер в пространстве прямых в $\mathbb{R}^3$", Известия НАН Армении, Математика, том 27, № 5, стр. 1 — 21, 1992.
5. R. V. Ambartzumian, V. K. Oganian, "Parametric versions of Hilbert's fourth problem", Israel Math. Journal. vol. 103, pp. 41 — 65, 1998.
6. R. V. Ambartzumian with an Appendix by V. K. Oganian, "Measure generation by Euler functionals", Adv. Appl. Prob., vol. 27, pp. 606 – 626, 1995.
7. В. К. Оганян, А. Абдалла, "Маркированные точечные процессы пересечений порожденные случайными процессами прямых на плоскости", Известия НАН Армении. Математика, том 28, № 5, стр. 67 — 77, 1992.
8. Р. В. Амбарцумян, "Интегральная геометрия прегеодезических на 2-многообразиях", Известия НАН Армении, Математика, том 31, № 4, стр. 5 — 52, 1996.
9. Р. В. Амбарцумян и В. К. Оганян, "Конечно-аддитивные функционалы в пространстве плоскостей, I", Известия НАН Армении, Математика, том 29, № 4, стр. 3 – 51, 1994.
10. В. К. Оганян и А. Н. Давтян, "Конечно-аддитивные функционалы в пространстве плоскостей, II", Известия НАН Армении, Математика, том 31, № 4, стр. 44 – 73, 1996.
11. А. Н. Давтян, "Валюации в пространстве прямых в $\mathbb{R}^3$", Известия НАН Армении. Математика, том 33, № 4, стр. 66 – 87, 1998.
12. А. В. Погорелов, Четвертая Проблема Гильберта, Наука, Москва, 1974.
13. R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

3 апреля 1999

Горная академия, институт стохастики
Фрайберг, Германия
E-mail : davtian@merkur.hrz.tu-freiberg.de