АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ КОМБИНАТОРНОЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ : ОБЗОР

Р. В. Амбарцумян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 6, 1999

Статья содержит обзор результатов исследований по комбинаторной интегральной геометрии, проведённых вслед за публикацией в 1982 книги Р. В. Амбарцумяна под тем же названием. Комбинаторный подход, предложенный в книге, привел к существенным продвижениям в таких областях, как задача Викселла для рандомизированных выпуклых шейпов, тождества типа Плейеля для выпуклых областей, проблемы, касающиеся случайных процессов прямых, валюации в пространствах интегральной геометрии, а также четвертая проблема Гильберта в различных постановках. Каждой из этих тем в этой статье посвящен отдельный параграф, сообщающий о результатах и раскрывающий их комбинаторные корни. Приводятся также комментарии и замечания о связи с другими направлениями, такими как томография, cos-преобразование и другие.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Вслед за публикацией в 1982 году в издательстве Дж. Вайли монографии Р. В. Амбарцумяна "Комбинаторная Интегральная Геометрия" [1] появились отклики, обсуждающие перспективы дальнейшего развития и применений новых комбинаторных принципов, предложенных в монографии. Редактором [1] отмечалось, что комбинаторная интегральная геометрия "составляет совершенно новую область, обозначившую свежие подходы к геометрическим вероятностям и интегральной геометрии, предлагающую новые интересные геометрические задачи, и одновременно выдвигающую много разнообразных идей." Там же выражалась уверенность, что аппарат комбинаторной интегральной геометрии окажется полезным "всем исследователям." Редактор книги (А. Баддли), в длинном Приложении к монографии [1], указал на красивые и глубокие взаимосвязи между комбинаторными разложениями, приведенными в монографии и знаменитой формулой

Эйлера для многогранников в $\mathbb{R}^d$.

Р. Александер в своей рецензии [2] писал, что монография "создала базовый лагерь в малоизученной области геометрии, откуда много интересных задач видятся в новой перспективе. Можно ожидать бума соответствующих исследований ...". Оглядываясь назад на почти двадцать лет, можно сказать, что ожидания интенсивного развития предмета усилиями "всех исследователей" в этой области не оправдались. Систематические усилия на развитие предмета делались только в Ереване, маленькой группой, руководимой самим Р. В. Амбарцумяном. Однако, исследования этой группы указывают на то, что прогнозы относительно значительного математического потенциала предмета комбинаторной интегральной геометрии по всей вероятности были верными.

Целью настоящего обзора является описание результатов работы ереванской группы, что достаточно для представления современного статуса предмета. После публикации монографии [1], большинство исследователей по Комбинаторной интегральной геометрии публиковались в журнале Известия Академии Наук Армении, серия Математика (ИАНАМ). В настоящее время ИАНАМ опубликовал три "специализированных выпуска", посвященных этой области исследований. Все три выпуска (№ 4 журнала ИАНАМ за 1994, 1996 и 1998 годы) носят одно и то же название "Аналитические Результаты Комбинаторной Интегральной Геометрии" и представляют тематически единую коллекцию статей. Хотя некоторые публикации (такие как [15] и [23]), примыкающие к направлению трех специализированных выпусков, были опубликованы в других журналах, они также попадают в рамки настоящего обзора.

Отправным пунктом как для монографии [1], так и для последующих работ, является следующая теорема комбинаторной интегральной геометрии на плоскости. Она относится к вычислению значений инвариантной относительно евклидовых движений меры μ в пространстве $\mathbf{G}$ прямых на плоскости, нормированной условием, что ее значение на множестве прямых, пересекающих прямолинейный отрезок, равно удвоенной длине этого отрезка.

Пусть задано конечное множество точек $\{P_i\}$ на плоскости. Обозначим через ρ_{ij} отрезок с концами P_i и P_j, через $|\rho_{ij}|$ его длину, и $[\rho_{ij}] = \{g \in \mathbf{G}:\ g$ разделяет концы отрезка $\rho_{ij}\}$ (бюфоново множество). Пусть $Br\{P_i\}$ обозначает бюфоново кольцо, т.е. минимальное (конечное) кольцо подмножеств пространства $\mathbf{G}$, содержащее все множества вида $[\rho_{ij}]$. Две точки P_i и P_j называются соседними, если отрезок ρ_{ij} не содержит других точек из множества $\{P_i\}$. Каждой паре P_i, P_j соседей соответствует прямая g_{ij} = прямая, проходящая через точки P_i и P_j.

Любая достаточно малая окрестность $\mathbf{G}_{ij}$ прямой g_{ij} делится на четыре неперекрывающихся подмножества :

$$1 = \{g \in \mathbf{G} : \text{все точки из } \{P_i\} \cap g_{ij} \text{ лежат в правой от } g \text{ полуплоскости } \},$$

$$2 = \{g \in \mathbf{G} : \text{все точки из } \{P_i\} \cap g_{ij} \text{ лежат в левой от } g \text{ полуплоскости } \},$$

$$3 = \{g \in \mathbf{G} : \text{точка } P_i \text{ лежит в правой , а } P_j \text{ в левой от } g \text{ полуплоскости } \},$$

$$4 = \{g \in \mathbf{G} : \text{точка } P_i \text{ лежит в левой, а } P_j \text{ в правой от } g \text{ полуплоскости } \}.$$

Правая и левая полуплоскости для $g \in \mathbf{G}_{ij}$ в данном случае определяются так. Каждой прямой g_{ij} мы приписываем направление, скажем от P_i к P_j, если $i < j$, и по непрерывности, единственным образом определяем направления прямых g из $\mathbf{G}_{ij}$. Как обычно, $I_A(g) = 1$, если $g \in A$ и 0 – в противном случае. Если окрестность $\mathbf{G}_{ij}$ достаточно мала, то индикаторы $I_{C\cap 1}(g)$, $I_{C\cap 2}(g)$, $I_{C\cap 3}(g)$ и $I_{C\cap 4}(g)$ остаются постоянными для любой $g \in \mathbf{G}_{ij}$ и эти постоянные значения мы будем обозначать так :

$$I_C(\overset{+}{i}, \overset{+}{j}) = I_{C\cap 1}(g), \qquad I_C(\overset{-}{i}, \overset{-}{j}) = I_{C\cap 2}(g),$$
$$I_C(\overset{+}{i}, \overset{-}{j}) = I_{C\cap 3}(g), \qquad I_C(\overset{-}{i}, \overset{+}{j}) = I_{C\cap 4}(g).$$

Теорема 1, [1], [16]. Для каждой $C \in Br\{P_i\}$ значение $\mu(C)$ можно представить как линейную комбинацию расстояний между соседними точками P_i и P_j с целочисленными коэффициентами :

$$\mu(C) = \sum_{i<j} c_{ij}(C)\,|\rho_{ij}|, \tag{0.1}$$

где сумма $\sum\limits_{i<j}$ распространяется на все пары соседних точек множества $\{P_i\}$. Коэффициенты c_{ij} можно найти по так называемой "четырех индикаторной" формуле :

$$c_{ij}(C) = I_C(\overset{+}{i}, \overset{-}{j}) + I_C(\overset{-}{i}, \overset{+}{j}) - I_C(\overset{-}{i}, \overset{-}{j}) - I_C(\overset{+}{i}, \overset{+}{j}). \tag{0.2}$$

Этот основной результат привел к развитию таких предметов как

1. Тождества типа Плейеля для выпуклых областей ;

2. Задача Викселла для рандомизированных выпуклых шейпов ;
3. Случайные геометрические процессы на плоскости ;
4. Валюации в пространствах интегральной геометрии ;
5. Четвертая проблема Гильберта в параметрической постановке ;
6. Четвертая проблема Гильберта для прегеодезических.

Каждый из нижеследующих параграфов представляет одну из этих тем. Параграф начинается с общего представления данной тематики, затем формулируются детально один или два результата. В основном, доказательства опускаются, так как читатель может найти их в оригинальных публикациях. Однако, имеются исключения : вывод тождеств типа Плейеля в §1, использующие разложения для δ-мер, а также "томографическое" Следствие 1, а также Следствия 2 и 3 в §4, раскрывающие важную роль сферического преобразования Радона в комбинаторике плоскостей и прямых в трехмерном пространстве. Эти результаты новые и публикуются впервые.

Чтобы отличать чисто комбинаторные утверждения, многие из которых можно найти уже в [1], от их аналитических результатов более позднего периода, мы представляем первые как "Теоремы", а последние как "Предложения". Новые наблюдения естественно попадают в категорию "Следствий". Два случая, которые не подпадают под эту приблизительную классификацию, представлены в виде "Лемм". Многие громоздкие вычисления не попадают в поле зрения читателя, и поэтому обзор остается "веселой игрой с фигурами и интегралами" (В. Бляшке).

§1. ТОЖДЕСТВА ТИПА ПЛЕЙЕЛЯ ДЛЯ ВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЕЙ

В [1], [11] тождества типа Плейеля выводились интегрированием тождества (0.1) относительно меры, заданной в пространстве множеств $\{P_i\}$. В действительности, $\{P_i\}$ рассматривается как состоящая из двух частей : переменная часть $\{Q'_j\}$, и постоянная часть $\{Q_j\}$, так что $\{P_i\} = \{Q'_j\} \cup \{Q_j\}$. Для заданной ограниченной выпуклой области $\mathbf{D}$ на плоскости множество $\{Q'_j\}$ определяется как множество всех концов n хорд области $\mathbf{D}$, порожденных прямыми $g_1, ..., g_n \in [\mathbf{D}]$, где $[\mathbf{D}] = \{g \in \mathbf{G} :$ прямая g пересекает область $\mathbf{D}\}$.

Требуемая мера в пространстве $\{Q'_j\}$ соответствует n-кратному произведению мер $\mu \times ... \times \mu$. Множество $\{Q_j\}$, которое остается фиксированным, служит для наложения ограничений на область интегрирования. Как показано в [1], Глава

7, этот метод распространяется на выпуклые тела в $\mathbb{R}^3$, в то время как подход А. Плейеля [3], [4] так же как некоторые другие ныне используемые подходы (подобно примененному в [5]) менее удобны в многомерном случае.

Для доказательства тождества Плейеля в его первоначальной форме [3], [4], методом интегрирования, описанным выше, достаточно множество $\{Q_j\}$ взять пустым. Для ограниченной выпуклой области D на плоскости и непрерывно-дифференцируемой функции $f(x)$, определенной для $x \geq 0$ и удовлетворяющей условию $f(0) = 0$, первоначальное тождество Плейеля имеет вид

$$\int_{[\mathbf{D}]} f(\chi)\, dg = \frac{1}{2} \int_{\partial \mathbf{D} \times \partial \mathbf{D}} f'(\chi) \cos \psi_1 \cos \psi_2 \, dl_1 dl_2, \tag{1.1}$$

где $\partial \mathbf{D} \times \partial \mathbf{D}$ – произведение границы D на себя. Далее, dg обозначает интегрирование относительно меры μ в пространстве $\mathbf{G}$ (см. (0.1)), а dl_i, $i = 1, 2$ обозначает меру длины, определенную на $\partial \mathbf{D}$. Через χ будем обозначать длину хорды $\mathbf{D} \cap g$ индуцированной прямой g, а через ψ_1 и ψ_2 – два угла пересечений прямой g с границей области D, оба взятых в одной полуплоскости, ограниченной прямой g, внутри области D. Во втором интеграле эти величины становятся функциями l_1, l_2 с помощью отображения $(l_1, l_2) \to$ прямая g через точки l_1, l_2. Используя соотношение

$$dg = \frac{\sin \psi_1 \sin \psi_2}{\chi} \, dl_1 \, dl_2, \tag{1.2}$$

второй интеграл в (1.1) можно переписать в виде интеграла по мере dg, взятому по множеству [D]. Это возможно, если $\partial \mathbf{D}$ не содержит прямолинейных отрезков. Если последнее условие не имеет места, то возникают дополнительные слагаемые, соответствующие подмножествам из $\partial \mathbf{D} \times \partial \mathbf{D}$, которые являются квадратами отрезков. На последних множествах имеем $\cos \psi_1 \cos \psi_2 = 1$, что дает возможность интегрировать. В частности, если D является многоугольником и $F(x) = \int_0^x f(u)\, du$, то (1.1) принимает вид

$$\int_{[\mathbf{D}]} F'(\chi)\, dg = \int_{[\mathbf{D}]} F''(\chi)\, \chi \cot \psi_1 \cot \psi_2 \, dg + \sum_i F(a_i), \tag{1.3}$$

где a_i обозначают **длины сторон** многоугольника D. Тождество (1.3) имеет место для любой дважды дифференцируемой функции $F(x)$ удовлетворяющей условию $F(0) = 0$. Слагаемые $F(a_i)$ в (1.3) играют роль в **стереологии случайных процессов многоугольников** (см. §2 и Предложение 2 в §3).

Вернемся к тождествам типа Плейеля, обобщающим (1.3). По сравнению с [1, §8.2] или [11], мы представляем их в слегка измененной форме.

Пусть конечное множество точек $\{Q_i\}$ принадлежит **замыканию ограниченного строго выпуклого** $\mathbf{D}$. Для любой дифференцируемой функции $f(x)$, удовлетворяющей условию $f(0) = 0$ и любого подмножества A из минимальной (конечной) алгебры, содержащей $[\mathbf{D}]$ и $Br\{Q_i\}$, тождество типа Плейеля имеет вид

$$\int_A [f(\chi) - f'(\chi)\chi \cot\psi_1 \cot\psi_2]\, dg =$$

$$= \sum_{i<j} c_{ij}(A)\, |\rho_{ij}| f(\chi_{ij}) + \frac{1}{2}\sum_{Q_j}\int_{\partial\mathbf{D}} f'(\chi_{jl})[I_A(\overset{+}{j},l) - I_A(\overset{-}{j},l)]\, \rho_{jl}\, d\chi_{jl}. \qquad (1.4)$$

В первой строке (1.4), обозначения те же, что и в (1.3). Некоторые обозначения во второй строке были определены в (0.1)–(0.2). Нуждаются в объяснении : χ_{ij} = длина хорды области $\mathbf{D}$, которая содержит точки Q_i и Q_j ; χ_{jl} = длина хорды области $\mathbf{D}$, содержащая Q_j и точку $l \in \partial\mathbf{D}$; ρ_{jl} = расстояние от точки Q_j до $l \in \partial\mathbf{D}$; $I_A(\overset{+}{j},l)$ и $I_A(\overset{-}{j},l)$ определяются как в (0.2), относительно направления от Q_j к l : верхний плюс соответствует нахождению Q_j в правой, а минус – в левой полуплоскости относительно "пошевеленной" прямой Q_j, l. Наконец, $d\chi_{jl}$ означает интегрирование по Стилтьесу **по часовой стрелке** для $l \in \partial\mathbf{D}$.

Если на границе области $\mathbf{D}$ имеются прямолинейные отрезки, то в (1.4) возникают дополнительные слагаемые. В [1] и [11] тождество (1.4) выписывается для следующего множества $A = A_0$. Предположим, что внутри $\mathbf{D}$ многоугольные области, закрашены **черным**, а их дополнения в области $\mathbf{D}$ закрашены в **белый**. По определению, $A_0 \subset [\mathbf{D}]$ состоит из тех прямых, которые не пересекают черные области. Множество A_0 можно представить как объединение двух подмножеств, $[\mathbf{D}] \setminus A_1$ и A_2, причем $A_1, A_2 \in Br\{Q_i\}$ где $\{Q_i\}$ – множество вершин черных многоугольных областей. Следовательно, (1.4) применимо. Предельная форма этого тождества, для черных множеств, обладающих гладкой границей как показано в [1], §8.4, приводит к элегантному результату для **случайных черно–белых раскрасок** плоскости, см. Предложение 3 в §3. Для множества $\{Q_i\} \subset \partial\mathbf{D}$, тождество (1.4) приводит к более простому тождеству

$$\int_A [f(\chi) - f'(\chi)\chi \cot\psi_1 \cot\psi_2]\, dg =$$

$$= \sum_{i<j} c_{ij}(A)\, \chi_{ij} f(\chi_{ij}) + \frac{1}{2}\sum_{Q_j}\int_{\partial\mathbf{D}} f'(\chi_{jl})[I_A(\overset{+}{j},l) - I_A(\overset{-}{j},l)]\, \chi_{jl}\, d\chi_{jl}. \qquad (1.5)$$

На интервалах, где $[I_A(\overset{+}{j}, l) - I_A(\overset{-}{j}, l)]$ является постоянной и мы можем интегрировать. Получаем следующее соотношение

$$\int_{\partial\mathbf{D}} f'(\chi_{jl})[I_A(\overset{+}{j}, l) - I_A(\overset{-}{j}, l)]\, \chi_{jl}\, d\chi_{jl} =$$
$$= -\sum_k c_{jk}(A) \int_0^{\chi_{jk}} f'(u)\, u\, du = -\sum_k c_{jk}(A) \left[\chi_{jk}\, f(\chi_{jk}) - \int_0^{\chi_{jk}} f(u)\, du\right].$$

Итак, (1.5) принимает вид

$$\int_A [\, f(\chi) - f'(\chi)\, \chi \cot\psi_1 \cot\psi_2\,]\, dg = \sum_{i<j} c_{ij}(A) \int_0^{\chi_{ij}} f(u)\, du. \tag{1.6}$$

Напомним, что (1.6) имеет место для $\{Q_i\} \subset \partial\mathbf{D}$, и поэтому мы можем говорить о вписанном многоугольнике $\mathbf{D}_1$, для которого Q_i являются вершинами. В частном случае $A = [\mathbf{D}_1]$, (1.6) принимает вид

$$\int_{[\mathbf{D}_1]} [\, f(\chi) - f'(\chi)\, \chi \cot\psi_1 \cot\psi_2\,]\, dg = \sum_i \int_0^{a_i} f(u)\, du, \tag{1.7}$$

где суммирование производится по **сторонам** a_i многоугольника $\mathbf{D}_1$. Подчеркнем, что в (1.7), через χ обозначена хорда области $\mathbf{D}$, а не $\mathbf{D}_1$. Отметим, что (1.3) является предельным случаем тождества (1.7) (рассматриваем область $\mathbf{D}$, аппроксимирующую $\mathbf{D}_1$).

Рассмотрим теперь частный случай тождества (1.6), когда область $\mathbf{D}$ берется строго выпуклой, а множество $\{Q_i\}$, состоящее из двух точек $Q_1, Q_2 \in \partial\mathbf{D}$. Точки Q_1, Q_2 определяют хорду области $\mathbf{D}$, которую обозначим через χ_0. Пусть $A =$ множество прямых, разделяющих Q_1 от Q_2 и $f(x) = x^{n-1}$. Так как $c_{ij}(A) = 2$, мы получаем тождество

$$\chi_0^n = \frac{n}{2} \int_{[\chi_0]} \chi^{n-1}\, dg - \frac{1}{2}\, n\,(n-1) \int_{[\chi_0]} \chi^{n-1} \cot\psi_1 \cot\psi_2\, dg. \tag{1.8}$$

В оставшейся части параграфа мы покажем, что из (1.8) следует изопериметрический результат для параметра, который представляет интерес в томографии. Но прежде получим независимый краткий вывод тождества (1.8) основанный на применении Теоремы 1 к произвольным мерам, заданным в $\mathbf{G}$. Напомним (см. [1]), что коэффициенты этих более общих разложений не зависят от выбора меры в пространстве $\mathbf{G}$.

Пусть $\mathbf{D}$ – **строго выпуклая** ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с кусочно-гладкой границей $\partial\mathbf{D}$. Рассмотрим последовательность $(\chi_1, ..., \chi_n)$ хорд области $\mathbf{D}$ и множество $A = \bigcap_1^n [\chi_i] \subset [\mathbf{D}]$. Предположим, что никакие три конца хорд χ_i не лежат на одной прямой. Применяя Теорему 1 для δ-мер, получаем

$$2\delta_0(A) = 2\sum_{i=1}^{n} I_{n-1}(\chi_i)\,\delta_0([\chi_i]) + \sum_{*} I_{n-2}(l_r, l_k)[I_d(l_r, l_k) - I_s(l_r, l_k)]\,\delta_0(A), \quad (1.9)$$

где δ_0 – дельта-мера в пространстве $\mathbf{G}$, сосредоточенная на некоторой прямой $g_0 \in [\mathbf{D}]$. В (1.9) используем следующие обозначения :

$$I_{n-1}(\chi_i) = \begin{cases} 1 & \text{если } \chi_i \text{ пересекается всеми } (n-1) \text{ оставшимися хордами} \\ & \quad \text{из множества } \chi_1, ..., \chi_n \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

сумма $\sum_{*}$ распространена на множество

$$\{\{l_r, l_k\} : \quad l_r, l_k \text{ суть концы некоторых хорд } \chi_p \text{ и } \chi_q,\ p \neq q,\ p, q \in \{1, ..., n\}\},$$

$I_d(l_r, l_k) = 1$, $I_s(l_r, l_k) = 0$, если χ_p, χ_q лежат в различных полуплоскостях относительно прямой, проходящей через точки l_r, l_k, и $I_d(l_r, l_k) = 0$, $I_s(l_r, l_k) = 1$ в противном случае ;

$$I_{n-2}(l_r, l_k) = \begin{cases} 1 & \text{если хорда } l_r, l_k \text{ пересекается всеми хордами} \\ & \text{из } \{\chi_1, ..., \chi_n\} \backslash \{\chi_p, \chi_q\} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Мы должны проинтегрировать (1.9) относительно меры $dg_1 ... dg_n$, предполагая, что $\chi_i = g_i \cap \mathbf{D}$, $i = 1, ..., n$. Для удобства, теперь хорды $\chi_1, ..., \chi_n$ будем считать **направленными**. Это позволяет нам говорить о **начальной и концевой** точке хорды χ_i : для каждой χ_i область изменения концевой точки l_i есть вся граница $\partial\mathbf{D}$, а область изменения угла φ_i между $\partial\mathbf{D}$ в точке l_i и χ_i есть интервал $(0, \pi)$. Через dl_i обозначим меру в пространстве положений концевой точки хорды χ_i, соответствующую длине вдоль $\partial\mathbf{D}$, а через $d\varphi_i$, обычную инвариантную относительно вращений меру в пространстве направлений хорды χ_i. Имеем

$$dg_i = \sin\varphi_i\, dl_i\, d\varphi_i, \quad (1.10)$$

причём для произвольной хорды χ и $i = 1, ..., n$

$$\int I_{[\chi]}(g_i)\, dg_i = 4|\chi|,$$

где $I_{[\chi]}(g)$ – индикатор множества $[\chi]$.

Почленное интегрирование тождества (1.9) происходит следующим образом. Во-первых

$$2\int\dots\int \delta_0(A)\,dg_1\dots dg_n = 2\prod_1^n \int I_{[\chi_0]}(g_i)\,dg_i = 2\,(4|\chi_0|)^n, \tag{1.11}$$

где $\chi_0 = g_0 \cap \mathrm{D}$. Используя симметрию, получаем

$$2\int\dots\int \sum_{i=1}^n I_{n-1}(\chi_i)\,\delta_0([\chi_i])\,dg_1\dots dg_n = 2n\int_{[\chi_0]} dg_1 \int\dots\int I_{n-1}(\chi_1)\,dg_2\dots dg_n =$$

$$= 4n\int_{[\chi_0]} (4|\chi|)^{n-1}\,dg. \tag{1.12}$$

Отметим, что мы заменили коэффициент 2 на 4, потому что dg означает интегрирование в пространстве ненаправленных хорд. Вновь по симметрии

$$\int\dots\int \sum_{*} I_{n-2}(l_r,l_k)[I_d(l_r,l_k) - I_s(l_r,l_k)]\,\delta_0(A)\,dg_1\dots dg_n =$$

$$= 2n(n-1)\int\dots\int I_{n-2}(l_1,l_2)[I_d(l_1,l_3) - I_s(l_1,l_2)]\,\delta_0(A)\,dg_1\dots dg_n =$$

$$= -8n(n-1)\left[\int_{\beta_1}\int_{\beta_2} + \int_{\beta_2}\int_{\beta_1}\right](4\rho_{12})^{n-2}\cos\psi_1\,\cos\psi_2\,dl_1\,dl_2 =$$

$$= -4n(n-1)\int_{[\chi_0]} (4|\chi|)^{n-1}\cot\psi_1\,\cot\psi_2\,dg, \tag{1.13}$$

где ρ_{12} обозначает расстояние между l_1 и l_2, а β_1, β_2 – части границы $\partial\mathrm{D}$, разделяемые концами хорды χ_0. Здесь мы использовали (1.10) для dg_1 и dg_2, а также верное для любых фиксированных $l_1, l_2 \in \partial\mathrm{D}$ равенство

$$\int_0^\pi\int_0^\pi [I_d(l_1,l_2) - I_s(l_1,l_2)]\,\sin\varphi_1\,\sin\varphi_2\,d\varphi_1\,d\varphi_2 = -4\cos\psi_1\,\cos\psi_2.$$

Последнее равенство в (1.13) вытекает из (1.2). Комбинируя (1.11) – (1.13) и (1.9), после сокращения на общий множитель 4^n получаем тождество (1.8).

Вернемся к вопросу изометрии. Для $n = 2$, (1.8) принимает вид

$$\int_{[\chi_0]} \chi\,dg = \int_{\beta_1}\int_{\beta_2} \cos\psi_1\,\cos\psi_2\,dl_1 dl_2 + \chi_0^2, \tag{1.14}$$

где β_1 и β_2 суть две дуги на границе $\partial\mathrm{D}$, разделенные концами хорды χ_0.

С другой стороны, из (1.2) получаем

$$\int_{[\chi_0]} \chi\,dg = \int_{\beta_1}\int_{\beta_2} \sin\psi_1\,\sin\psi_2\,dl_1\,dl_2. \tag{1.15}$$

Выберем точку гладкости $P \in \partial\mathrm{D}$ и пусть χ_0 меняется таким образом, чтобы дуга β_1 стягивалась бы к точке P. Тогда β_2 растет до полной границы $\partial\mathrm{D}$

(исключая точку P). Деля оба соотношения (1.14) и (1.15) на χ_0 и вычисляя пределы, получаем тождества

$$\int_{[P]} \chi \sin\psi_1\, d\psi_1 = \int_{[P]} \cos\psi_1 \cos\psi_2\, dl_2, \tag{1.16}$$

$$\int_{[P]} \chi \sin\psi_1\, d\psi_1 = \int_{[P]} \sin\psi_1 \sin\psi_2\, dl_2. \tag{1.17}$$

Здесь область интегрирования $[P]$ – пучок прямых через точку P. Параметризуем прямую $g \in [P]$ либо 1) углом $\psi_1 \in (0, \pi)$ между g и направлением, касательным к $\partial \mathrm{D}$ в точке P, либо 2) точкой $l_2 \neq P$, в которой g пересекает $\partial \mathrm{D}$. Тогда $d\psi_1$ и dl_2 определяют меры на $[P]$. Ясно, что ψ_2 измеряется в точке l_2, а χ является длиной хорды, исходящей из P в направлении ψ_1. Используя (1.16) и (1.17), находим

$$2\int_{[P]} \chi \sin\psi_1\, d\psi_1 = \int_{[P]} \cos(\psi_1 - \psi_2)\, dl_2 = H - 2\int_{[P]} \sin^2 \frac{\psi_1 - \psi_2}{2}\, dl_2. \tag{1.18}$$

Интеграл

$$T(P) = \frac{1}{2}\int_{[P]} \chi \sin\psi_1\, d\psi_1, \tag{1.19}$$

определенный для любой точки $P \in \partial \mathrm{D}$ имеет "томографическую" интерпретацию : длины χ, измеряемые из точки $P \in \partial \mathrm{D}$ в любых возможных направлениях, усредняются на интервале $(0, \pi)$ с плотностью $\frac{1}{2}\sin\psi_1$. В стандартных томографических терминах, $T(P)$ является взвешенным интегралом **рентгенограммы** (X–ray) снятой из точки $P \in \partial \mathrm{D}$. Укажем несколько свойств параметра $T(P)$. В более слабой форме, (1.18) можно записать как неравенство

$$T(P) \leq \frac{H}{4}, \tag{1.20}$$

которое сводится к равенству, когда D является окружностью (в этом случае $\psi_1 \equiv \psi_2$ и последний интеграл в (1.18) равен нулю). В действительности, выписав простое дифференциальное уравнение, можно показать, что если условие $\psi_1 \equiv \psi_2$ удовлетворяется для одной точки $P \in \partial \mathrm{D}$, то D уже является окружностью. Это означает, что по крайней мере в классе областей с гладкой границей D, в неравенстве (1.20) мы имеем равенство тогда и только тогда, когда D является окружностью. (Из неравенств, которые следуют, можно заключить, что имеет значение только гладкость границы $\partial \mathrm{D}$ в точке P). Согласно неравенству Шварца

$$\left[\int_{[P]} \chi \sin\psi\, d\psi\right]^2 \leq \frac{\pi}{2}\int_{[P]} \chi^2\, d\psi.$$

Очевидно, что из равенства

$$\int_{[P]} \chi^2 \, d\psi = 2\,||\mathbf{D}||, \quad \text{удвоенная площадь области } \mathbf{D} \tag{1.21}$$

следует, что $4T^2(P) \leq \pi\,||\mathbf{D}||$. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\chi = C \sin\psi$, т.е. когда $\mathbf{D}$ является кругом диаметра C.

Отметим, что из (1.21) следует, что $||\mathbf{D}||$ также представляет собой интегральный томографический параметр, вычисленный по томограмме $\chi(\psi)$, снятой из точки $P \in \partial\mathbf{D}$. Итак, мы приходим к следующему заключению о возможности томографической проверки гипотезы, что $\mathbf{D}$ - круговой диск, **основываясь на двух интегральных параметрах, зависящих от томограммы, снятой из некоторой точки $P \in \partial\mathbf{D}$.**

Следствие 1. Пусть D – плоская выпуклая область и $P \in \partial\mathbf{D}$ – точка, где $\partial\mathbf{D}$ является гладкой. Если $4T^2(P) = \pi\,||\mathbf{D}||$, то D – круговой диск.

Также имеет место тождество

$$\int_{\partial\mathbf{D}} T(l)\,dl = \int |\chi|\,dg = \pi\,||\mathbf{D}||.$$

Первое равенство следует из (1.10), а второе является известным фактом интегральной геометрии [6]. Отметим, что интегрируя (1.20) по границе $\partial\mathbf{D}$, получим

$$\pi\,||\mathbf{D}|| \leq \frac{H^2}{4},$$

т.е. классическое изопериметрическое неравенство. Следовательно, (1.20) можно назвать "дезинтегрированным изопериметрическим неравенством".

§2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВОЛЬТЕРРА В ЗАДАЧЕ ВИКСЕЛЛА

Задача Викселла – одна из старейших в стереологии. На плоскости имеется совокупность дисков случайных радиусов, центры которых образуют трансляционно инвариантный точечный процесс. Пересечения "тестовой прямой" с этими дисками образует одномерный случайный процесс отрезков. Задача Викселла : по заданному вероятностному распределению длины типичного отрезка пересечения определить вероятностное распределение длины радиуса типичного круга. В такой постановке задача решается сведением к интегральному уравнению Абеля. Если области суть гомотетические копии некоторой области, отличной от круга, глобальную изотропию можно сохранить применением к областям независимых равномерных вращений. Однако, в этой постановке удовлетворительное решение отсутствует.

Статья [7] предлагает рассмотреть задачу Викселла в некоторой модифицированной постановке, в которой области случайных размеров изотропно разбросанные на плоскости, обладают также **случайным шейпом**. Опираясь на тождество Плейеля (1.3), в [7], эта идея проводится для **случайных выпуклых равносторонних N-угольных шейпов**. Постановку задачи в работе [7] дадим после необходимых определений :

Равносторонний N-угольный шейп (будем обозначать через s) = равносторонний N-угольник со стороной единичной длины. С центром тяжести O в начале координат, и, скажем, ориентированным так, что ближайшая к O вершина попадает на положительную координатную полуось $X > 0$. Для того, чтобы описать **случайный** шейп s необходимо определить вероятностное распределение S в соответствующем пространстве. Отметим, что шейп s можно описать $N-3$ угловыми параметрами. Следовательно, для $N > 3$, примеры S можно построить, используя совместную плотность распределения угловых параметров.

Пусть $\{s_i\}$ – последовательность независимых случайных плоских выпуклых шейпов, полученных из некоторого вероятностного распределения S, сосредоточенного на равносторонних N-угольных шейпах. Вторым источником случайности служит **случайный маркированный точечный процесс** $\{M_i, h_i\}$ на группе $\mathbb{M}$ всех евклидовых движений плоскости $\mathbb{R}^2$ с марками в интервале $(0, \infty)$. Вероятностное распределение P маркированного точечного процесса $\{M_i, h_i\}$ берется инвариантным относительно евклидовых движений, а точечный процесс $\{M_i\}$ предполагается процессом конечной интенсивности. Тогда (см. [6]) определено вероятностное распределение V **типичной марки** h. Простейший пример процесса $\{M_i, h_i\}$, удовлетворяющего упомянутым условиям : $\{M_i\}$ = пуассоновский точечный процесс, управляемый мерой, пропорциональной мере Хаара на группе $\mathbb{M}$, $\{h_i\}$ = последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с вероятностным распределением V.

Рассмотрим случайный набор областей $\{M_i h_i s_i\}$, где область hs получена из s гомотетией с коэффициентом $h > 0$, а $M h$s – получена из области hs применением евклидового движения M.

Пусть g_0 – некоторая прямая на плоскости $\mathbb{R}^2$ (тестовая прямая). Она пересекает некоторые области из случайного счетного подмножества $\{M_i h_i s_i\}$. Непустые пересечения $\mathbf{I}_i = M_i h_i s_i \cap g_0$ образуют случайное множество интервалов на g_0, которые обозначим через $\{\mathbf{I}_i\}$. Распределение множества $\{\mathbf{I}_i\}$ инвариантно относительно сдвигов, отображающих g_0 в себя. Если интенсивность случайного множества $\{\mathbf{I}_i\}$ конечна, то можно говорить [6] о распределении $\mathbf{W}$ *длины типичного интервала* в случайном наборе $\{\mathbf{I}_i\}$. В приведенном выше примере центры интервалов из $\{\mathbf{I}_i\}$ образуют пуассоновский точечный процесс, а их длины образуют последовательность независимых случайных величин, имеющих одинаковое вероятностное распределение $\mathbf{W}$.

Задача стереологии : по заданному $\mathbf{W}$ найти $\mathbf{V}$.

Стандартными методами (см. [6]), можно показать, что распределение $\mathbf{W}$ можно получить, используя следующую стохастическую конструкцию :

Шаг 1 : Выбираем случайный шейп $\mathbf{s}$ из вероятностного распределения $\mathbf{S}$.

Шаг 2 : Независимо выбираем значение h из вероятностного распределения $(H)^{-1}h\,\mathbf{V}(dh)$, где $H = \int h\,\mathbf{V}(dh) < \infty$ и строим многоугольник $h\mathbf{s}$.

Шаг 3 : Выбираем случайную прямую g с равномерным вероятностным распределением на $[h\mathbf{s}]$.

Напомним, что для заданных $\mathbf{s}$ и h равномерное вероятностное распределение на $[h\mathbf{s}]$ пропорционально сужению меры dg на множество $[h\mathbf{s}]$, с соответствующей нормировкой. $I_{[h\mathbf{s}]}(g)$ обозначает индикаторную функцию множества $[h\mathbf{s}]$. Так как для каждого $h > 0$

$$\int I_{[h\mathbf{s}]}(g)dg = Nh,$$

то нормирующим множителем является $(Nh)^{-1}$.

Результатом стохастической конструкции является случайная фигура $(h\mathbf{s}, g)$, состоящая из области $h\mathbf{s}$ и прямой $g \in [h\mathbf{s}]$. Ясно, что вероятностное распределение $(h\mathbf{s}, g)$ имеет вид

$$(NH)^{-1}\mathbf{V}(dh)\,\mathbf{S}(d\mathbf{s})\,I_{[h\mathbf{s}]}(g)\,dg. \tag{2.1}$$

Величины $\chi =$ длина $h\mathbf{s} \cap g$, $\cot\psi_1$ и $\cot\psi_2$, определенные в (1.3), при заданном $(h\mathbf{s}, g)$ становятся случайными. Их совместное распределение индуцировано из (2.1). Доказательство следующей леммы может быть легко получено, используя теорию распределения типичной марки [6].

Лемма 1. Вероятностное распределение случайной переменной χ совпадает с $\mathbf{W}$.

Задавая шейп s и величину h, запишем тождество (1.3) для области hs и проинтегрируем его относительно вероятностного распределения $\mathbf{V} \times \mathbf{S}$. Так как для каждой функции f, определенной на $(0, \infty)$

$$(HN)^{-1} \int\int\int f(\chi)\, \mathbf{V}(dh)\mathbf{S}(d\mathrm{s})\, dg = \int W(x)\, f(x)\, dx$$

$$\int\int f(h)\, \mathbf{V}(dh)\mathbf{S}(d\mathrm{s}) = \int V(x)\, f(x)\, dx,$$

где $W(x)$ и $V(x)$ плотности вероятностных распределений $\mathbf{W}$ и $\mathbf{V}$, получаем

$$\begin{gathered} \int W(x)\, F'(x)\, dx = H^{-1} \int V(x)\, F(x)\, dx + \\ + (HN)^{-1} \int V(h)\, dh \int \mathbf{S}(d\mathrm{s}) \int_{[h\mathrm{s}]} F''(\chi)\, \chi \cot\psi_1 \cot\psi_2\, dg. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Отметим, что существование $W(x)$ следует из существования $V(x)$.

Мы будем рассматривать (2.2) для функции $F(x) = \delta(x-y)$, где $\delta(x-y)$ есть дельта функция Дирака в точке $y > 0$. Функционалы $\delta(x-y)$, $\delta'(x-y)$ хорошо известны : для каждой $u(x) \in C^{(2)}$ имеем

$$\int u(x)\, \delta(x-y)\, dx = u(y) \quad \text{и} \quad \int u(x)\, \delta'(x-y)\, dx = -u'(y). \tag{2.3}$$

Однако, подстановка $\delta''(x-y)$ вместо F'' в кратный интеграл в (2.2) требует обоснования. Для прояснения ситуации, в [7] возвращаемся к стандартному определению δ-функции и рассмотрим семейство функций $F(x) = F_\epsilon(x)$, для которых $\lim_{\epsilon\to 0} F_\epsilon(x) = \delta(x-y)$ в смысле слабой сходимости (такое семейство назовем $\delta(x-y)$-**семейством**). Необходимо найти условия на распределение $\mathbf{S}$, которые гарантировали бы, что для любой вероятностной плотности $V(h)$ на $(0, \infty)$ с конечным средним H имеет место следующее соотношение :

$$\begin{gathered} \lim_{\epsilon\to 0} \int V(h)\, dh \int \mathbf{S}(d\mathrm{s}) \int_{[h\mathrm{s}]} F''_\epsilon(\chi)\, \chi \cot\psi_1 \cot\psi_2\, dg = \\ = \int V(h)\, dh \lim_{\epsilon\to 0} \int \mathbf{S}(d\mathrm{s}) \int_{[h\mathrm{s}]} F''_\epsilon(\chi)\, \chi \cot\psi_1 \cot\psi_2\, dg = \int V(h)\, K(h,y) dh. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Из (2.2), (2.3) следует, что таким способом определенное $K(h,y)$ является ядром в интегральном уравнении

$$-W'(y) = H^{-1}V(y) + (HN)^{-1} \int V(h)\, K(h,y)\, dh. \tag{2.5}$$

Основной результат [7] получен при следующих предположениях относительно вероятностного распределения $\mathbf{S}$.

I : с вероятностью $\mathbf{S} = 1$ длина каждой хорды многоугольника $\mathbf{s}$, содержащей вершину, превосходит 1.

II : случайный внутренний угол многоугольника $\mathbf{s}$ в каждой вершине V_k тупоугольный и с вероятностью $\mathbf{S} = 1$ превосходит $\pi/2 + \nu$ для некоторого постоянного $\nu > 0$.

III : Существует постоянная $c > 0$ такая, что с вероятностью $\mathbf{S} = 1$, в $\mathbf{s} = (s, 1)$ для каждого α_{ij} (= угол между сторонами a_i и a_j) имеем $\sin \alpha_{ij} > c$.

Предложение 1, [7]. Пусть S – вероятностное распределение в пространстве равносторонних N-угольных шейпов, обладающих плотностью в соответствующем параметрическом пространстве, $V(h)$ и $W(y)$ – плотности вероятностных распределений V и W, $H = \int h\,V(h)\,dh < \infty$. Если S обладает свойствами I, II, III, то любая непрерывная $H^{-1}V(h)$ удовлетворяет интегральному уравнению (2.5), причём последнее оказывается уравнением типа Вольтерра с ограниченным ядром.

В [7] был найден конкретный алгоритм для вычисления $K(h, y)$. Примеры вероятностных распределений S, удовлетворяющих условиям I, II, III существуют, начиная с $N = 5$.

Возможно, тождества Плейеля для черно–белых раскрасок помогут получить в задаче Викселла устойчивые алгоритмы для случайных выпуклых шейпов, отличных от многоугольных. Другая нерешенная задача – применение аналогичного подхода в трехмерном пространстве. Некоторые тождества типа Плейеля в трехмерном пространстве можно найти в [1].

§3. СЛУЧАЙНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ НА ПЛОСКОСТИ

Другим направлением применения тождеств типа Плейеля являются случайные геометрические процессы. Первая попытка в этом направлении была сделана в [5], где тождество (1.3) было использовано при изучении случайных многоугольных мозаик. Аналогичный подход был применен в [1] к общим случайным процессам многоугольников (=случайные множества многоугольников). Эти ранние попытки использовали метод построения стохастических аналогов тождеств типа Плейеля. Аналогичный метод был также применен при изучении случайных раскрасок плоскости (см. [1]).

Пусть для заданного инвариантного относительно евклидовых движений плоского процесса многоугольников можно говорить о вероятностном распределении длины $|a|$ **типичной стороны многоугольника**, и $\mathbf{E}_1$ обозначает математическое ожидание относительно этого распределения. (О понятии типичного элемента в геометрическом процессе см. [6].) Предположим, что на плоскости задана **тестовая прямая** g_0. На прямой g_0 индуцируется последовательность $\{I_i\}$ интервалов пересечений с многоугольниками заданного процесса многоугольников. С каждым интервалом I_i связаны два угла $\psi_1^{(i)}$, $\psi_2^{(i)}$, под которыми g_0 пересекается сторонами соответствующего многоугольника. Предполагая, что для последовательности $\{I_i, \psi_1^{(i)}, \psi_2^{(i)}\}$ определено вероятностное распределение **типичной тройки** $(|I|, \psi_1, \psi_2)$, через $\mathbf{E}_2$ будем обозначать математическое ожидание относительно этого распределения.

При некоторых достаточно общих условиях, очерченных в [1], имеет место следующий **стохастический вариант** тождества (1.3) :

$$(\mathbf{E}_1|a|)^{-1}\mathbf{E}_1 F(|a|) = \mathbf{E}_2\left[F'(|I|) - F''(|I|)\,|I| \cot\psi_1 \cot\psi_2\right],$$

которое, в частности, приводит к следующему утверждению.

Предложение 2, [1]. Если в случайной типичной триаде $(|I|, \psi_1, \psi_2)$ величины $|I|$ и углы ψ_1 и ψ_2 независимы, то необходимо

$$V(x) = 1 - l\frac{d}{dx}W(x),$$

где $V(x)$ и $W(x)$ – функции распределения случайных величин $|a|$ и $|I|$ соответственно, и $l = E_1|a|$. Если дополнительно предположить, что

a) $|I|$ и $|a|$ имеют одинаковое распределение или

b) $|I|$ распределено экспоненциально,

то случайная величина $|a|$ необходимо имеет экспоненциальное распределение со средним $\mathbf{E}_1|a| = \mathbf{E}_2|I|$.

Тождество (1.4), записанное для $A = A_0$, определенного в §1, имеет **стохастический вариант** для случайных однородных и изотропных случайных черно–белых **раскрасок** плоскости. В [1], глава 10 можно найти это уравнение, при условии, что случайное черное множество является счетным объединением строго выпуклых областей (так называемая булева модель, пуассоновость процесса областей не предполагается). Это уравнение относится к случайной последовательности чередующихся черно–белых интервалов, индуцированных на тестовой прямой g_0, точнее к случайным величинам

$|I|$ = длина типичного белого интервала на g_0 и

ψ_1, ψ_2 = два угла, под которыми кривая, разделяющая цвета, пересекает тестовую прямую g_0 на концах типичного белого интервала.

Предложение 3, [1]. Если длины черных и белых интервалов на тестовой прямой независимы, то из независимости случайных величин в типичной триаде ($|I|$, ψ_1, ψ_2) следует экспоненциальность распределения длины типичного белого интервала.

Аналогичные задачи рассматривались в [6], глава 10, другим методом. Последний метод состоит из следующих трех шагов :

1. Тождество (0.1) записывается для подходящего множества C, которое зависит от реализации геометрического процесса в прямоугольнике. Высота прямоугольника рассматривается как малый параметр.

2. Это тождество усредняется относительно распределения рассматриваемого геометрического процесса.

3. Полученный результат разлагается по малому параметру.

Этот подход использовался в [9] и [10], где изучались общие (не обязательно пуассоновские) случайные процессы прямых на плоскости $\mathbb{R}^2$, которые являются главным предметом в стохастической геометрии (см. [8]).

Метод "инвариантного вложения" (термин пришел из математической физики), предложенный в [9], открывает путь для замены условия $\mathbb{M}_2$-инвариантности геометрических процессов (типичного для [1] и [6]), на более слабое условие их $\mathbf{T}_2$-инвариантности. ($\mathbf{T}_2$ – группа параллельных переносов плоскости, $\mathbf{T}_2$-инвариантные геометрические процессы иначе называются однородными.)

В статье [10] рассматриваются случайные процессы прямых $\{g_i\}$ на плоскости класса Ti2.

Определение. Случайный процесс прямых $\{g_i\}$ принадлежит классу Ti2, если его вероятностное распределение $\mathbf{P}$ инвариантно относительно $\mathbf{T}_2$, и его первая и вторая моментные меры имеют вид $f\,dg$ и (вне $g_1 = g_2$) $f_2\,dg_1\,dg_2$ соответственно, с непрерывными (и трансляционно-инвариантными) плотностями $f(g)$ и $f_2(g_1, g_2)$.

Примером процесса прямых класса Ti2 является пуассоновский процесс прямых, управляемый первой моментной мерой $f(g)\,dg$, причем плотность $f(g)$ зависит только от направления φ прямой g, т.е. $f(g) = f(\varphi)$.

Результаты [10] относятся к маркированному точечному процессу $\{x_i, \Psi_i\}_\alpha$ индуцированному на тестовой прямой $g(\alpha)$ направления α : $\{x_i\}_\alpha = \{g_i\} \bigcap g(\alpha)$ есть точечный процесс пересечений, а марки Ψ_i суть углы, под которыми прямые из реализации пересекают тестовую прямую $g(\alpha)$ в точках $\{x_i\}_\alpha$. Основным результатом является вывод дифференциального уравнения для так называемых конечномерных вероятностных распределений точечного процесса $\{x_i\}_\alpha$ при дополнительных условиях :

a) Для любого направления α, последовательность $\{\cot \Psi_i\}_\alpha$ некоррелирована с точечным процессом $\{x_i\}_\alpha$.

b) Последовательность $\{\cot \Psi_i\}_\alpha$ есть последовательность некоррелированных случайных величин.

Пусть $\overline{\gamma} = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$ система непересекающихся интервалов на тестовой прямой $g(\alpha)$ и $\overline{k} = (k_1, ..., k_n)$ - последовательность неотрицательных целых чисел. Обозначим

$$p_{\overline{k}}(\overline{\gamma}, \alpha) = \text{ совместная вероятность иметь } k_j \text{ точек из } \{x_i\}_\alpha \text{ на каждом интервале } \gamma_j,\ j = 1, ..., n.$$

В $T_?$-инвариантном случае $p_{\overline{k}}(\overline{\gamma}, \alpha) = p_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha)$, где $\overline{t} = (t_1, ..., t_n)$ есть последовательность длин интервалов γ_i, $\overline{u} = (u_1, ..., u_{n-1})$ - последовательность длины пробелов между γ_i. Распределение случайного точечного процесса $\{x_i\}_\alpha$ полностью определяется величинами $p_{\overline{k}}(\overline{\gamma}, \alpha)$, $n \geq 1$ (см. [6]).

Работа [10] начинается с обобщенных формул Пальма. Вместе с инвариантным вложением, которое в этом случае сводится к "геометрическому" дифференцированию по α, это составляет анализ первого порядка. При дополнительном условии a) из этого анализа следует, что

$$p_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha) = q_{\overline{k}}(\lambda(\alpha)\, \overline{t}, \lambda(\alpha)\overline{u}), \tag{3.1}$$

где $q_{\overline{k}}$ - некоторые функции $2n - 1$ переменных, $\lambda(\alpha)$ - интенсивность точечного процесса пересечений $\{x_i\}_\alpha$.

Анализ второго порядка начинается с усреднения относительно $\mathbf{P} \in$ Ti2 тождества (0.1), записанного для некоторого множества $C = A \cap B$, зависящего от системы случайных хорд прямоугольника $(0, l) \times T$, где $l > 0$ рассматривается как малый параметр, а $T \subset g(\alpha)$ - минимальный отрезок, содержащий все $\gamma_1, ..., \gamma_n$. При этом

$$A = \{g \in \mathbf{G} : g \text{ пересекает стороны } (0, l) \times T, \text{ перпендикулярные к } g(\alpha)\},$$

$$B = \{g \in \mathbf{G} : g \text{ пересекается } k_i \text{ случайными хордами из } (0, l) \times \gamma_i\}.$$

"Случайные хорды" в определении множества B порождаются прямыми из реализации процесса прямых.

Далее выделяются члены в усредненном тождестве (0.1), имеющие порядок l^2. При дополнительных предположениях a), b), в результате анализа второго порядка получается дифференциальное соотношение

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial t_i} t_i + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial u_i} u_i + \frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial \alpha^2} = 2 f(\alpha) \sum_{i=1}^{n} t_i \Delta_i \pi_{\overline{k}} + \tag{3.2}$$

$$+ \frac{[\lambda'(\alpha)]^2}{[\lambda(\alpha)]^2} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_i^2} t_i^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial u_j^2} u_j^2 + 2 \sum_{i<j} \frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_i \partial t_j} t_i t_j + \right.$$

$$\left. + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_i \partial u_j} t_i u_j + 2 \sum_{i \neq j = 1}^{n-1} \frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial u_i \partial u_j} u_i u_j \right],$$

где Δ_i обозначает первую разность по k_i. Это соотношение связывает вероятности $p_{\overline{k}} = p_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha)$ с условными вероятностями $\pi_{\overline{k}} = \pi_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha)$ тех же событий, при условии, что **одна из прямых из $\{g_i\}$ совпадает с тестовой прямой** $g(\alpha)$. Вероятности $\pi_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha)$ описывают точечный процесс пересечений на **типичной прямой** из $\{g_i\}$, имеющей направление α.

Отметим, что (3.2) является далеко идущим уточнением дифференциального соотношения в Предложении 2. Оно записано на языке вероятностей подсчета точек из $\{x_i\}_\alpha$ в некоторых интервалах на тестовой прямой, в отличие от языка интервалов между точками в $\{x_i\}_\alpha$, использованного в Предложении 2.

Соотношения (3.2) превращается в дифференциальное уравнение при дополнительном условии (названном в [10] условием "достаточного перемешивания")

$$\pi_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha) = p_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha). \tag{3.3}$$

Это уравнение решается при начальных условиях

$$p_{\overline{0}}(\overline{0}, \overline{u}, \alpha) = 1 \quad \text{и} \quad p_{\overline{k}}(\overline{0}, \overline{u}, \alpha) = 0, \quad \text{если} \quad \overline{k} \neq \overline{0}.$$

В работе [10] задача сводится к легко разрешимому уравнению Эйлера для однородных функций порядка 0. Сформулируем этот результат.

Предложение 4, [10]. Пусть для случайного процесса прямых $\{g_i\}$ из класса Ti2 маркированный точечный процесс $\{x_i, \Psi_i\}_\alpha$ удовлетворяет

условию a). Если дополнительно предположить, что для некоторого направления α выполнены условия b) и (3.3), то для этого направления α точечный процесс $\{x_i\}_\alpha$ необходимо пуассоновский, т.е.

$$p_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha) = \prod_{i=1}^{n} \frac{[\lambda(\alpha)\, t_i]^{k_i}}{k_i!}\, e^{-\lambda(\alpha)\, t_i}.$$

Читатель отметит аналогию между результатом пуассоновости Предложения 4 и результатом экспоненциальности a) в Предложении 2. Отметим также, что если имеет место соотношение (3.2), то пуассоновость процесса $\{x_i\}_\alpha$ влечет пуассоновость процесса пересечений на типичной прямой направления α из случайного набора $\{g_i\}$. Другими словами, вероятности $\pi_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha)$ должны быть пуассоновскими. Это соответствует пункту b) Предложения 2.

§4. ВАЛЮАЦИИ В ПРОСТРАНСТВАХ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Валюация =конечно-аддитивная функция множеств. Конструкция обсуждаемых в этом параграфе валюаций вытекает из Теоремы 1 (см. Введение) и ее вариантов для пространств плоскостей и прямых в $\mathbb{R}^3$ рассмотренных в [1].

1. Валюации на $U_{\mathbf{G}}$.

Пусть $F(P_1, P_2)$ – симметричная функция, определенная на $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, непрерывна и линейно–аддитивна, т.е. если P_1, P_2, P_3 находятся на одной прямой, P_2 между P_1 и P_3, то $F(P_1, P_2) + F(P_2, P_3) = F(P_1, P_3)$. Рассмотрим функционал $\Phi(B; \{P_i\})$, определенный на $Br\{P_i\}$ для заданного конечного множества точек $\{P_i\}$, получаемый подстановкой в формулу (0.1) значений $\frac{1}{2} F(P_1, P_2)$ вместо $\mu([P_i, P_j])$, т.е.

$$\Phi(B; \{P_i\}) = \frac{1}{2} \sum_{i<j} c_{ij}(B) F(P_i, P_j). \tag{4.1}$$

Два множества в $\mathbf{G}$ полагаем эквивалентными, если они совпадают с точностью до конечного числа пучков $[P] = \{g \in \mathbf{G} : P \in g\}$, $P \in \mathbb{R}^2$. Для любого $A \in Br\{P_i\}$ и множества $\{Q_i\}$ всегда существует множество $A^* \in Br(\{P_i\} \cup \{Q_i\})$ такое, что A и A^* эквивалентны. Легко показать, что

$$\Phi(A, \{P_i\}) = \Phi(A^*, \{P_i\} \cup \{Q_i\}).$$

Если игнорировать разницу между эквивалентными множествами, то класс $U_{\mathbf{G}} = \cup Br\{P_i\}$ (объединение берется по всем конечным подмножествам $\{P_i\}$), является кольцом подмножеств в $\mathbf{G}$. На $U_{\mathbf{G}}$ определим функционал

$$\Phi(A) = \Phi(A, \{P_i\}).$$

Предыдушее соотношение означает, что это определение корректно.

Для проверки утверждения, что Φ является валюацией на $U_{\mathbf{G}}$, достаточно установить аддитивность. Для любого конечного числа множеств $A_s \in U\mathbf{G}$, существует подмножество точек $\{P_i\}$ такое, что $A_s \in Br\{P_i\}$ для всех s и требуемое свойство следует из аддитивности коэффициентов $c_{ij}(A)$ в A. Если мы дополнительно предположим, что F является **псевдометрикой** (т.е. $F \geq 0$, F удовлетворяет неравенству треугольника, $F(P,P) = 0$), то функционал Φ неотрицателен.

Доказательство этого утверждения получается использованием модели пространства $\mathbf{G}$, полученной с помощью стереографической проекции

$$\mathbb{R}^2 \longmapsto \text{открытая полусфера}$$

(при которой каждая прямая g отображается на геодезическую) и последующим использованием полярного отображения, при котором каждая геодезическая представляется своим полюсом.

Суперпозиция этих двух отображений переводит $\mathbf{G}$ в полусферу, на которой диаметрально противоположные точки экватора отождествлены и выброшена точка N (топологически открытый лист Мебиуса). В этой модели пучкам прямых в $\mathbf{G}$ соответствуют большие круги, и любой сферический треугольник, не содержаший выброшенную точку N, соответствует множеству прямых $\Delta = [P_1, P_2] \cap [P_1, P_3]$ для некоторой тройки точек P_1, P_2, P_3 в $\mathbb{R}^2$. Непосредственно вычисляя коэффициенты в (4.1) получаем

$$\Phi(\Delta) = F(P_1, P_2) + F(P_1, P_3) - F(P_2, P_3), \tag{4.2}$$

и эта величина неотрицательна, если F является псевдометрикой. При вышеопределенном отображении каждая $A \in U_{\mathbf{G}}$ представляется объединением геодезически выпуклых многоугольников на сфере, которые не содержат точки N. Так как каждое такое множество можно разложить на конечное объединение треугольников $A = \cup\Delta_i$ с $int\Delta_i \cap int\Delta_j = \emptyset$, из аддитивности F следует, что $\Phi(B) \geq 0$ для любого $B \in U_{\mathbf{G}}$. Как показано в [16], из неотрицательности Φ следуют свойства непрерывности Φ, которые гарантируют, что эта валюация оказывается мерой в пространстве $\mathbf{G}$. Этим путем мы получаем доказательство Теоремы 2, которая является "валюационным вариантом" результатов А. В. Погорелова [12], Р. Александера [13] и Р. В. Амбарцумяна [14], относящихся к четвертой проблеме Гильберта в $\mathbb{R}^2$. Последняя проблема состоит в описании метрик или псевдометрик, для которых обычные евклидовы прямые являются геодезическими (эквивалентно, в описании линейно–аддитивных псевдометрик).

Теорема 2. Следующие два утверждения эквивалентны :

1) F есть линейно–аддитивная непрерывная псевдометрика в $\mathbb{R}^2$,

2) валюация Φ, соответствующая $F(P_1, P_2)$, продолжается до неотрицательной меры в $\mathbf{G}$. Последняя равна нулю на каждом пучке прямых.

Для анализа удобно (как в нижеследующих §5 и §6), заменить свойство псевдометрики для функции $F(P_1, P_2)$ некоторым локальным условием. Такое условие можно получить используя **флаговые функции** (впервые в интегральной геометрии эти функции были использованы в [17]). Некоторые подходы к этой задаче даны в работах [15], [16], [18]. Здесь мы очертим подход [15]. Задача разбивается на две части :

когда валюация Φ продолжается до знакопеременной меры на $\mathbf{G}$? и

когда эта мера оказывается неотрицательной ?

Флаг на плоскости $\mathbb{R}^2$ есть пара $(P, \varphi) = (x, y, \varphi)$, состоящая из точки $P = (x, y)$ и направления $\varphi \in [0, \pi)$ на плоскости $\mathbb{R}^2$. Пусть $\rho(P, \varphi) = \rho(x, y, \varphi)$ – непрерывная функция, определенная в пространстве флагов (ниже ρ будем называть **флаговой или финслеровой плотностью**). Рассмотрим непрерывную и линейно–аддитивную функцию

$$F(P_1, P_2) = \int_{P_1P_2} \rho(P, \varphi)\, dl, \tag{4.3}$$

где интегрирование ведется относительно точек P, принадлежащих прямолинейному отрезку P_1, P_2, dl есть элемент длины на этом отрезке. Угловой параметр φ в аргументе функции ρ совпадает с направлением отрезка P_1, P_2.

Будем говорить, что последовательность троек $P_1(n), P_2(n), P_3(n)$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ образует **узкий треугольник**, если точки $P_1(n)$, $P_2(n)$ и $P_3(n)$ стремятся к трем различным предельным точкам P_1, P_2, P_3, соответственно, лежащим на одной прямой, причем P_2 лежит между P_1 и P_3. Если существует знакопеременная мера σ в пространстве $\mathbf{G}$ с непрерывной плотностью такая, что

$$F(P_1, P_2) = \sigma([P_1, P_2]), \tag{4.4}$$

то для любого ограниченного узкого треугольника при $n \to \infty$ необходимо имеем

$$F(P_1(n), P_2(n)) + F(P_2(n), P_3(n)) - F(P_1(n), P_3(n)) = o(d(n)), \tag{4.5}$$

где $d(n)$ – длина перпендикуляра из $P_2(n)$ на прямую $P_1(n)$, $P_3(n)$.

Дуализм между пространствами $\mathbf{G}$ и полусферой позволяет отождествлять $U_{\mathbf{G}}$ с классом сферических многоугольников, а также Φ с так называемым функционалом Эйлера, определенным на сферических многоугольниках. (Название последнего функционала подчеркивает его тесную связь с известной формулой Эйлера сферического избытка для площади сферических треугольников). В действительности, для того, чтобы получить более наглядную геометрию, в [15] исследование проводится на плоскости, после применения еще одной стереографии. Возвращение к пространству $\mathbf{G}$ дает решение первой половины проблемы :

Предложение 5, [15]. Пусть F – функция, определенная по формуле (4.3) с помощью флаговой плотности $\rho(P,\varphi)$, которая имеет непрерывные производные до третьего порядка включительно. Свойство (4.5) необходимо и достаточно для того, чтобы соответствующая валюация Φ продолжалась до знакопеременной меры σ в пространстве $\mathbf{G}$ с непрерывной плотностью $f(g)$, т.е. $\sigma(dg) = f(g)\,dg$.

Условие (4.5) можно записать в терминах флаговой плотности ρ. Оказывается, что (4.5) эквивалентна следующему дифференциальному уравнению :

$$\frac{\partial \rho}{\partial_n P} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial_\varphi P\,\partial\varphi}, \qquad \rho = \rho(x, y, \varphi), \tag{4.6}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$ – дифференцирование по φ против часовой стрелки. Остальные операции в этом уравнении определяются после того, как на прямой L, содержащей точку $P = (x, y)$ и имеющей направление φ, мы выбираем одно из двух возможных направлений в качестве положительного. Далее $\dfrac{\partial}{\partial_\varphi P}$ обозначает дифференцирование по P в этом положительном направлении, а $\dfrac{\partial}{\partial_n P}$ – дифференцирование по P по нормали к прямой L, направленной в левую полуплоскость относительно прямой L. Результат не зависит от выбора положительного направления на прямой L.

Вопрос неотрицательности меры σ, порожденной флаговой плотностью $\rho(P,\varphi)$, решается критерием **выпуклости**. Его мы приводим с кратким доказательством. В обычных декартовых координатах x, y, уравнение (4.6) принимает вид

$$-\frac{\partial \rho}{\partial x}\sin\varphi + \frac{\partial \rho}{\partial y}\cos\varphi - \frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial\varphi}\cos\varphi - \frac{\partial^2 \rho}{\partial y \partial\varphi}\sin\varphi = 0. \tag{4.7}$$

Дифференцируя по φ и полагая для краткости $\rho' = \dfrac{\partial\rho}{\partial\varphi}$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial_\varphi P}[\rho(P,\varphi) + \rho''(P,\varphi)] = 0. \tag{4.8}$$

Вначале рассмотрим случай, когда $\rho(P,\varphi)$ не зависит от P, т.е. $\rho(P,\varphi) = \rho(\varphi)$. Напомним (см. [6], стр. 31), что условие выпуклости

$$\rho(\varphi) + \rho''(\varphi) \geq 0 \tag{4.9}$$

гарантирует, чтобы функция $\rho(\varphi)$ была бы опорной функцией некоторой ограниченной центрально–симметричной выпуклой области $\mathbf{D} \subset \mathbb{R}^2$ и наоборот. Величина $\frac{1}{2}[\rho(\varphi) + \rho''(\varphi)]$ совпадает с плотностью $f(\varphi) \geq 0$ некоторой трансляционно инвариантной меры в пространстве $\mathbf{G}$, определенной по $\mathbf{D}$. Отсюда следует, что для любого отрезка P_1, P_2

$$\int_{[P_1,P_2]} [\rho(\varphi) + \rho''(\varphi)]\, dg = 2\,\rho(\alpha)\,|P_1, P_2|,$$

где α – направление отрезка P_1, P_2. Таким образом, используя вид инвариантной меры (см. [6]) $dg = |\sin(\varphi - \alpha)|\, d\varphi\, dl$ в пространстве $\mathbf{G}$ в координатах

$l =$ точка, в которой прямая g пересекает отрезок P_1, P_2,

$\varphi =$ направление g,

приходим к замечательному интегральному тождеству

$$\int_0^\pi [\rho(\varphi) + \rho''(\varphi)]\, |\sin(\varphi - \alpha)|\, d\varphi = 2\,\rho(\alpha).$$

Будем говорить, что гладкая функция $\rho(P,\varphi)$ **выпукла**, если при фиксированном P она выпукла по переменной φ. Из (4.8) следует, что $\rho(P,\varphi) + \rho''(P,\varphi)$ остается константой на прямых g, содержащих точку P и имеющих направление φ. Другими словами, $\rho(P,\varphi) + \rho''(P,\varphi)$ является функцией, зависящей только от $g \in \mathbf{G}$. Пусть m обозначает знакопеременную меру в пространстве $\mathbf{G}$, для которой $\rho(P,\varphi) + \rho''(P,\varphi)$ является плотностью. Интегрированием предыдущего тождества получаем

$$m([P_1,P_2]) = \int_{[P_1,P_2]} [\rho(P,\varphi) + \rho''(P,\varphi)]\, dg = 2\int_{P_1,P_2} \rho(P,\alpha)\, dl.$$

Таким образом, мы пришли к следующему утверждению.

Предложение 6. **Для любой гладкой выпуклой функции** $\rho(P,\varphi)$ **удовлетворяющей условию (4.6), валюация** Φ, **соответствующая функции** $F(P_1,P_2) = \int_{P_1,P_2} \rho(P,\alpha)\,dl$, **продолжается до неотрицательной меры в пространстве** $\mathbf{G}$, **причем** $\rho(P,\varphi)+\rho''(P,\varphi)$ **является плотностью этой меры относительно** dg.

2. Валюации на $U_{\mathbb{E}}$.

Начнем с необходимых определений и кратко напомним основные результаты монографии [1], относящиеся к пространству $\mathbb{E}$ плоскостей в $\mathbb{R}^3$.

Пусть в $\mathbb{R}^3$ задано конечное множество точек $\{P_i\}$, содержащее не менее двух точек. Две плоскости, не содержащие точек P_i, будем называть **эквивалентными**, если они индуцируют одно и то же разбиение множества $\{P_i\}$. Множество эквивалентных плоскостей называется **атомом**, если его замыкание компактно. Каждому конечному множеству $\{P_i\}$ соответствует **кольцо** $r\{P_i\}$, определяемое как минимальное кольцо подмножеств $\mathbb{E}$, содержащее все атомы.

Если игнорировать разницу между эквивалентными множествами, то класс

$$U_{\mathbb{E}} = \bigcup r\{P_i\},$$

где объединение берется по всем конечным подмножествам $\{P_i\} \subset \mathbb{R}^3$, содержащим более одной точки, является кольцом в $\mathbb{E}$. Два множества $A \in r\{P_i\}$ и $B \in r\{Q_i\}$ эквивалентны, если симметрическая разность $A \Delta B$ принадлежит объединению конечного числа **пучков** (**пучок** – множество $[P]$ плоскостей, проходящих через точку $P \in \mathbb{R}^3$).

Флагом f в $\mathbb{R}^3$ называется триада, состоящая из точки $P \in \mathbb{R}^3$, прямой γ, проходящей через P и определяемой ее пространственным направлением Ω, и плоскостью e, проходящей через γ и определяемой углом поворота ϕ вокруг оси γ. Будем писать

$$f = (P,\gamma,e) = (P,\Omega,\phi), \quad P \in \mathbb{R}^3, \quad \Omega \in \mathcal{E}_2, \quad \phi \in \mathcal{E}_1(\Omega),$$

где $\mathcal{E}_2$ – проективная (или эллиптическая) плоскость, $\mathcal{E}_1(\Omega) = \mathcal{E}_1(\gamma)$ – окружность, представляющая пространство направлений, ортогональных к прямой γ. Пространство $\mathcal{F}$ флагов в $\mathbb{R}^3$ представляет собой произведение $\mathbb{R}^3 \times \nabla$, где ∇ – пространство **свободных флагов**. Имеем $f = (P,\Lambda)$, где $P \in \mathbb{R}^3$, $\Lambda = (\Omega,\phi)$ – свободный флаг флага f. Часто используются параметры, дуальные к Ω, ϕ, т.е.

$\Lambda = (\omega, \varphi)$, где $\omega \in \mathcal{E}_2$ – направление нормали к плоскости флага f;

$\varphi \in \mathcal{E}_1(\omega)$ – направление в плоскости флага f, совпадающее с Ω.

Рассмотрим семейство флагов, зависящих от прямой $\gamma \subset \mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{F}_\gamma = \{f:\ P \in \gamma,\ \Omega \text{ совпадает с направлением } \gamma,\ \phi \in \mathcal{E}_1(\Omega)\}.$$

Простейшие множества из $\mathcal{F}_\gamma$, называемые **клиньями**, имеют вид произведения $w = \nu \times \lambda$, где $\nu \subset \gamma$ – замкнутый интервал, а $\lambda \subset \mathcal{E}_1(\gamma)$ – замкнутая дуга (длины, не превышающей π).

Пусть $e(\gamma, \phi)$ – плоскость, проходящая через прямую $\gamma \subset \mathbb{R}^3$, повернутая вокруг γ на угол $\phi \in \mathcal{E}_1(\gamma)$. Прямая $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ и замкнутая дуга $\lambda \subset \mathcal{E}_1(\gamma)$ определяют множество

$$V = \bigcup_{\phi \in \lambda} e(\gamma, \phi) \subset \mathbb{R}^3.$$

Теперь мы можем дать следующее эквивалентное определение клина : **клин есть пара** $w = (\nu, V)$. Топология в **пространстве клиньев** индуцируется стандартной топологией в пространстве пар замкнутых множеств в $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим непрерывные функции $F(w)$, определенные в пространстве клиньев. Функция $F(w)$ называется **аддитивной**, если из $w = w_1 \cup w_2$ и $int\, w_1 \cap int\, w_2 = \emptyset$ следует $F(w) = F(w_1) + F(w_2)$. Дадим пример непрерывной, аддитивной функции клина. Знакопеременная мера m в пространстве $\mathbb{E}$ называется **беспучковой**, если значение меры m на любом пучке $[P]$ равно нулю, т.е. $m([P]) = 0$ для любой точки $P \in \mathbb{R}^3$. Пусть m – знакопеременная мера в пространстве $\mathbb{E}$. Для клина $w = (\nu, V)$ определим $|V \cap e|$ как угол (радианная мера множества направлений в e) плоской области $V \cap e$. Интеграл

$$F(w) = \int_{[\nu]} |V \cap e|\, m(de) \tag{4.10}$$

по множеству $[\nu]$ плоскостей, пересекающих ν, всегда является непрерывной и аддитивной функцией клина.

Нижеследующая теорема была доказана в [19] для неотрицательных мер, интегрированием разложения (0.1). Распространение на знакопеременные меры является ее простым следствием. Для заданного конечного множества точек $\{P_i\} \subset \mathbb{R}^3$, определим множество клиньев $W\{P_i\}$ **связанных** с $\{P_i\}$: клин $w = (\nu, V)$ принадлежит множеству $W\{P_i\}$ тогда и только тогда, когда концы ν принадлежат $\{P_i\}$, а каждая из двух плоскостей, ограничивающих V, содержит точки из множества $\{P_i\}$, а во внутренности множества V нет точек из $\{P_i\}$.

Теорема 3, [19]. Пусть m – беспучковая знакопеременная мера в пространстве $\mathbb{E}$, $\{P_i\} \subset \mathbb{R}^3$ – произвольное конечное множество точек. Для любого $A \in \tau\{P_i\}$, значение меры $m(A)$ может быть представлен в виде

$$m(A) = \sum c_s(A)\, F(w_s), \tag{4.11}$$

где сумма распространяется на множество клиньев $w_s \in W\{P_i\}$, F – функция клина (4.10), а коэффициенты $c_s(A)$ – целые числа, не зависящие от выбора m.

Комбинаторный алгоритм вычисления целочисленных коэффициентов $c_s(A)$ в (4.11) является вариантом формулы (0.2) (см. [1] или [19]).

Пример. Пусть τ – ограниченный, выпуклый многоугольник с вершинами $v_1, ..., v_n$, лежащий в плоскости $e \subset \mathbb{R}^3$. Пусть Q – точка, лежащая вне e. Пару (Q, τ) будем называть **пирамидой** K с **вершиной** Q и **основанием** τ. Запишем формулу (4.11) для пирамидального множества

$$A = Q|v_1, ..., v_n = Q|\tau = \{e \in \mathbb{E} \colon e \text{ отделяет } Q \text{ от } \tau\}.$$

Клинья из $W(K)$, связанные с $\{P_i\} = \{Q, v_1, ..., v_n\}$, имеют вид $w_s =$ (ребро пирамиды K, V). Ребра типа Qv_i назовем **боковыми**, а типа v_iv_j **базовыми**. Клин $w_s \in W(K)$ называется **опорным**, если $V \cap \operatorname{int} K = \emptyset$, и **покрывающим**, если $\operatorname{int} K \subset V$. Будем писать $w_s \in \mathrm{sl}$, если w_s является опорным клином на боковом ребре, и $w_s \in \mathrm{cb}$, если w_s – покрывающий клин на базовом ребре. Используя (4.11), получаем

$$m(Q|\, v_1, ..., v_n) = \sum_{w_s \in \mathrm{sl}} F(w_s) - \sum_{w_s \in \mathrm{cb}} F(w_s). \tag{4.12}$$

Пусть $F(w)$ – непрерывная функция, определенная в пространстве клиньев. Для множества $\{P_i\}$ и для любого $A \in \tau\{P_i\}$ положим

$$\Psi(A) = \sum_{w_s \in W\{P_i\}} c_s(A)\, F(w_s), \tag{4.13}$$

где коэффициенты $c_s(A)$, как и в Теореме 3. Выражение $\Psi(Q|\tau)$, задаваемое правой частью формулы (4.12), будем называть **пирамидальным эксцессом**.

Теорема 4, [20]. Если функция клина $F(w)$ аддитивна и непрерывна, то $\Psi(A)$, задаваемая по формуле (4.13), не зависит от выбора кольца, содержащего A и представляет собой валюацию на $U_{\mathbb{E}}$.

Любая непрерывная **флаговая плотность** $\rho(f)$, определенная в пространстве $\mathcal{F}$ флагов, порождает функцию клина по формуле

$$F(w) = \int_w \rho(f)\, dl\, d\phi. \tag{4.14}$$

Здесь $dl\, d\phi$ – единственная (с точностью до постоянного множителя) мера на $\mathcal{F}_\gamma$, инвариантная относительно евклидовых движений, причем dl – элемент длины на γ, а $d\phi$ – элемент равномерной угловой меры.

В работах [20] и [21] рассматривалась следующая задача : когда флаговая плотность $\rho(f)$ порождает по формулам (4.14) – (4.13) знакопеременную меру в пространстве $\mathbb{E}$? Другими словами, когда соответствующая валюация $\Psi(A)$ становится знакопеременной мерой ?

Определение. Последовательность пирамид (Q_s, τ), имеющих общее основание τ, называется **асимптотически плоской**, если расстояние $h_s = |Q_s Q_0|$ между вершинами и точкой $Q_0 \in \operatorname{int} \tau$ стремится к нулю.

Для заданной последовательности асимптотически плоских пирамид рассмотрим соответствующую последовательность множеств $Q_s|\tau$.

Предложение 7, [20]. Пусть Ψ – валюация на $U_{\mathbb{E}}$, порожденная флаговой плотностью $\rho \in C^{(3)}$ по формулам (4.14), (4.13). Если для каждой асимптотически плоской последовательности пирамид (Q_s, τ), пирамидальный эксцесс (4.12) удовлетворяет условию $\Psi(Q_s|\tau) = o(h_s^2)$, то существует единственная локально конечная знакопеременная мера m в $\mathbb{E}$, сужение которой на $U_{\mathbb{E}}$ совпадает с Ψ (т.е. Ψ – локально конечная знакопеременная мера в $\mathbb{E}$).

В статьях [20] и [21] этот результат использовался при выводе локальных условий для порождения знакопеременных мер. В результате получена система дифференциальных соотношений для $\rho \in C^{(3)}$. В этом классе эти соотношения как необходимы, так и достаточны. В случае, когда $\rho(P, \Lambda) = \rho(\Lambda)$ не зависит от точки P, мы формулируем следствие (в этом случае соответствующая знакопеременная мера трансляционно инвариантна).

Предложение 8, [20], [21]. Пусть $\rho(\Lambda) \in C^{(3)}$ – флаговая плотность, зависящая только от свободных флагов. Соответствующая валюация Ψ продолжается до локально конечной, знакопеременной меры на $\mathbb{E}$ тогда и только тогда, когда $\Lambda = (\omega, \varphi)$ представляется в виде

$$\rho(\Lambda) = \rho(\omega, \varphi) = A(\omega) \sin 2\varphi + B(\omega) \cos 2\varphi + C(\omega),$$

где функции A, B, C зависят только от ω и принадлежат классу $C^{(3)}$.

Замечание. Имеется в виду, что для каждого большого круга выбраны как нулевое направление $\varphi = 0$, так и ориентация. Однако, класс функций $\rho(\Lambda)$ описанный в Предложении 8, не зависит от этого выбора. Нижеследующее следствие из Предложения 8 отсутствует в работах [20] и [21]. Оно связывает теорию валюаций на $U_{\mathbb{E}}$ с классической задачей Функа восстановления функции, определенной на $\mathcal{E}_2$ по ее 1-мерным интегралам по большим кругам (решение см. в [12], иначе эта проблема известна, как задача обращения сферического преобразования Радона).

Флаговую функцию $\rho(\Lambda)$, зависящую только от свободных флагов Λ, назовем **простой**, если $\rho(\Lambda) = \rho(\omega, \varphi)$ не зависит от φ, т.е. $\rho(\Lambda) = \rho(\omega)$. Согласно Предложению 8, любая простая флаговая плотность из класса $C^{(3)}$ порождает знакопеременную меру m с помощью Ψ (случай $A(\omega) = B(\omega) = 0$). Подставляя простую $\rho(\Lambda)$ в (4.14) получаем следующую функцию клина

$$F(w) = |\nu| \int_{\lambda} \rho(\omega)\, d\phi. \tag{4.15}$$

Здесь $\lambda \subset \mathcal{E}_2$ является дугой из $c(\nu)$ = большой круг, ортогональный к ν. Как следует из конструкции валюации Ψ, с точностью до постоянного множителя имеем

$$m([\nu]) = \Psi([\nu]) = |\nu| \int_{c(\nu)} \rho(\omega)\, d\phi.$$

Функция $r(\Omega) = |\nu|^{-1} m([\nu])$, зависящая только от направления Ω отрезка ν, часто называется **розой пересечений** знакопеременной меры m. Из предыдущего уравнения вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. Для любой функции $\rho(\Omega) \in C^{(3)}$, определенной на $\mathcal{E}_2$, единственное решение $h(\omega)$ уравнения Функа

$$r(\Omega) = \int_{c(\Omega)} \rho(\omega)\, d\phi \tag{4.16}$$

порождает с помощью формул (4.15) и (4.13) валюацию, продолжимую до трансляционно инвариантной знакопеременной меры m на $\mathbb{E}$, для которой $r(\Omega)$ есть роза пересечений.

Итак, для заданной розы направлений $r(\Omega)$, задача вычисления меры $m(A)$ для множеств $A \in U_{\mathbb{E}}$ сводится к решению уравнения Функа (4.16) и вычислению одномерных интегралов (4.15).

Известно, что "роза пересечений" $r(\Omega)$ и плотность $h(\omega)$ знакопеременной меры связаны так называемым cos-преобразованием

$$r(\Omega) = \int |\cos(\widehat{\Omega\,\omega})|h(\omega)\,d\omega. \tag{4.17}$$

В [17] дано выражение дифференциального оператора, который $\rho(\Lambda)$ переводит в соответствующую плотность $h(\omega)$. В случае, когда $\rho(\Lambda) = \rho(\omega)$, этот оператор сводится к хорошо известному выражению $2\rho(\omega) + \Delta_2\rho(\omega)$, где Δ_2 – оператор Лапласа.

Из Следствия 2 вытекает, что cos-преобразование можно обратить, применяя дифференциальный оператор к решению уравнения Функа (4.16). Этим путем мы вновь получаем алгоритм, описанный в книге В. Бляшке "Круг и Шар", доказательство которого основано на фактах из дифференциальной геометрии выпуклых тел. Однако, для того, чтобы вычислить значение $m(A)$ для произвольного $A \in U_{\mathbb{E}}$ не обязательно вычислять $h(\omega) = 2\rho(\omega) + \Delta_2\rho(\omega)$, а затем выполнять трехмерное интегрирование. Следствие 2 указывает, что все что нужно это одномерное интегрирование плотности $\rho(\omega)$ согласно формуле (4.15).

3. Валюации на $U_{\mathbb{\Gamma}}$.

Построение кольца подмножеств $U_{\mathbb{\Gamma}}$ в пространстве $\mathbb{\Gamma}$ прямых в $\mathbb{R}^3$ и валюации Θ, определенной на этом кольце, было предложено в [1, Заключение]. В настоящее время имеются две статьи [16] и [22], изучающие порождение знакопеременных мер с помощью валюации Θ, и здесь мы представляем основные результаты этих работ. Для определения $U_{\mathbb{\Gamma}}$ и Θ нам понадобятся следующие обозначения :

γ = прямая в $\mathbb{R}^3$ (элемент пространства $\mathbb{\Gamma}$) ;

τ = **пластинка** = ограниченное выпуклое подмножество на плоскости из $\mathbb{R}^3$;

$\partial\tau$ = граница пластинки τ ;

$[\tau] = \{\gamma \in \mathbb{\Gamma} : \gamma$ не пересекает $\partial\tau$, но пересекает внутренность $\tau\}$;

$[\partial\tau] = \partial[\tau] = \{\gamma \in \mathbb{\Gamma} : \gamma \text{ hits } \partial\tau\}$.

Любая конечная совокупность $\{\tau_i\}$ пластинок в $\mathbb{R}^3$ порождает отношение эквивалентности в $\mathbb{\Gamma}$: прямые $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{\Gamma}$, не пересекающие $\partial\tau_i$, назовем эквивалентными, если они пересекают одни и те же пластинки. Множество эквивалентных прямых назовем **атомом**, если его замыкание компактно.

Для заданной совокупности $\{\tau_i\}$, через $r\{\tau_i\}$ обозначим минимальное кольцо подмножеств $\mathbb{\Gamma}$, содержащее все атомы. Если игнорировать разницу между эквивалентными множествами, то класс $U_{\mathbb{\Gamma}} = \cup\, r\{\tau_i\}$ (объединение берется по всем конечным подмножествам $\{\tau_i\} \subset \mathbb{R}^3$) является кольцом подмножеств в $\mathbb{\Gamma}$. Два множества $A_1, A_2 \in U_{\mathbb{\Gamma}}$ назовем эквивалентными, если их симметрическая разность принадлежит $\cup_i[\partial\tau_i]$ для некоторой конечной системы пластинок $\{\tau_i\}$). Пусть функция $F(P_1, P_2)$ определенная на $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, будет непрерывной, симметричной и аддитивной вдоль прямых γ. Как очерчено в 1. этого параграфа, для каждой $e \in \mathbb{E}$ строится кольцо U_e подмножеств $\mathbf{G}_e$ = пространство прямых на плоскости e в $\mathbb{R}^3$. Сужение $F(P_1, P_2)$ на пары $P_1, P_2 \in e$ определяет валюацию $\Phi_e(A)$ на U_e. Как и в [16], для любого $B \in U_{\mathbb{\Gamma}}$ положим

$$\Theta_F(B) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{E}} \Phi_e(B \cap e)de, \tag{4.18}$$

где de – мера в $\mathbb{E}$ (пространство плоскостей), инвариантная относительно евклидовых движений пространства $\mathbb{R}^3$. Это определение корректно, так как для почти всех плоскостей e, множество $B \cap e$ принадлежит кольцу U_e. Подстановка точных выражений для $\Phi_e(B \cap e)$ в (4.18) сводит $\Theta_F(B)$ к сумме двойных интегралов по произведениям множеств $\partial\tau_i \times \partial\tau_j$. Эта формула эффективна при получении условий продолжимости $\Theta_F(B)$ до знакопеременной меры.

Предложение 9, [16]. $\Theta(B)$ **является валюацией на** $U_{\mathbb{\Gamma}}$**. Если для каждой плоскости** $e \in \mathbb{E}$ **валюация** Φ_e **продолжается до знакопеременной меры на** $\mathbf{G}_e$ **с непрерывной плотностью** $h_e(g)$**, то** Θ_F **продолжается до знакопеременной меры на** $\mathbb{\Gamma}$ **с плотностью** $h(g)$**.**

Это предложение следует из соотношения

$$h_e(g)\, de\, d_e g = h_\phi(\gamma)\, d\gamma\, d\phi,$$

где $d\gamma$ – мера на $\mathbb{\Gamma}$, инвариантная относительно евклидовых движений пространства $\mathbb{R}^3$, а $d_e g$ – мера в $\mathbf{G}_e$, инвариантная относительно евклидовых движений плоскости e. Функция $h_\phi(\gamma)$ нуждается в определении. Для пары (e, g), где $e \in \mathbb{E}$ и $g \in \mathbf{G}_e$ рассмотрим дуальное представление $(e, g) = (\gamma, \phi)$: прямая $\gamma \in \mathbb{\Gamma}$ совпадает с $g \in \mathbf{G}_e$, а ϕ – угол вращения плоскости e вокруг γ. Полагаем $h_\phi(\gamma) = h_e(g)$ коль скоро $(e, g) = (\gamma, \phi)$. Искомая плотность имеет вид $h(\gamma) = \int h_\phi(\gamma)d\phi$.

Работа [22] содержит обращение Предложения 9, полученное при дополнительном предположении, что F представляется интегралом от флаговой плотности :

$$F(P_1, P_2) = \int_{P_1P_2} \rho(P, \Omega)\, dl, \tag{4.19}$$

где интегрирование берется по отрезку $P_1P_2 \subset \mathbb{R}^3$, Ω – пространственное направление отрезка P_1P_2, а dl – мера Лебега на этом отрезке. В действительности, из (4.19) следует, что $\rho(P,\Omega) = \dfrac{\partial F(P_1,P_2)}{\partial_\Omega P_2}$. В общем определении флага $f = (P,\Omega,\phi)$, т.е. флаговая плотность в (4.19) не зависит от угла вращения ϕ. Ниже $c(\omega)$ обозначает большой круг, ортогональный к ω.

Предложение 10, [22]. Валюация Θ_F, порожденная флаговой плотностью $\rho(P,\Omega) \in C^{(3)}$ по формулам (4.19), (4.18), продолжается до знакопеременной меры μ в $\mathbb{\Gamma}$ тогда и только тогда, когда для любой точки P и пространственного направления ω сужение плотности $\rho(P,\Omega)$ на $\Omega \in c(\omega)$ удовлетворяет уравнению (4.6).

Обычное условие выпуклости по переменной Ω требует выполнения (4.9) для любой $c(\omega)$. Если это имеет место для любой $P \in \mathbb{R}^3$, мы называем $\rho(P,\Omega)$ выпуклой. Из выпуклости плотности $\rho(P,\Omega)$ следует неотрицательность меры μ. Отсюда следует результат, касающийся четвертой проблемы Гильберта для прямых в $\mathbb{R}^3$:

Предложение 11, [22]. Для того, чтобы функция $F(P_1,P_2)$ порожденная по формуле (4.14) выпуклой функцией $\rho(P,\Omega) \in C^{(3)}$, являлась бы метрикой в $\mathbb{R}^3$, для которой евклидовы прямые суть геодезические, необходимо и достаточно, чтобы сужение плотности $\rho(P,\Omega)$ на $\Omega \in c(\omega)$ для любых P и ω удовлетворяло бы условию (4.6).

В заключении параграфа приведем одно следствие для трансляционно инвариантного случая, т.е. когда флаговая плотность $\rho(P,\Omega)$ не зависит от P. В этом случае имеем

$$F(P_1,P_2) = |P_1P_2|\,\rho(\Omega). \tag{4.20}$$

Очевидно, что любая функция $\rho(\Omega) \in C^{(3)}$, зависящая только от пространственного направления Ω, удовлетворяет условию (4.6) на каждом большом круге. Мера μ, которая согласно Предложению 10 существует, должна быть трансляционно инвариантна. Для пластинки $\tau \subset e$ из (4.18) и (4.20) находим

$$\mu([\tau]) = \Theta_F([\tau]) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{E}} \Phi_e([\tau]\cap e)\,de = \int \chi(g)\rho(\Omega)\,d_e g,$$

где g – прямая в плоскости e, $\chi(g) = |\tau \cap g|$, Ω – направление (в плоскости e) прямой g. Очевидно имеем

$$\int \chi(g)\rho(\Omega)\,d_e g = ||\tau|| \int_{c(\omega)} \rho(\Omega)\,d\varphi,$$

где $||\tau||$ – площадь пластинки τ, а ω – направление нормали к τ. Функция $r_1(\omega) = ||\tau||^{-1}\mu([\tau])$, зависящая только от направления нормали ω к τ, часто называется **розой пересечений** знакопеременной меры μ. Из предыдущего замечания получаем следующее утверждение (сравни с Следствием 2).

Следствие 3. Для любой функции $r_1(\omega) \in C^{(3)}$, определенной на $\mathcal{E}_2$, единственное решение $\rho_1(\Omega)$ уравнения Функа

$$r_1(\omega) = \int_{c(\omega)} \rho_1(\Omega)\, d\phi \tag{4.21}$$

порождает с помощью формул (4.19) и (4.18) валюацию, продолжимую до трансляционно инвариантной знакопеременной меры μ на $\mathbb{\Gamma}$, для которой $r_1(\Omega)$ является розой пересечений.

Для заданной розы направлений $r_1(\omega)$, задача вычисления $m(A)$ на множествах $A \in U_{\mathbb{\Gamma}}$ сводится к решению уравнения Функа (4.21) и к двумерному интегрированию согласно точным формулам для $\Theta_F(B)$, полученным в [16].

Статья [22] содержит вычисление плотности знакопеременной меры μ, упомянутой в Предложении 10, в терминах флаговой плотности $\rho(P,\Omega)$. Естественно, что в трансляционно инвариантном случае эта плотность равна $2\rho(\Omega) + \Delta_2\rho(\Omega)$.

§5. ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ЧЕТВЕРТАЯ ПРОБЛЕМА ГИЛЬБЕРТА

В этом параграфе представлены результаты работы [23], и мы следуем терминологии этой статьи. Четвертая проблема Гильберта может быть сформулирована следующим образом : описать все псевдометрики на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, для которых обычные евклидовы прямые суть геодезические. Такие псевдометрики будем называть **Гильбертовыми**.

Для метрик или псевдометрик, которые вычисляются с помощью интеграла вида (4.3), функция $\rho(P,\varphi)$ обычно называется **финслеровой плотностью**. Поэтому в случае, когда метрика гильбертова, мы будем говорить о **плотности Гильберта–Финслера**. Из результатов §4, относящихся к пространству $\mathbb{G}$, следует

Предложение 12, [23]. Если гладкая выпуклая функция $\rho(P,\varphi)$ удовлетворяет уравнению (4.6), то она является плотностью Гильберта–Финслера. Обратно, любая гладкая плотность Гильберта–Финслера $\rho(P,\varphi)$ выпукла и удовлетворяет уравнению (4.6).

Пусть имеется выпуклая $\rho(P,\varphi)$. Для точки $P = (x,y)$ определим $D(x,y)$ как центрально-симметрическую выпуклую область, опорная функция которой есть $\rho(P,\varphi)$. Для гладкого финслерова случая четвертая проблема Гильберта формулируется следующим образом : **какие функции $D(x,y)$ порождают метрики ?** Отметим, что если $D(x,y) \equiv D$ – постоянная, то ответ известен : любая ограниченная, центрально–симметричная выпуклая D порождает метрику, причем этим путем строится класс трансляционно инвариантных метрик или метрик Минковского.

Пусть задано семейство $D = D(u_1,...,u_k)$ ограниченных центрально–симметричных выпуклых областей с центром в O, зависящих от конечного числа одномерных непрерывных параметров u_1, u_2, ..., u_k. Опорная функция $H(\varphi)$ области D зависит от тех же параметров, т.е.

$$H(\varphi) = H(\varphi, u_1, u_2, ..., u_k). \tag{5.1}$$

Пример 1. D – отрезок прямой длины l и ориентации α. Имеем

$$H(\varphi, l, \alpha) = \frac{1}{2} l \, |\cos(\varphi - \alpha)|. \tag{5.2}$$

Заметим, что эта опорная функция не гладкая и в случае постоянных l и α она порождает псевдометрику (а не метрику) Минковского.

Пример 2. D — эллипс с полуосями $a > b$ и ориентация полуоси a есть $\alpha \in \mathcal{E}_1$. Это означает, что

$$H(\varphi, a, b, \alpha) = \sqrt{a^2 \cos^2(\varphi + \alpha) + b^2 \sin^2(\varphi + \alpha)}. \tag{5.3}$$

В правой части записано выражение опорной функции эллипса с параметрами a, b, α. Заметим, что

$$\rho(\varphi, x, y)\, dl = dl \cdot \sqrt{a^2(x,y) \cos^2(\varphi + \alpha(x,y)) + b^2(x,y) \sin^2(\varphi + \alpha(x,y))} \tag{5.4}$$

есть элемент общей римановой метрики. В этом выражении dl – элемент евклидовой длины, $a(x,y)$, $b(x,y)$ и $\alpha(x,y)$ – некоторые функции, определенные на плоскости.

Функцию $H(\varphi, u_1, u_2, ..., u_k)$ будем называть гладкой, если она три раза непрерывно дифференцируема по всем аргументам. Любая последовательность функций $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$, ..., $u_k(x,y)$ преобразует семейство (5.1) в выпуклую функцию

$$\rho(\varphi, x, y) = H(\varphi, u_1(x,y), u_2(x,y), ..., u_k(x,y)). \tag{5.5}$$

Семейство опорных функций (5.1), зависящих от параметров u_1, u_2, ..., u_k, мы будем называть семейством Минковского, если среди достаточно гладких функций $u_1(x,y), u_2(x,y), ..., u_k(x,y)$, только постоянные $u_i(x,y) = c_i$, $i = 1, ..., k$ порождают метрики Гильберта-Финслера.

Возникает следующая задача : **для каких последовательностей $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$, ..., $u_k(x,y)$ семейство опорных функций (5.1) порождает плотности Гильберта–Финслера согласно (5.5) ?** В частности : **когда гладкое семейство опорных функций (5.1) порождает метрику Минковского ?**

Несколько слов о методе, использованном в [23]. Подставляя (5.1) в (4.7) получаем

$$-\sum_i \left[\frac{\partial H}{\partial u_i}\sin\varphi + \frac{\partial^2 H}{\partial u_i\,\partial\varphi}\cos\varphi\right]\frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_i \left[\frac{\partial H}{\partial u_i}\cos\varphi - \frac{\partial^2 H}{\partial u_i\,\partial\varphi}\sin\varphi\right]\frac{\partial u_i}{\partial y} = 0. \tag{5.6}$$

Выберем $2k$ значений φ_1, ...,φ_{2k}, и обозначим через $\Delta(\varphi_1, ..., \varphi_{2k})$ детерминант с элементами q_{ji} :

$$q_{ji} = \begin{cases} -\dfrac{\partial H}{\partial u_i}\sin\varphi_j - \dfrac{\partial^2 H}{\partial u_i\,\partial\varphi}\cos\varphi_j, & \text{для} \quad 1 \le i \le k \\ \dfrac{\partial H}{\partial u_i}\cos\varphi_j - \dfrac{\partial^2 H}{\partial u_i\,\partial\varphi}\sin\varphi_j, & \text{для} \quad k+1 \le i \le 2k. \end{cases}$$

Если для любой последовательности параметров u_1, ..., u_k существуют углы φ_1, ...,φ_{2k} такие, что $\Delta(\varphi_1, ..., \varphi_{2k}) \neq 0$, то

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial y} = 0, \quad i = 1, ..., k,$$

т.е все функции $u_i(x,y)$ константы и мы имеем случай Минковского.

С другой стороны, тождество

$$\Delta(\varphi_1, ..., \varphi_{2k}) = \det||q_{ij}|| \equiv 0 \tag{5.7}$$

есть необходимое условие того, что данное семейство не является семейством Минковского. Очевидно, что уравнение (5.7) является условием линейной зависимости функций в квадратных скобках в (5.6).

При отсутствии необходимых свойств гладкости опорной функции (как в случае Примера 1), в [23] используется анализ Фурье для (5.6).

Предложение 13, [23]. Любое семейство гладких опорных функций $H(\varphi, u)$ зависящих от одного одномерного непрерывного параметра u необходимо представляет собой семейство Минковского.

Условие гладкости существенно : однопараметрическое семейство Примера 1 при фиксированной ориентации α не является семейством Минковского.

Для двухпараметрического семейства Примера 1 полное решение дается в терминах операторов $\frac{\partial}{\partial t}$ и $\frac{\partial}{\partial n}$ дифференцирования в направлении α отрезка или в перпендикулярном к α направлении n_α (t обозначает касательное, а n нормальное направление относительно отрезка) :

$$\frac{\partial}{\partial t} = \cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial n} = \sin\alpha\frac{\partial}{\partial x} - \cos\alpha\frac{\partial}{\partial y}.$$

Предложение 14, [23]. Определенная внутри выпуклой области $D \subset \mathbb{R}^2$ функция (5.2) с гладкими $l(x,y)$ и $\alpha(x,y)$ есть плотность Гильберта–Финслера тогда и только тогда, когда внутри D функции l и α удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial\alpha}{\partial n} = 0, \qquad \frac{\partial l}{\partial n} = -l\,\frac{\partial\alpha}{\partial t}. \tag{5.8}$$

Функция (5.2) с ненулевой функцией длины $l(x,y)$ есть плотность Гильберта–Финслера на всей плоскости $\mathbb{R}^2$ тогда и только тогда, когда функция ориентации $\alpha(x,y)$ постоянна. На подмножествах $\mathbb{R}^2$ существуют плотности Гильберта–Финслера вида (5.2) с непостоянной функцией $\alpha(x,y)$.

В случае риманова семейства Примера 2, условие (5.7) всегда выполняется. В [23] получены следующие результаты :

Предложение 15, [23]. Если плоская риманова метрика (5.4) гильбертова, то функция ориентации $\alpha(x,y)$ необходимо гармоническая. По заданной $\alpha(x,y)$, функции $a(x,y)$ и $b(x,y)$ определяются единственным образом .

Пример метрики Римана–Гильберта на всей плоскости, но не метрики Минковского, дает образ обычной метрики на полусфере при стандартной стереографической проекции (другие метрики из того же класса были построены в [24]). Кроме гармоничности, имеются (см. [24]) и другие условия на функцию $\alpha(x,y)$. Теорема Лиувилля о гармонических на всей плоскости функциях применима, если функция ориентации $\alpha(x,y)$ имеет табу–направление α_0, т.е. если $\{(x,y)\colon \alpha(x,y) = \alpha_0\} = \emptyset$.

Предложение 16, [23]. Пусть плоская риманова метрика (5.4) определена на всей плоскости $\mathbb{R}^2$ и является гильбертовой. Если существует

табу-направление, то функции $a(x, y)$, $b(x, y)$ и $\alpha(x, y)$ суть константы (т.е имеем метрику Минковского).

Классическая модель Келли–Клейна плоскости Лобачевского доставляет пример метрики Римана–Гильберта в круге, для которой геодезическими являются хорды круга. В этой модели метрика не является метрикой Минковского. Приведём более сильную версию этого утверждения.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – центрально–симметричная выпуклая область, на границе которой в каждой точке существует гладкая кривизна. Для точки (x, y) внутри D определим

$$\rho(\varphi, x, y) = [d_1(\varphi)]^{-1} + [d_2(\varphi)]^{-1}, \tag{5.9}$$

где d_i, $i = 1, 2$ суть длины двух отрезков, на которые хорда области D, содержащая точку (x, y) и имеющая направление φ, разбивается точкой (x, y).

Предложение 17, [23]. Для любой центрально–симметричной выпуклой области D, на границе которой в каждой точке существует гладкая кривизна, функция (5.9) является метрикой Гильберта-Финслера. Если D - круг, то из (5.9) следует классическая модель Келли-Клейна.

§6. ЧЕТВЕРТАЯ ПРОБЛЕМА ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ПРЕГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

В пространстве кривых Теорема 1 использовалась уже в [1], где комбинаторный подход применялся к геодезическим на поверхностях в $\mathbb{R}^3$. В работе [25] этот подход комбинируется с методом флаговых (финслеровых) плотностей.

Пусть D – двумерное многообразие с границей ∂D, диффеоморфное замкнутому плоскому диску, и пусть $\widetilde{\mathrm{G}}$ – семейство кривых на D, удовлетворяющих следующим аксиомам :

1) Каждая кривая $g \in \widetilde{\mathrm{G}}$ диффеоморфна замкнутому прямолинейному отрезку. Внутренность g принадлежит $int\, D$ и оба конца кривой g лежат на границе ∂D.

2) Для любых двух различных точек в D существует **единственная** кривая $g \in \widetilde{\mathrm{G}}$, содержащая эти две точки ; это свойство остается в силе, если одна или обе точки принадлежат границе ∂D.

3) В каждой точке $P \in D$ существует только одна кривая $g \in \widetilde{\mathrm{G}}$, содержащая точку P и имеющая в точке P данное направление касательной.

Если условия 1), 2) и 3) выполнены, мы называем $\widetilde{\mathrm{G}}$ семейством **прегеодезических**. Вторая часть условия 2) постулирует существование взаимно–однозначного

концевого отображения, которое переводит каждую прегеодезическую g в **неупорядоченную пару** его концов. Это отображение определяет топологию на $\widetilde{\mathbf{G}}$, которая не зависит от конкретной реализации $\widetilde{\mathbf{G}}$. Не удивительно, что комбинаторные утверждения, которые получены для пространства $\widetilde{\mathbf{G}}$ евклидовых прямых на евклидовой плоскости, имеют место и в новой ситуации.

Следует ли из свойств 1), 2), 3) существование метрики, определенной в D, для которой прегеодезические суть геодезические? Каким образом для семейства $\widetilde{\mathbf{G}}$ прегеодезических можно описать все гильбертовы метрики (т.е. метрики, для которых прегеодезические из $\widetilde{\mathbf{G}}$ являются геодезическими)? Какими индикатрисами (изотропными, римановыми и т.д.) могут обладать гильбертовы метрики? Последние два вопроса поставлены в стиле классической **4-ой проблемы Гильберта**.

Основные понятия, рассмотренные в §4 для пространства $\mathbf{G}$ (такие как кольцо $U_{\mathbf{G}}$ и валюация Φ), сохраняются в пространстве $\widetilde{\mathbf{G}}$. Для доказательства этого утверждения в работе [25] рассматривалась **универсальная** модель для $\widetilde{\mathbf{G}}$.

Проколотая ∂D представляется интервалом $(0,1)$. В квадрате $(0,1)\times(0,1)$ возьмём треугольник, лежащий ниже диагонали. Удалим из треугольника гипотенузу и три вершины. Оставшееся плоское множество обозначим через Δ: каждая кривая $g\in\widetilde{\mathbf{G}}$ представляет собой точку в Δ и наоборот. Чтобы сделать Δ топологически эквивалентным $\widetilde{\mathbf{G}}$ отождествим точки катетов Δ по способу Мебиуса : $(x,0)\sim(1,x)$.

Заметим, что удаление гипотенузы делает Δ **некомпактным**. Замечательно, что в [25] делается попытка дать названия подмножествам из $\widetilde{\mathbf{G}}$. Кроме обычных **пучков** $[P]=\{g\in\widetilde{\mathbf{G}}:\ g$ содержит точку $P\in D\}$, представленных кривыми в Δ и **бюффоновых множеств** $[P_1,P_2]=\{g\in\widetilde{\mathbf{G}}:\ g$ разделяет $P_1\in D$ от $P_2\in D\}$, мы также находим **множества Паша** $=\{g\in\widetilde{\mathbf{G}}:g$ отделяет $P_1\in D$ от $P_2\in D$ и $P_3\in D\}$ и **множества Крофтона** (они зависят от четырех точек в D).

Определение **бюффонова кольца** $Br\{P_i\}$ зависящего от конечного множества точек $\{P_i\}\subset int\, D$, повторяет определение, данное во Введении. Оно остается в силе, так как каждая g делит D на две непересекающие компоненты. На Δ атомы соответствуют относительно компактным компонентам, на которые образы пучков $[P_i]$ разбивают Δ, а объединения этих компонент соответствуют элементам кольца $Br\{P_i\}$. Аналогично, большая часть утверждений в чисто комбинаторной части работы [25] имеют их аналоги в $U_{\mathbf{G}}$ (см. §4).

Теорема 5, [25]. Пусть $\{P_i\} \subset D$ – конечное множество точек, а m – локально конечная знакопеременная мера на $\widetilde{\mathrm{G}}$, для которой

$$m([P_i]) = 0 \quad \text{для любой } P_i \text{ из заданного множества.}$$

Для всякого $B \in Br\{P_i\}$ имеет место разложение по бюффоновым множествам

$$2m(B) = \sum c_{ij}(B)\, m([P_i, P_j]), \tag{6.1}$$

где сумма берется по всем 2-подмножествам из $\{P_i\}$. Коэффициенты $c_{ij}(B)$ не зависят от знакопеременной меры m и вычисляются по алгоритму Теоремы 1.

Два множества B_1, $B_2 \subset \widetilde{\mathrm{G}}$ полагаем эквивалентными, если их симметрическая разность является подмножеством конечного числа пучков. Если игнорировать разницу между эквивалентными множествами, то класс $U = \bigcup Br\{P_i\}$, где объединение берется по всем возможным конечным множествам $\{P_i\}$, становится кольцом подмножеств пространства $\widetilde{\mathrm{G}}$.

Пусть $F(s) = F(P_1, P_2) = F(P_2, P_1)$ – **функция отрезка**, определенная на S = пространство отрезков s кривых из $g \in \widetilde{\mathrm{G}}$. В формуле (6.1) заменим величины $m([P_i, P_j])$ на $F(P_i, P_j)$ и рассмотрим функционалы $\varphi(B; \{P_i\})\colon Br\{P_i\} \to \mathbb{R}$. Функция $F(s)$, определенная на S, называется аддитивной, если $F(s_1) + F(s_2) = F(s_1 \cup s_2)$ для любых $s_1, s_2 \in \mathrm{S}$, лежащих на кривой γ, имеющих общий конец и $\operatorname{int} S_1 \bigcap \operatorname{int} S_2 = \emptyset$.

Теорема 6, [25]. Пусть $F(s) = F(P_1, P_2)$ – аддитивная функция, определенная на S и непрерывная в топологии пространства $D \times D$. Тогда функционалы $\varphi(B; \{P_i\})$, соответствующие F, не зависят от выбора $\{P_i\} \subset D$. Следовательно, $E_F(B) = 2\varphi(B, \{P_i\})$ является отображением $E_F : U \to \mathbb{R}$. Функция множеств E_F является валюацией на U. И обратно, любая непрерывная валюация V на U необходимо имеет вид $V = E_F$, где $F(s) = \dfrac{1}{2}V([s])$.

В [25], E_F называлась **эйлеровой валюацией** соответствующей функции F.

Теорема 7, [25]. Формула

$$F(P_1, P_2) = m([P_1, P_2]) \tag{6.2}$$

отображает беспучковую неотрицательную меру m, определенную на $\widetilde{\mathrm{G}}$, в псевдометрику $F(P_1, P_2)$ на D, для которой кривые из $\widetilde{\mathrm{G}}$ являются

геодезическими. И обратно, пусть $F(P_1, P_2)$ – непрерывная псевдометрика на D, для которой $\widetilde{\mathrm{G}}$ является семейством геодезических. Тогда валюация E_F продолжается до неотрицательной меры m на борелевских подмножествах пространства $\widetilde{\mathrm{G}}$. Для этой меры имеет место (6.1).

Очевидно, чтобы говорить о флаговых плотностях требуется некоторая стандартная метрика $F_0(P_1, P_2)$ на D. С этого момента существование F_0 постулируется, и [25] рассматривает E_F, соответствующие

$$F(P_1, P_2) = F(s) = \int_s \rho(P, \varphi)\, dt, \tag{6.3}$$

где $\rho(P, \varphi)$ – флаговая плотность, φ = направление касательной к s в точке $P \in s$, dt – мера длины на $s \in \mathrm{S}$, соответствующая F_0, P_1, P_2 – концы отрезка s.

Определение. Аддитивная на S функция $F(s)$ называется сильно аддитивной, если

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left[F(x_1, P) + F(P, x_2) - F(x_1, x_2)\right] = 0$$

для троек x_1, P, x_2 лежащих на одной кривой $g \in \widetilde{\mathrm{G}}$, $x_1, x_2 \in \partial D$, $P \in \mathit{int}\, D$.

Из аддитивности $F(s)$ следует, что $F(x_1, P) + F(P, x_2) - F(x_1, x_2) = 0$ при x_1, P, x_2, лежащих на одной кривой g. Для смещенных x_1 последнее равенство уже не выполняется. Следовательно, сильная аддитивность не следует из аддитивности F. Это условие есть вариант условия (4.5).

Предложение 18, [25]. В классе гладких аддитивных функций F, определенных на S, следующие два утверждения эквивалентны :

a) F сильно аддитивна и

b) E_F продолжима до знакопеременной меры на борелевских множествах пространства $\widetilde{\mathrm{G}}$.

В предположении, что прегеодезические кривые являются геодезическими для F_0 (т.е. F_0 есть гильбертова метрика для $\widetilde{\mathrm{G}}$), в [25] выведено дифференциальное уравнение для $\rho(P, \varphi)$, заменяющее условие сильной аддитивности. Это уравнение сводится к уравнению (4.6), если $D \subset \mathbb{R}^2$, $\widetilde{\mathrm{G}} = \mathrm{G}$ и $F_0 =$ – евклидова метрика. Оно затем использовано для получения версии условия (4.6) для полусферы и гиперболической плоскости, в обоих случаях с обычной F_0 и $\widetilde{\mathrm{G}} =$ обычные геодезические.

Для общего D, $\widetilde{\mathrm{G}}$ и гильбертовой F_0 статья [25] содержит результат для флаговых плотностей $\rho(P, \varphi) = \rho(P)$, не зависящих от φ (**изотропный случай**).

Предложение 19, [25]. Валюация E_F, построенная по изотропной флаговой плотности $\rho(P)$, продолжается до знакопеременной меры на $\widetilde{\mathrm{G}}$ тогда и только тогда, когда $\rho(P) = const$. В этом случае F пропорциональна стандартной метрике F_0, и поэтому E_F является неотрицательной мерой.

Наконец, [25] рассматривает порождение знакопеременных мер валэацией E_F для негильбертовой F_0 при следующих условиях : область D принадлежит евклидовой плоскости ; функция $k(P, g)$, определяемая как кривизна кривой $g \in \widetilde{\mathrm{G}}$ в точке $P \in g$, является достаточно гладкой (условие "регулярности"); стандартная метрика F_0 евклидова, а флаговая плотность $\rho = \rho(P)$ - круговая. Для регулярных семейств $\widetilde{\mathrm{G}}$ прегеодезических кривых в D, принадлежащих евклидовой плоскости, условие сильной аддитивности сводится к условию

$$\frac{\partial \rho(P)}{\partial n} = k(P, g)\rho(P), \tag{6.4}$$

где $n = n(g, P)$ - направление из точки P к центру круга, соприкасающегося с g в точке P.

Пусть $K(P, \alpha)$, $\alpha \in (0, 2\pi)$ - **знакопеременная версия** функции кривизны $k(P, g)$. Имеем $K(P, \alpha) = \pm k(P, g)$, где g - прегеодезическая, содержащая точку P и нормальная к направлению α в точке P. Знак плюс, если α совпадает с направлением из точки P к центру круга соприкасающегося с g в точке P, и минус - в противном случае.

Для кусочно-дифференцируемого пути Θ, соединяющего две точки $Q_1, Q_2 \in D$, **положительным** направлением будем считать направление вдоль Θ из точки Q_1 к точке Q_2, l - координата, равная длине дуги на Θ, а dl - обычная мера длины на Θ, $\dfrac{\partial}{\partial l}$ - дифференцирование в положительном направлении на Θ. Пусть $K(l)$ - сужение функции $K(P, \alpha)$ на кривую Θ : l определяет положение точки $P \in \Theta$, α - положительное направление Θ в l.

В этих обозначениях формула (6.4) на Θ принимает вид

$$(\rho(l))^{-1}\frac{d\rho(l)}{dl} = K(l). \tag{6.5}$$

Интегрируя (6.5) от Q_1 до Q_2, получаем

$$\rho(Q_2) = \rho(Q_1)\exp\left(\int_\Theta K(l)\, dl\right). \tag{6.6}$$

Из этого результата вытекает следующее **внутреннее описание** прегеодезических семейств, которые допускают геодезическую интерпретацию для поточечно изотропных (круговых) метрик.

Предложение 20, [25]. **Для любого регулярного семейства $\tilde{\mathrm{G}}$ прегеодезических кривых в области $D \subset \mathbb{R}^2$, следующие три утверждения эквивалентны :**

1) Кривые из $\tilde{\mathrm{G}}$ являются геодезическими для метрики, имеющей круговую индикатрису в каждой точке $P \in D$;

2) Интеграл $\int_\Theta K(l)dl$ не зависит от пути Θ коль скоро концы Θ фиксированы, т.е. $\int_\Theta K(l)dl = 0$, если интегрирование ведется по замкнутой кривой Θ;

3) Существуют две функции, определенные на D : функция амплитуды $A(P)$ со значениями в $(0, \infty)$ и функция фазы $\phi(P)$ со значениями в $(0, 2\pi)$, через которые выражается функция кривизны $K(P, \alpha)$:

$$K(P, \alpha) = A(P)\cos(\alpha - \phi(P)). \tag{6.7}$$

Функции $A(P)$, $\phi(P)$ удовлетворяют уравнению с производными по направлениям

$$\frac{\partial A(P)}{\partial_n P} + A(P)\frac{\partial \phi(P)}{\partial_\phi P} = 0, \tag{6.8}$$

где направление $n = n(P)$ – одно из двух направлений, нормальных к направлению $\phi(P)$.

Отметим, что импликация 1) $\to$ 2) следует прямо из (6.6). Импликации 2) $\to$ 3) и 3) $\to$ 1) следуют из результатов Г. С. Сукиасяна [26]. В [26] даны необходимые и достаточные условия продолжения конечно-аддитивных функционалов, определенных на выпуклых многоугольниках на плоскости, до знакопеременных мер. Достаточно применить этот результат к функционалу $\int_\Theta K(l)dl$ для выпуклых многоугольных путей Θ. Согласно (6.6) этот функционал – тождественный нуль. Следовательно, мы получаем уравнение (6.7) как условие возможности продолжения до знакопеременной меры, причем (6.8) совпадает с условием, что знакопеременная мера имеет плотность тождественно равную нулю.

Нетрудно проверить уравнения (6.7) и (6.8) для двух классических случаев семейств $\tilde{\mathrm{G}}$: полукруги в модели Пуанкаре гиперболической плоскости и круговые дуги в модели Келли– Клейна в гиперболической плоскости. В первом случае D – верхняя полуплоскость, во втором D – единичный диск. В обоих случаях известно, что гиперболическая метрика поточечно круговая финслерова, и можно применить 1) из Предложения 20. В заключение приведем следующий результат.

Предложение 21, [25]. Для всякого регулярного семейства $\bar{G}$ прегеодезических кривых в области D, лежащей на евклидовой плоскости, функции кривизны $K(P,\alpha)$ которых удовлетворяют эквивалентным свойствам 2) или 3), существует ровно одна (с точностью до постоянного множителя) гладкая гильбертова метрика с круговой индикатрисой. Для последней $\rho(P)$ задается согласно (6.6), где $\rho(Q_1)$ играет роль постоянного множителя. Значение $\rho(Q_2)$, полученное таким способом, не зависит от выбора пути Θ, соединяющего Q_1 с Q_2.

ABSTRACT. The paper summarizes and reviews results of the research in combinatorial integral geometry that followed publication in 1982 of the book under the same title by R. V. Ambartzumian. The nomenclature of topics, that have been influenced by the combinatorial approach propounded by the book now includes Wicksell problem for randomized shapes, Pleijel–type identities for convex domains, problems concerning random line processes, valuations in integral geometry space, and Hilbert's fourth problem in different settings. The paper devotes a section to report on each of these themes and exposes their common combinatorial roots. Some comments and observations point at connections with other topics, such as tomography, cos-transform and others.

ЛИТЕРАТУРА

Сокращение ИАНАМ используется для журнала
Известия Академии Наук Армении, серия Математика

1. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology, John Wiley & Sons, Chichester, 1982.
2. R. Alexander, A book review, Bulletin (New Series) of the AMS, Volume 10, Number 2, pp.318 — 321, April 1984.
3. A. Pleijel, Zwei kurze Beweise der isoperimetrischen Ungleichung, Archiv der Math., 7, pp. 317 — 319, 1956.
4. A. Pleijel, Zwei kennzeichende Kreiseigenschaften, Archiv der Math., 7, pp. 420 — 424, 1956.
5. R. V. Ambartzumian, "Convex polygons and random tessellations". In : "Stochastic Geometry", Editors : E. F. Harding and D. G. Kendall, John Wiley, 1974.
6. R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge University Press, 1990.
7. Р. В. Амбарцумян, "Интегральное уравнение Вольтерра в стереологии многоугольников", ИАНАМ, том 33, № 4, стр. 18 — 34, 1998.
8. E. F. Harding and D. G. Kendall (Editors), Stochastic Geometry, J. Wiley & Sons, London, New York, Sydney, Toronto, 1974.
9. R. V. Ambartzumian, "Invariant imbedding in stochastic geometry", Dokl. Akad. Nauk Armenii, vol. 98, no. 3, pp. 185 — 196, 1998. Перепечатано в ИАНАМ, том 33, № 4, стр. 5 – 17, 1998.
10. Р. В. Амбарцумян и В. К. Оганян, "Распределения Пальма в анализе однородных случайных процессов прямых на плоскости", ИАНАМ, том 33, № 4, стр. 35 — 65, 1998.

11. Р. В. Амбарцумян, "Случайные раскраски плоскости", стр. 23 – 56. В сборнике статей : "Комбинаторные Принципы в Стохастической Геометрии", Изд. АН Арм.ССР, Ереван, 1980.
12. А. В. Погорелов, Четвертая Проблема Гильберта, Наука, Москва, 1974.
13. R. Alexander, "Planes for which the lines are the shortest paths between points," Illinois J. Math., vol. 22, pp. 177 – 190, 1978.
14. R. V. Ambartzumian, "A note on pseudo-metrics on the plane," Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, vol. 29, pp. 25 – 31, 1974.
15. R. V. Ambartzumian, "Measure generation by Euler functionals" Adv. Appl. Prob. (SGSA), vol. 27, pp. 606-626, 1995.
16. Р. В. Амбарцумян, "Заметки о порождении мер в пространстве прямых в $\mathbb{R}^3$", ИАНАМ, том 27, № 5, стр. 1– 21, 1992.
17. R. V. Ambartzumian, "Combinatorial integral geometry, Metrics and zonoids", Acta Applicandae Mathem., vol. 9, pp. 3 — 27, 1987.
18. В. К. Оганян, А. Абдалла, "Маркированные точечные процессы пересечений, порожденные случайными процессами прямых на плоскости", ИАНАМ, том 28, № 5, стр. 67 — 77, 1993.
19. R. V. Ambartzumian, "The solution to the Buffon—Sylvester problem in $\mathbb{R}^3$," Z. Wahrscheinlichkeits theorie, verw. Geb., vol. 27, pp. 53 — 74, 1973.
20. Р. В. Амбарцумян и В. К. Оганян, "Конечно-аддитивные функционалы в пространстве плоскостей. I", ИАНАМ, том 29, № 4, стр. 3 – 51, 1994.
21. В. К. Оганян и А. Н. Давтян, "Конечно-аддитивные функционалы в пространстве плоскостей, II", ИАНАМ, том 31, № 4, стр. 44 – 73, 1996.
22. А. Н. Давтян, "Валюации в пространстве прямых в $\mathbb{R}^3$", ИАНАМ, том 33, № 4, стр. 66 – 87, 1998.
23. R. V. Ambartzumian, V. K. Oganian, "Parametric versions of Hilbert's fourth problem", Israel Math. Journal. vol. 103, no. 1, pp. 41 — 65, 1998.
24. В. К. Оганян, "О римановых метриках на плоскости, для которых прямые являются геодезическими", ИАНАМ, том 32, № 2, стр. 77 — 85, 1997.
25. Р. В. Амбарцумян, "Интегральная геометрия прегеодезических на 2-многообразиях", ИАНАМ, том 31, № 4, стр. 5 — 52, 1996.
26. Г. С. Сукиасян, "Конечно-аддитивные функционалы на плоскости", ИАНАМ, том 29, № 4, стр. 75 — 89, 1994.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Ниже приводится список публикаций, не цитируемых в этой обзорной статье, однако по тематике близкой к ней.

27. R. V. Ambartzumian, "Probability distributions in the geometry of clusters", Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, vol. 6, pp. 235 — 241, 1971.
28. R. V. Ambartzumian, "The solution to the Buffon-Sylvester problem and stereology", Transactions ICM, vol. 2, Vancouver (Canada), 1974.
29. R. V. Ambartzumian, "Stochastic geometry from the standpoint of integral geometry." Adv. Appl. Prob., vol. 9, pp. 792 – 823, 1977.
30. R. V. Ambartzumian, "On some topological invariants in integral geometry", Z. Wahrscheinlichkeits theorie verw. Gebiete, vol. 44, 1978.
31. R. V. Ambartzumian, "A Synopsis of Combinatorial integral geometry", Advances in Math., vol. 37, no. 1, 1980.
32. Р. В. Амбарцумян, "О комбинаторных основаниях интегральной геометрии", ИАНАМ, том 16, № 4, стр. 285 – 292, 1981.
33. Р. В. Амбарцумян, "О конечно-аддитивных функционалах в $\mathbb{R}^3$", ИАНАМ, том 28, № 2, стр. 51 — 59, 1993.
34. Р. Г. Арамян, "Порождение мер в пространстве плоскостей и сферические

эйлеровы функционалы", ИАНАМ, том 29, № 4, стр. 58 – 74, 1994.
35. A. Baddeley, "Dissecting the needle problem", pp. 107 – 122, В сборникс статей : "Комбинаторные Принципы в Стохастической Геометрии", Изд. АН Арм.ССР, Ереван, 1980.
36. A. Baddeley, "Combinatorial foundations of stochastic geometry", Proc. London Math. Soc., XLII, pp. 151–177.
37. Г. Ю. Панина, "Выпуклые тела и трансляционно–инвариантные меры", Записки Научных Сем. ЛОМИ, том 157, 1986.
38. G. Yu. Panina, "Many-dimensional combinatorial Ambartzumian's formulae", Math. Nachr., vol. 159, pp. 271 – 277, 1992.
39. Г. Ю. Панина, "Комбинаторные формулы, дуальные к формуле Амбарцумяна", ИАНАМ, том 28, № 6, стр. 69 – 77, 1993.
40. F. Piefke, "Masze für gerichtete Geraden und nicht–symmetrische Pseudometriken in der Ebene", Monatshefte Math. 86, pp. 143–154, 1978.
41. F.Piefke, "Masze für gerichtete Geraden und nicht- symmetrische Pseudometriken in der Ebene, II", Monatshefte Math. 89, pp. 45–56, 1980.
42. Г. С. Сукиасян, "О случайных сечениях многогранников", Докл. АН СССР, том 263, № 4, стр. 809 – 812. 1982.

8 марта 1999

Институт математики
НАН Армении
E–mail : rhambart@aua.am