МЕТРИЧЕСКАЯ РАСХОДИМОСТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Р. И. Овсепян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 5, 1999

§1. ВВЕДЕНИЕ

Через f будем обозначать 2π-периодические непрерывные функции, а через $\sigma(f)$ – их ряды Фурье

$$\sigma(f) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + B_n \sin nx. \tag{1}$$

В 1873 году Дюбуа Реймон построил пример функции f, ряд Фурье которой $\sigma(f)$ расходится в точке. Г. Шварц (1880), Лебег (1911) и Фейер (1911) построили более простые примеры функций, обладающих этим свойством. В 1904 году Фейер доказал, что ряд $\sigma(f)$ всегда суммируется методом Чезаро в равномерной метрике. Он также заметил, что если коэффициенты Фурье имеют порядок $o(1/n)$, то $\sigma(f)$ сходится равномерно. В 1926 году Пэли установил равномерную сходимость ряда $\sigma(f)$ при условии, что коэффициенты Фурье положительны (см. [1] или [2]). В 1933 году Сас (см. [3]) усилил это утверждение, показав, что для равномерной сходимости ряда (1) достаточно выполнение условий

$$A_n \geq -\frac{K}{n}, \quad B_n \geq -\frac{K}{n}, \quad n \geq 1, \tag{2}$$

где K – положительная постоянная.

Для любой последовательности $\beta_n > 0$, $\beta \uparrow \infty$ Харди и Литлвуд в 1934 году построили расходящийся в нуле ряд (1) с коэффициентами порядка $O(\beta_n/n)$ (см. [4] или [5]).

Отметим, что для каждой $\beta_n > 0$, $\beta \uparrow \infty$ существует $\alpha_n > 0$, $\alpha \uparrow \infty$ такая, что

$\frac{\alpha_n}{n} \downarrow 0$, $\alpha_n \leq \beta_n$, $n \geq 1$ (достаточно взять

$$\alpha_i = \begin{cases} \beta_k \prod_{j=1}^{k}(1+n_j^{-1}) & \text{для } i \in (n_k, n_{k+1}], \\ \beta_1 & \text{для } i \leq n_1, \end{cases} \qquad n_k \uparrow \infty,$$

а выбирая n_k подходящим образом обеспечить условия $\alpha_n \leq \beta_n$ и $\alpha_n \uparrow \infty$).

Таким образом, можно считать, что в примере Харди и Литлвуда, мажорантой коэффициентов ряда (1) является последовательность $a_n \equiv \frac{\alpha_n}{n}$ со свойствами

$$a_n \downarrow 0, \quad \lim_{n\to\infty} na_n = \infty. \tag{3}$$

Отметим, что условие $\lim_{n\to\infty} na_n = \infty$ является существенным для конструкции Харди–Литлвуда.

Может ли подобная расходимость иметь место для рядов Фурье, если их коэффициенты A_n, B_n, обладающие мажорантой $\{a_n\}$, удовлетворяют менее строгим условиям? Ниже мы даем положительные ответы для двух интерпретаций расходимости.

§2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. Для любой последовательности a_n, удовлетворяющей условиям

$$a_n \downarrow 0, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, na_n = \infty, \tag{4}$$

существует непрерывная функция f такая, что ее ряд Фурье (1) расходится в нуле и

$$|A_n| \leq a_n, \qquad |B_n| \leq a_n. \tag{5}$$

Отсюда и из теоремы Саса получаем следующий результат.

Следствие. Условие $\overline{\lim}\, na_n < \infty$ является необходимым и достаточным для равномерной сходимости ряда (1) с коэффициентами A_n, B_n, удовлетворяющими условиям $A_n \leq a_n$, $B_n \leq a_n$, $a_n \downarrow 0$.

Отметим, что для монотонно убывающей последовательности a_n второе условие в (4) равносильно следующему:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ka_k = \infty.$$

Последнее условие эквивалентно существованию последовательности $n_k \uparrow \infty$ такой, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} < \infty$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = \infty$.

Теорема 2. Для любой последовательности a_n, удовлетворяющей условиям

$$a_n \downarrow 0, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \, n a_n^2 = \infty, \tag{6}$$

существует функция $F \in L^1(0, 2\pi)$ с L^1–расходящимся рядом Фурье, коэффициенты которого ограничены мажорантой $\{a_n\}$.

Читатель может сравнить эти результаты со стандартным $O(1/\ln n)$ критерием для коэффициентов L^1–расходимости рядов Фурье (см [5], стр. 206).

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Лемма. Для последовательности $a_n \downarrow 0$ равенство (4) равносильно следующему : для любого $\gamma > 1$ существует целое число m такое, что

$$a_{\gamma m} \geq \frac{1}{m}. \tag{7}$$

Доказательство : Для доказательства необходимости предположим обратное : существует γ такое, что для каждого $m \geq 1$ выполнено неравенство $a_{\gamma m} < 1/m$. Отметим, что из $\gamma m \leq n < \gamma(m+1)$ следует $n a_n < \gamma(m+1)a_{\gamma m} < \gamma(m+1)\frac{1}{m}$, в противоречии с (4).

Из неравенства $\gamma(m-1) \leq n < \gamma m$ вытекает $n a_n \geq \gamma(m-1)a_{\gamma m} \geq \gamma(m-1)\frac{1}{m} > \frac{\gamma}{2}$, следовательно достаточность доказана.

Доказательство Теоремы 1 : Пусть $P_n(x) \equiv \sum\limits_{k=1}^{n} \cos kx$ и

$$Q_n(x) \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(2n-k)x - \cos(2n+k)x}{k} = 2\sin 2nx \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}.$$

Предположим, что m выбрано в соответствии с Леммой при $\gamma = 4n$. Остается показать, что если n_i растет достаточно быстро, то

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{m_i \ln n_i} P_{m_i}(x) Q_{n_i}(m_i x) \tag{8}$$

определяет искомую функцию. Сначала заметим, что спектр полинома в (8) сосредоточен на отрезке $[(n_i-1)m_i, (3n_i+1)m_i]$. Следовательно, за счет быстрого роста n_i можно обеспечить непересекаемость этих полиномов. Полиномы из (8) равномерно ограничены порядком $O(1/\ln n_i)$. Поэтому можно считать, что (8) определяет ряд Фурье непрерывной функции f. Заметим, что коэффициенты Фурье этой функции удовлетворяют (5), так как коэффициенты Фурье полинома из (8) ограничены величиной $(m_i \ln n_i)^{-1}$, и в силу Леммы $a_{4n_i m_i} \geq 1/m_i$.

Заметим, что в точке $x = 0$ мажоранта частных сумм полинома $Q_n(x)$ (и, следовательно, полинома $Q_n(mx)$) достигает максимальной величины порядка $\ln n$ (см., например, [5], стр. 472). Следовательно, максимальное колебание при $x = 0$ полиномов из (8) достигает порядка 1, что обеспечивает расходимость в нуле. Теорема 1 доказана.

Доказательство Теоремы 2 : Ядро Фейера

$$K_m(x) \equiv \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{m} \frac{m+1-i}{m+1} \cos ix$$

обладает следующими известными свойствами :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{m}K_m(x) \geq \frac{\cos 1}{2} \quad &\text{для} \quad |x| \leq \frac{1}{m}, \\ &\frac{1}{m}K_m(x) \leq \frac{8}{m^2x^2} \quad &\text{для} \quad 0 \leq |x| \leq \pi. \end{aligned} \tag{9}$$

Рассмотрим выражение

$$\frac{1}{m}\sum_{l} K_m\left(x - 16l\frac{1}{m}\right) \cos N_l x, \tag{10}$$

где числа N_l подобраны так, чтобы $N_l - m = 2(l-1)m + 1$, $1 \leq \frac{16l}{m} \leq 2\pi$. При фиксированных l и m пересечение

$$\left[\frac{16l-1}{m}, \frac{16l+1}{m}\right] \cap \left\{x : |\cos N_l x| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

дает некоторое количество отрезков $\Delta(j,l,m)$ длины $\pi/(2N_l)$ с общей мерой большей, чем $1/(4m)$. Из (9) следует, что на каждом $\Delta(j,l,m)$ модуль выражения (10) превышает некоторую абсолютную постоянную $\alpha > 0$, например (см. [6]),

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{\cos 1}{2} - 16\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(16k)^2}\right].$$

Таким образом, выражение (10) ограничено от нуля постоянной α на некотором множестве $E_m = \bigcup_{j,l} \Delta(j,l,m)$ с мерой $\mu(E_m)$, превышающей $2\pi/100$. Из (6) и Леммы следует, что для $\gamma = 17n$ существует число p такое, что $\sqrt{p}a_{\gamma p} \geq 1$. Полагая $m = [\sqrt{p}]$, где $[p]$ целая часть p, получим

$$a_{17nm^2} > \frac{1}{m+1}. \tag{11}$$

При больших n ясно, что m тоже велико. Пусть $\{T_{n_i}(x)\}$ – последовательность тригонометрических полиномов со следующими свойствами :

a) $T_{n_i}(x)$ – полиномы порядка n_i и не содержат постоянную,

b) $T_{n_i}(x)$ нормированы в L^1 для всех n_i,

c) $v_i \to \infty$, где v_i – максимальное колебание L^1-норм частных сумм полинома T_{n_i},

см. [2], стр. 599. Будем считать, что для каждого n_i последовательность m_i выбирается согласно (11). Покажем теперь, что для достаточно быстро растущей последовательности n_i выражение

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{m_i v_i} \left[\sum_l K_{m_i} \left(x - 16l \frac{1}{m_i} \right) \cos N_l x \right] T_{n_i}(16 m_i^2 x) \tag{12}$$

дает искомый ряд Фурье функции $F \in L^1(0, 2\pi)$. Сначала заметим, что спектры полиномов внешней суммы принадлежат отрезку $[15m_i^2, 17n_i m_i^2]$. Следовательно, для n_i, m_i, удовлетворяющих $15m_{i+1}^2 > 17n_i m_i^2$, эти полиномы можно сделать непересекающимися. Учитывая, что коэффициенты Фурье полиномов $K_m(x)$ и $T_n(x)$ ограничены единицей, согласно (11) заключаем, что (5) выполняется для коэффициентов тригонометрического ряда (12). Так как L^1-норма полинома внешней суммы из (12) не превосходит $1/v_i$, то при условии $\sum v_i^{-1} < \infty$ получим ряд Фурье.

Теперь отметим, что при фиксированном i длина каждого интервала $\Delta(j, l, m_i)$ больше, чем πm_i^{-2}. Отсюда следует, что на каждом $\Delta(j, l, m_i)$ максимальное колебание частных сумм полинома внешней суммы (12) превышает число $\alpha\mu(\Delta(j, l, m_i))$. Следовательно, на множестве $E_{m_i} = \bigcup_{j,l} \Delta(j, l, m_i)$ (и, следовательно, на всем интервале $(0, 2\pi)$) это колебание превышает $\alpha\pi/50$, а это означает L^1-расходимость ряда Фурье (15). Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. B. Paley, "Two theorems concerning Fourier series", Jour. London Math. Soc., vol. 1, pp. 19 – 25, 1926.
2. Н. К. Бари, Тригонометрические Ряды, Москва, 1961.
3. O. Szasz, "Zur Konvergenztheorie der Fourierschen Reihen", Acta Math., vol. 61, no. 1–2, pp. 185 – 201, 1933.
4. G. H. Hardy, I. E. Littlewood, "Some new convergence criteria for Fourier series", Annali di Pisa, vol 3, pp. 43 – 62, 1934.
5. А. Зигмунд, Тригонометрические Ряды I, Мир, Москва, 1965.
6. С. Ш. Галстян, Р. И. Овсепян, "Тригонометрические ряды с быстро убывающими коэффициентами", Матем. Сборник, том 187, № 11, стр. 3 – 26, 1996.

17 апреля 1999

Институт математики
Национальная Академия Наук Армении
E-mail : sart@instmath.sci.am