ПОДМНОГООБРАЗИЯ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ И ПОЛУПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СТРУКТУРАМИ

В. А. Мирзоян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 5, 1999

Настоящая заметка завершает цикл работ автора [1-4], посвященных проблеме взаимосвязей между подмногообразиями с параллельными и полупараллельными структурами. Мы рассматриваем подмногообразия с полупараллельными ковариантными производными произвольного тензорного поля, определяемого фундаментальными формами α_s $(s \geq 2)$ с использованием тензорных операций.

Напомним основные определения и результаты из [1-4]. Пусть M - подмногообразие пространства постоянной кривизны $M_n(c)$ и пусть ∇ и $\nabla^\perp$ обозначают риманову и нормальную связности на M. Пусть $\overline{\nabla} = \nabla \oplus \nabla^\perp$ - связность Ван дер Вардена-Бортолотти. Для касательных к M векторных полей X и Y оператор кривизны $\overline{R}(X,Y)$ связности $\overline{\nabla}$ определяется по формуле $\overline{R}(X,Y) = [\overline{\nabla}_X, \overline{\nabla}_Y] - \overline{\nabla}_{[X,Y]}$. Эти операторы действуют как дифференцирования тензорной алгебры на M. Тензорное поле K называется параллельным, если $\overline{\nabla}_X K = 0$ для любого X. Тензорное поле K называется полупараллельным, если $\overline{R}(X,Y) \cdot K = 0$ для любых X и Y.

Параллельные и полупараллельные фундаментальные формы α_s определяются по рекуррентной формуле $\alpha_{s+1} = \overline{\nabla}\alpha_s$. Подмногообразия с параллельными фундаментальными формами α_s называются s-параллельными, а подмногообразия с полупараллельными фундаментальными формами α_s называются s-полупараллельными. Для $s = 2$ подмногообразия называются параллельными (или симметричными) и полупараллельными (или полусимметричными) соответственно (см. [5] — [8]).

Определение 1. Общая точка x двух m-мерных подмногообразий M и $\widetilde{M}$ в $M_n(c)$ называется точкой касания s-го $(s \geq 2)$ порядка, если

1) касательные пространства $T_x(M)$ и $T_x(\widetilde{M})$ совпадают,

2) фундаментальные формы α_r и $\widetilde{\alpha}_r$, $r = 2, ..., s$ подмногообразий M и $\widetilde{M}$ совпадают, т.е. $\alpha_r(X_1, ..., X_r) = \widetilde{\alpha}_r(X_1, ..., X_r)$ для любых векторов $X_1, ..., X_r \in T_x(M)$.

Если условие 2) выполняется при любом $s \geq 2$, то X называется точкой полного касания.

При $s = 2$ это определение эквивалентно классическому определению точки касания второго порядка (см. [5]).

Определение 2. m-мерное подмногообразие M в $M_n(c)$ называется огибающим s-го $(s \geq 2)$ порядка некоторого семейства m-мерных подмногообразий $\{G\}$,

если в каждой точке $x \in M$, подмногообразие M имеет касание s-го порядка с некоторым подмногообразием из $\{G\}$, зависящим от x. Если в каждой точке $x \in M$ многообразие M имеет полное касание с каким-либо подмногообразием из $\{G\}$, то M называется огибающим полного порядка семейства $\{G\}$.
Известно (см. [9 — 11]), что стандартные погружения симметрических R-пространств исчерпываются параллельными подмногообразиями. Следующая теорема дает характеризацию полупараллельных подмногообразий.

Теорема Лумисте, [5]. **m-мерное подмногообразие $M \subset M_n(c)$ полупараллельно тогда и только тогда, когда оно является огибающим второго порядка семейства m-мерных параллельных подмногообразий.**
Следующие теоремы являются прямыми обобщениями теоремы Лумисте в направлении усиления законов огибания.

Теорема 1 ([1]). **В $M_n(c)$ m-мерное подмногообразие M класса C^∞ является огибающим s-го ($s \geq 2$) порядка для семейства m-мерных s-параллельных подмногообразий $\{G\}$ тогда и только тогда, когда M имеет полупараллельные фундаментальные формы α_{s-1} и α_s при $s \geq 3$ и полупараллельную фундаментальную форму α_2 при $s = 2$.**

Теорема 2 ([1]). **Пусть m-мерное подмногообразие M класса C^∞ в $M_n(c)$ имеет симметрические фундаментальные формы $\alpha_3, \ldots \alpha_{s-1}$ ($s \geq 4$). Тогда его фундаментальная форма α_s будет симметричной в том и только в том случае, когда M является огибающим ($s-2$)-го порядка семейства m-мерных ($s-2$)-параллельных подмногообразий, у каждого из которых все фундаментальные формы до ($s-2$)-го порядка включительно также являются симметрическими.**
Пусть $F(M)$ обозначает класс тензорных полей на подмногообразии M в $M_n(c)$, определяемых только второй фундаментальной формой α_2 и ее ковариантными производными произвольного порядка с использованием тензорных операций. В частности, классу $F(M)$ принадлежат тензоры кривизны R и $R^\perp$ связностей ∇ и $\overline{\nabla}$ соответственно, тензор Риччи R_1, вектор средней кривизны H и их ковариантные производные любого порядка.
Пусть M и $\widetilde{M}$ - два m-мерных подмногообразия в $M_n(c)$. Обозначим через $T \in F(M)$ и $\widetilde{T} \in F(\widetilde{M})$ соответствующие тензорные поля, т.е., такие тензорные поля, которые выражаются через вторые фундаментальные формы α_2 и $\widetilde{\alpha}_2$ соответственно, и их ковариантные производные с помощью одних и тех же тензорных операций. Ковариантные производные $\overline{\nabla}_{X_1} \ldots \overline{\nabla}_{X_s} T$ тензорного поля T на подмногообразии M будем обозначать через $\overline{\nabla}^s T$ (при $s = 0$ полагаем $\overline{\nabla}^0 T = T$).

Определение 3. Пусть m-мерные подмногообразия M и $\widetilde{M}$ в $M_n(c)$ имеют общую точку x и пусть $T \in F(M)$ и $\widetilde{T} \in F(\widetilde{M})$. Точка x называется точкой T (эквивалентно $\widetilde{T}$)-касания s-го ($s \geq 0$) порядка для M и $\widetilde{M}$, если
1) касательные пространства $T_x(M)$ и $T_x(\widetilde{M})$ совпадают,
2) ковариантные производные $\overline{\nabla}^r T$ и $\overline{\nabla}^r \widetilde{T}$ совпадают в точке x при $r = 0, 1, \ldots, s$ (для $s = 0$ мы говорим о точке "T-касания").
Очевидно, что каждая точка полного касания является точкой T-касания s-го порядка для любого $s \geq 0$.

Определение 4. m-мерное подмногообразие M в $M_n(c)$ называется T-огибающим ($T \in F(M)$) s-го ($s \geq 0$) порядка для некоторого семейства m-мерных

подмногообразий $\{G\}$, если в каждой точке $x \in M$ подмногообразие M имеет T-касание s-го порядка с некоторым подмногообразием из $\{G\}$ (при $s = 0$ мы говорим о "T-огибающем подмногообразии").
Подмногообразие M с параллельной ковариантной производной $\overline{\nabla}^s T$ называется $\overline{\nabla}^s T$-параллельным, а подмногообразие M с полупараллельной ковариантной производной $\overline{\nabla}^s T$ называется $\overline{\nabla}^s T$-полупараллельным. При $s = 0$ мы говорим о T-параллельном и T-полупараллельном подмногообразии, соответственно.

Теорема 3 ([4]). Пусть m-мерное подмногообразие $M \subset M_n(c)$ является R, $R^{\perp}$ и T-огибающим некоторого семейства $\{\widetilde{M}\}$ m-мерного $\tilde{\overline{T}}$-параллельных подмногообразий, где $T \in F(M)$ определяется через вторую фундаментальную форму α_2 с использованием тензорных операций алгебраического характера. Тогда M является T-полупараллельным подмногообразием.

Теорема 4 ([4]). Пусть T как и в Теореме 3. Каждое m-мерное T-полупараллельное подмногообразие $M \subset M_n(c)$ класса C^{∞} является огибающим s-го ($s \geq 2$) порядка для некоторого семейства $\{\widetilde{M}\}$ m-мерных $\tilde{\overline{T}}$-параллельных подмногообразий.
Следующие теоремы обобщают вышеприведенные результаты и распространяют их ковариантные производные $\overline{\nabla}^s T$ произвольного тензорного поля $T \in F(M)$ на подмногообразии $M \subset M_n(c)$.

Теорема 5. Пусть m-мерное подмногообразие M класса C^{∞} в $M_n(c)$ является R и $R^{\perp}$-огибающим порядка $r = 0$ и T-огибающим порядка $s \geq 0$ ($T \in F(M)$) для некоторого семейства m-мерных $\overline{\nabla}^s \tilde{\overline{T}}$-параллельных подмногообразий $\{\widetilde{M}\}$. Тогда M является $\overline{\nabla}^{s-1} \tilde{\overline{T}}$- и $\overline{\nabla}^s \tilde{\overline{T}}$- полупараллельным при $s \geq 1$ и T-полупараллельным при $s = 0$.

Теорема 6. Пусть m-мерное подмногообразие $M \subset M_n(c)$ класса C^{∞} является $\overline{\nabla}^{s-1} T$ и $\overline{\nabla}^s T$-полупараллельным, где $s \geq 0$ и $T \in F(M)$. Тогда M является огибающим полного порядка для некоторого семейства m-мерных $\overline{\nabla}^s \tilde{\overline{T}}$-параллельных подмногообразий $\{\widetilde{M}\}$.

Теорема 7. Пусть $M \subset M_n(c)$ является m-мерным подмногообразием класса C^{∞}. Предположим, что на M ковариантные производные $\overline{\nabla}_{X_1} ... \overline{\nabla}_{X_r} T$ ($r = 2, ..., s+1, s \geq 2$) тензорного поля $T \in F(M)$ симметричны относительно векторных полей $X_1, ..., X_r$, касательных к M. Тогда ковариантные производные $\overline{\nabla}_{X_1} ... \overline{\nabla}_{X_{s+2}} T$ симметричны относительно $X_1, ..., X_{s+2}$ тогда и только тогда, когда M является R, $R^{\perp}$ и $\overline{\nabla}^s T$-огибающим для некоторого семейства $\{\widetilde{M}\}$ m-мерных $\overline{\nabla}^s \tilde{\overline{T}}$-параллельных подмногообразий, для которых ковариантные производные $\overline{\nabla}_{\tilde{X}_1} ... \overline{\nabla}_{\tilde{X}_r} \tilde{\overline{T}}$ симметричны по произвольным аргументам $\tilde{X}_1, ..., \tilde{X}_{r'}$, $r' = 2, ..., s$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Мирзоян, "S-полупараллельные подмногообразия в пространствах постоянной кривизны как огибающие s-параллельных подмногообразий", Изв. НАН Армении, серия Математика, том 31, № 5, стр. 44 — 56, 1996.
2. В. А. Мирзоян, "Подмногообразия с симметрическими фундаментальными формами высшего порядка как огибающие", Изв. вузов, Математика, № 9,

стр. 35 — 40, 1997.

3. В. А. Мирзоян, "Подмногообразия с полупараллельными фундаментальными формами высшего порядка как огибающие", Изв. вузов, Математика, № 8, стр. 79 — 80, 1998.
4. В. А. Мирзоян, "Об обобщениях теоремы Лумисте о полупараллельных подмногообразиях", Изв. НАН Армении, серия Математика, том 33, № 1, стр. 48 — 58, 1998.
5. Ü. Lumiste, "Semi-symmetric submanifold as the second order envelope of symmetric submanifolds", Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math., vol. 39, pp. 1 — 8, 1990.
6. Ю. Г. Лумисте, "Полусимметрические подмногообразия", Итоги Науки и Техники, Проблемы Геометрии, том 23, стр. 3 — 28, 1991.
7. Ü. Lumiste, "Semi-parallel time-like surfaces in Lorentzian spacetime form", Diff. Geom. Applic., vol. 7, pp. 59 — 74, 1997.
8. Ü. Lumiste, "Isometric semi-parallel immersion of two-dimensional Riemannian manifolds into pseudo-euclidean spaces", New developments in differential geometry. Proc. Conf. Diff. Geom., July 27—30, 1996. Budapest : Kluwer Acad. Pabl., pp. 243 — 264, 1999.
9. D. Ferus, "Symmetric submanifolds of Euclidean space", Math. Ann., vol. 247, pp. 81 — 93, 1980.
10. M. Takeuchi, "Parallel submanifolds of space form. Manifolds and Lie groups", Papers in honor of Yōzo Matsushima. Basel : Birkhäuser., pp. 429 — 447, 1981.
11. E. Backes, H. Reckzegel, "On symmetric submanifolds of spaces of constant curvature", Math. Ann., vol. 263, pp. 419 — 433, 1983.

3 сентября 1999

Государственный Инженерный
Университет Армении