ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ КОРРЕКТНЫХ ПО ПЕТРОВСКОМУ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Р. Л. Шахбагян, Л. Г. Тоноян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 5, 1999

В статье исследуется задача управления системой, описываемой уравнениями четвертого порядка с коэффициентами, зависящими как от пространственных, так и временной переменных. Для некоторого класса уравнений, корректных по Петровскому, доказано существование точного управления, принадлежащего пространству L_2.

0°. В работе продолжаются исследования, начатые в [1], [2], посвященные проблеме управления системами, описываемыми различными классами уравнений в частных производных высокого порядка, корректных по Петровскому с коэффициентами, зависящими лишь от пространственных переменных.

Рассмотрим теперь задачу управления для некоторого класса уравнений четвертого порядка с коэффициентами, зависящими также от временной переменной.

1°. Пусть Ω – ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$, и пусть $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $0 < T < \infty$ – открытый цилиндр, лежащий в прямом произведении $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$, где $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R}^1; t > 0\}$ и $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$. В цилиндре Q_T рассмотрим уравнение вида

$$u_{tt} + \Delta^2 u + L\,u = 0, \tag{1.1}$$

где

$$L\,u = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}(x,t)\,u_{x_i}\right)_{x_j} + (b(x,t)\,u)_t + c(x,t)\,u, \tag{1.2}$$

$u_x = \partial u/\partial x$. Δ^2 – n–мерный полигармонический оператор.

Для формулировки краевой задачи мы используем следующие обозначения. Для любой точки $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ и $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ положим

$$m(x) = x - x^0, \quad m_k(x) = x_k - x_k^0, \quad k = \overline{1, n}. \tag{1.3}$$

Пусть $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$ – единичная внешняя нормаль к поверхности Γ, $\nu_k = \cos(\nu, x_k)$. Положим

$$\Gamma(x^0) = \{x \in \Gamma, \quad \sum_{k=1}^{n} m_k \, \nu_k \geq 0\} \quad \text{и} \quad \Gamma_*(x^0) = \Gamma \setminus \Gamma(x^0). \tag{1.4}$$

Для уравнения (1.1) рассмотрим следующую краевую задачу :

$$u(0) = u^0, \quad u_t(0) = u^1 \quad \text{на } \Omega \tag{1.5}$$

$$u|_\Sigma = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Sigma = \begin{cases} V, & \text{на} \quad \Gamma(x^0) \times (0, T) \\ 0, & \text{на} \quad \Gamma_*(x^0) \times (0, T), \end{cases} \tag{1.6}$$

где функция V – управление.

Точным управлением для смешанной задачи (1.1), (1.5), (1.6) является функция $V(x, t)$ такая, что при некотором $0 < T < \infty$ решение $u = u(x, t; V)$ и ее производная $u_t(x, t; V)$ обращаются в нуль при $t = T$, т.е.

$$u(x, T, V) = u_t(x, T, V) = 0. \tag{1.7}$$

2°. Точное управление можно найти одновременным рассмотрением основной и дуальной задач. Таким образом, рассмотрим следующие две задачи :

$$w_{tt} + \Delta^2 w + L\, w = 0, \tag{2.1}$$

$$w(0) = w^0, \quad w_t(0) = w^1, \tag{2.2}$$

$$w|_\Sigma = \left.\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|_\Sigma = 0, \tag{2.3}$$

и соответственно

$$z_{tt} + \Delta^2 z + L^*\, z = 0, \tag{2.4}$$

$$z(T) = z_t(T) = 0, \tag{2.5}$$

$$z|_\Sigma = 0, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial \nu}\right|_\Sigma = \begin{cases} \Delta w, & \text{на} \quad \Gamma(x^0) \times (0, T) \\ 0, & \text{на} \quad \Gamma_*(x^0) \times (0, T), \end{cases} \tag{2.6}$$

где

$$L^* z = -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x, t)\, z_{x_i})_{x_j} - b(x, t)\, z_t + c(x, t)\, z. \tag{2.7}$$

Предложение 2.1. **Пусть функции $w(x, t)$ и $z(x, t)$ – решения задач (2.1) — (2.3) и (2.4) — (2.6), соответственно. Тогда справедливо соотношение**

$$\int_\Omega [(z'(0) - z(0)\, b(x, 0))\, w^0 - z(0) w^1]\, dx = \int_{\Gamma(x^0) \times (0, T)} |\Delta w|^2 \, d\Gamma\, dt. \tag{2.8}$$

Доказательство : Умножив тождество (2.1) на $z(x,t)$, а (2.4) на $w(x,t)$, составляя симметрическую разность и интегрируя по Q_T, получим

$$\iint\limits_{Q_T} (z\, w_{tt} - w\, z_{tt})\, dx\, dt + \iint\limits_{Q_T} (z\, \Delta^2 w - w\, \Delta^2 z)\, dx\, dt = \iint\limits_{Q_T} (w\, L^* z - z\, Lw)\, dx\, dt. \quad (2.9)$$

Преобразуем обе части последнего соотношения, используя (2.2) и (2.5) :

$$\iint\limits_{Q_T} (z\, w_{tt} - w\, z_{tt})\, dx\, dt = \int\limits_{\Omega} (z_t(0)\, w^0 - z(0)\, w^1)\, dx. \quad (2.10)$$

Далее, аналогично [1] имеем

$$\iint\limits_{Q_T} (z\, \Delta^2 w - w\, \Delta^2 z)\, dx\, dt = \int\limits_{\Gamma(x^0)\times(0,T)} |\Delta w|^2\, d\Gamma\, dt. \quad (2.11)$$

Преобразуем $\sum\limits_{i,j=1}^{n} \iint\limits_{Q_T} z(a_{ij}(x,t)\, w_{x_i})_{x_j}\, dx\, dt = -\sum\limits_{i,j=1}^{n} \iint\limits_{Q_T} a_{ij}(x,t)\, w_{x_i}\, z_{x_j}\, dx\, dt$. В силу (2.2) и (2.5) получим

$$\sum_{i,j=1}^{n} \iint\limits_{Q_T} \left[z(a_{ij}(x,t)\, w_{x_i})_{x_j} - w(a_{ij}(x,t)\, z_{x_i})_{x_j} \right] dx\, dt = 0. \quad (2.12)$$

Рассмотрим наконец $\iint\limits_{Q_T} z\,(b(x,t)\, w)_t\, dx\, dt = -\iint\limits_{Q_T} b\, w\, z_t\, dx\, dt + \int\limits_{\Omega} z\, b\, w\, dx \Big|_0^T$. С учетом (2.5) имеем

$$\iint\limits_{Q_T} [z(x,t)\,(b\, w)_t + b\, w\, z_t(x,t)]\, dx\, dt = -\int\limits_{\Omega} z(x,0)\, b(x,0)\, w^0\, dx. \quad (2.13)$$

Заметим, что из (2.9) — (2.13) следует (2.8). Доказательство завершено.

3°. Определим оператор

$$\Lambda\{w^0, w^1\} = \{z_t'(x,0) - z(x,0)\, b(x,0), -z(x,0)\}, \quad (3.1)$$

действующий на множестве начальных данных $\{w^0, w^1\}$ задачи (2.1) — (2.3). В (3.1), $z(x,t)$ - решение задачи (2.4) — (2.6).

Как установлено в [2], из обратимости оператора Λ следует существование решения основной задачи (1.1), (1.5) — (1.7). Обозначим через $< \cdot, \cdot >$ скалярное произведение в $L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$. В силу (3.1) и Предложения 2.1 имеем

$$< \Lambda\{w^0, w^1\}, \{w^0, w^1\} >= \int\limits_{\Gamma(x^0)\times(0,T)} |\Delta w|^2\, d\Gamma\, dt. \quad (3.2)$$

Для обратимости оператора Λ покажем, что $(\int_{\Gamma(x^0)\times(0,T)} |\Delta w|^2\, d\Gamma\, dt)^{1/2}$ определяет норму на множестве начальных данных задачи (2.1)-(2.3).

4°. Для формулировки условий, налагаемых на коэффициенты оператора Λ, введем "интеграл энергии".

Пусть $w(x,t)$ – решение задачи (2.1) — (2.3). Умножив тождество (2.1) на w_t и проинтегрировав обе части по Q_T, получим

$$\iint\limits_{Q_T} w_t\,(w_{tt} + \Delta^2 w + L\,w)\,dx\,dt = 0. \tag{4.1}$$

Преобразуем в отдельности слагаемые. Очевидно

$$\iint\limits_{Q_T} w_t\,w_{tt}\,dx\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |w_t|^2\,dx\Big|_0^T . \tag{4.2}$$

В силу краевых условий (2.3) получим

$$\iint\limits_{Q_T} w_t\,\Delta^2 w\,dx\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\Delta w|^2\,dx\Big|_0^T . \tag{4.3}$$

Имеем

$$\begin{aligned}
&-\sum_{i,j=1}^{n}\iint\limits_{Q_T} w_t\,(a_{ij}(x,t)\,w_{x_i})_{x_j}\,dx\,dt = \sum_{i,j=1}^{n}\iint\limits_{Q_T} (w_t)_{x_j}\,a_{ij}(x,t)\,w_{x_i}\,dx\,dt = \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\iint\limits_{Q_T} \frac{\partial}{\partial t}(a_{ij}(x,t)\,w_{x_i}\,w_{x_j})\,dx\,dt - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\iint\limits_{Q_T} \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\,w_{x_i}\,w_{x_j}\,dx\,dt = \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega} a_{ij}(x,t)\,w_{x_i}\,w_{x_j}\,dx\Big|_0^T - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\iint\limits_{Q_T} \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\,w_{x_i}\,w_{x_j}\,dx\,dt.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Наконец

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{Q_T} w_t\,(b\,w)_t\,dx\,dt = \iint\limits_{Q_T} b\,|w_t|^2\,dx\,dt + \iint\limits_{Q_T} \frac{\partial b}{\partial t}\,w\,w_t\,dx\,dt = \\
&= \iint\limits_{Q_T} b\,|w_t|^2\,dx\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \frac{\partial b}{\partial t}\,w^2\,dx\Big|_0^T - \frac{1}{2}\iint\limits_{Q_T} w^2\,\frac{\partial^2 b}{\partial t^2}\,dx\,dt,
\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\iint\limits_{Q_T} c\,w\,w_t\,dx\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} c(x,t)\,w^2\,dx\Big|_0^T - \frac{1}{2}\iint\limits_{Q_T} \frac{\partial c}{\partial t}\,w^2\,dx\,dt. \tag{4.6}$$

Подставляя (4.2) — (4.6) в (4.1), получим

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left[w_t^2 + |\Delta w|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\,w_{x_i}\,w_{x_j} + (b_t + c)\,w^2\right]dx\Big|_0^T = \\
&= \frac{1}{2}\iint\limits_{Q_T}\left[\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\,w_{x_i}\,w_{x_j} - 2b\,w_t^2 + \left(\frac{\partial^2 b}{\partial t^2} + \frac{\partial c}{\partial t}\right)w^2\right]dx\,dt.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

"Интеграл энергии" определим следующим образом :

$$E(t) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left[w_t^2 + |\Delta w|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, w_{x_i}\, w_{x_j} + \left(\frac{\partial b}{\partial t} + c\right) w^2\right] dx. \qquad (4.8)$$

Теперь в точности опишем класс рассматриваемых операторов.

a) Коэффициенты $a_{ij}(x,t)$ оператора L принадлежат пространству $C^2(\overline{Q}_T)$, матрица $\|a_{ij}\|_{i,j=1}^{n}$ – симметрическая и

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\,\xi_i\,\xi_j \geq 0, \quad \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}(x,t)}{\partial t}\,\xi_i\,\xi_j \geq 0, \quad \sum_{i,j,k=1}^{n} m_k(x)\,\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\,\xi_i\,\xi_j \leq 0. \qquad (4.9)$$

для любых $\xi \in \mathbb{R}^n$, $(x,t) \in Q_T$.

b) Функции $b(x,t)$ и $c(x,t)$ удовлетворяют неравенствам

$$\sum_{k=1}^{n} m_k(x)\,\frac{\partial}{\partial x_k}(b_t + c) + (n/2 - 1)\,b_t \leq 0, \quad b_t(x,t) + c(x,t) \geq 0, \qquad (4.10)$$

$$(b_t(x,t) + c(x,t))_t \geq 0, \quad b(x,t) \leq 0 \quad \text{для любого} \quad (x,t) \in Q_T.$$

c) Существует постоянная $C > 0$ такая, что для любого $t \in [0,T]$

$$E(0) \leq E(t) \leq C\,E(0). \qquad (4.11)$$

5°. Введем функциональные пространства, в которых мы будем исследовать задачу точного управления. Обозначим через $H^2(\Omega)$ пространство Соболева с нормой

$$\|u\|_2 = \left(\sum_{|\alpha|\leq 2}\int\limits_{\Omega} |D^\alpha u|^2\,dx\right)^{1/2}. \qquad (5.1)$$

Подпространство $\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)$ пространства $H^2(\Omega)$ является замыканием в норме (5.1) множества финитных бесконечно дифференцируемых в Ω функций. Нам также понадобится норма, эквивалентная (5.1) :

$$\|u\|_2 = \left(\sum_{|\alpha|=2}\int\limits_{\Omega} |D^2 u|^2\,dx\right)^{1/2}. \qquad (5.2)$$

Введем, наконец, пространство

$$F = \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega) \times L_2(\Omega) \qquad (5.3)$$

с нормой

$$\|\{u,v\}\|_F = \left(\|u\|_2^2 + \|v\|_0^2\right)^{1/2}, \qquad (5.4)$$

где $\|\cdot\|_0$ – норма пространства $L_2(\Omega)$.

6°. Сформируем основной результат этой статьи.

Теорема 6.1. Пусть оператор L удовлетворяет условиям а) — с) и $T > 0$ достаточно велико. Тогда при любых начальных данных $\{u^0, u^1\} \in F$ существует точное управление $V \in L_2(\Gamma(x^0) \times (0,T))$, приводящая систему (1.1), (1.5), (1.6) с начальными данными u^0, u^1 в состояние покоя за время T.

Доказательство опирается на ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 6.1. Пусть выполнены условия а) и с), и пусть $w(x,t)$ – решение задачи (2.1)–(2.3) с начальными данными $\{u^0, u^1\} \in F$. Тогда существует постоянная $c > 0$, не зависящая от T такая, что

$$\int\limits_{\Sigma} |\Delta w|^2 \, d\Sigma \leq c\,(1+T)\,E(0). \tag{6.1}$$

Доказательство : Пусть функции $h_k \in C^2(\overline{\Omega})$ удовлетворяют условиям

$$h_k(x)|_{\Gamma} = \nu_k, \quad k = \overline{1,n}. \tag{6.2}$$

Умножим тождество (2.1) на $h_k\, w_{x_k}$, просуммируем обе части по $k = 1,2,...,n$ и проинтегрируем по цилиндру Q_T. Получим

$$\sum_{k=1}^{n} \iint\limits_{Q_T} w_{tt}\, h_k\, w_{x_k}\, dx\, dt + \sum_{k=1}^{n} \iint\limits_{Q_T} \Delta^2 w\, h_k\, w_{x_k}\, dx\, dt + \sum_{k=1}^{n} \iint\limits_{Q_T} L\, w\, h_k\, w_{x_k}\, dx\, dt = 0. \tag{6.3}$$

Интегралы в (6.3) преобразуем по отдельности также как и в [1]. Имеем

$$I_1 = \sum_{k=1}^{n} \iint\limits_{Q_T} w_{tt}\, h_k(x)\, w_{x_k}\, dx\, dt = X + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \iint\limits_{Q_T} w_t^2\, \frac{\partial h_k}{\partial x_k}\, dx\, dt, \tag{6.4}$$

где

$$X = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\Omega} w_t\, h_k(x)\, w_{x_k}\, dx \Bigg|_0^T. \tag{6.5}$$

Далее (ср. [1])

$$I_2 = \sum_{k=1}^{n} \iint\limits_{Q_T} \Delta^2 w\, h_k\, w_{x_k}\, dx\, dt = \sum_{k=1}^{n} \iint\limits_{Q_T} \Delta(h_k\, w_{x_k})\, \Delta w\, dx\, dt - \int\limits_{\Sigma} |\Delta w|^2\, d\Sigma. \tag{6.6}$$

Рассмотрим теперь

$$I_2' = \sum_{k=1}^{n} \iint_{Q_T} \Delta(h_k\, w_{x_k})\, \Delta w\, dx\, dt = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \iint_{Q_T} h_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k} (\Delta w)^2\, dx\, dt +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{|\alpha|+|\beta|=2 \\ \alpha\neq 0}} a_{\alpha,\beta} \iint_{Q_T} D^\alpha h_k(x)\, D^\beta(w_{x_k})\, \Delta w\, dx\, dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \iint_{Q_T} \frac{\partial h_k}{\partial x_k} |\Delta w|^2\, dx\, dt + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} |\Delta w|^2\, d\Sigma + I_2'',$$

откуда следует, что

$$I_2 = I_2'' - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \iint_{Q_T} \frac{\partial h_k}{\partial x_k} |\Delta w|^2\, dx\, dt - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} |\Delta w|^2\, d\Sigma. \tag{6.7}$$

Преобразуем

$$\begin{aligned} I_3 &= -\sum_{i,j,k=1}^{n} \iint_{Q_T} h_k(x)\, w_{x_k} (a_{ij}(x,t)\, w_{x_i})_{x_j}\, dx\, dt = \\ &= \sum_{i,j,k=1}^{n} \iint_{Q_T} (h_k(x)\, w_{x_k})_{x_j}\, a_{ij}(x,t)\, w_{x_i}\, dx\, dt = \\ &= \sum_{i,j,k=1}^{n} \iint_{Q_T} h_k(x)\, w_{x_k x_j}\, a_{ij}(x,t)\, w_{x_i}\, dx\, dt + \\ &+ \sum_{i,j,k=1}^{n} \iint_{Q_T} \frac{\partial h_k}{\partial x_j} a_{ij}(x,t)\, w_{x_k}\, w_{x_i}\, dx\, dt = I_3' + I_3''. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Рассмотрим, наконец

$$\begin{aligned} I_4 &= \sum_{k=1}^{n} \iint_{Q_T} h_k(x)\, w_{x_k} ((bw)_t + cw)\, dx\, dt = \sum_{k=1}^{n} \iint_{Q_T} h_k(x)\, w_{x_k}\, b(x,t)\, w_t\, dx\, dt + \\ &+ \sum_{k=1}^{n} \iint_{Q_T} h_k(x)\, w_{x_k} (b_t + c)\, w\, dx\, dt = I_4' + I_4''. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Подставляя (6.4), (6.7)–(6.9) в (6.3), получим

$$X + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \iint_{Q_T} \frac{\partial h_k}{\partial x_k} (w_t^2 - |\Delta w|^2)\, dx\, dt - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} |\Delta w|^2\, d\Sigma + I_2'' + I_3' + I_3'' + I_4' + I_4'' = 0. \tag{6.10}$$

Докажем теперь неравенство (6.1). В силу (4.7) — (4.10) имеем

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \iint_{Q_T} \frac{\partial h_k}{\partial x_k} (w_t^2 - |\Delta w|^2)\, dx\, dt \right| \le c_1 \int_0^T E(t)\, dt \le c_2\, T\, E(0) \tag{6.11}$$

(здесь и ниже c_i, $i = 1, 2, \ldots$ суть постоянные). Далее

$$
\begin{aligned}
|I_2''| &= \left| \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{|\alpha|+|\beta|=2 \\ \alpha\neq 0}} a_{\alpha,\beta} \iint\limits_{Q_T} D^\alpha h_k\, D^\beta w_{x_k} \cdot \Delta w \, dx\, dt \right| \le \\
&\le c_3 \sum_{k=1}^{n} \sum_{|\beta|\le 1} \iint\limits_{Q_T} |D^\beta w_{x_k}|\, |\Delta w| \, dx\, dt \le c_4 \sum_{|\beta|\le 2} \iint\limits_{Q_T} |D^\beta w|\, |\Delta w|\, dx\, dt \le \\
&\le c_5 \iint\limits_{Q_T} |\Delta w|^2 \, dx\, dt \le c_6 \int\limits_0^T E(t)\, dt \le c_7 T\, E(0).
\end{aligned}
\tag{6.12}
$$

Интегралы I_3' и I_3'' оцениваются аналогично :

$$
|I_3'| \le c_8 T\, E(0), \quad |I_3''| \le c_9 T\, E(0). \tag{6.13}
$$

Оценим, наконец, I_4' и I_4''.

$$
\begin{aligned}
|I_4'| &= \left| \sum_{k=1}^{n} \iint\limits_{Q_T} h_k(x)\, w_{x_k}\, b(x,t)\, w_t \, dx\, dt \right| \le c_{10} \iint\limits_{Q_T} (w_t^2 + \sum_{k=1}^{n} w_{x_k}^2)\, dx\, dt \le \\
&\le c_{11} \iint\limits_{Q_T} (w_t^2 + |\Delta w|^2)\, dx\, dt \le c_{12} T\, E(0),
\end{aligned}
\tag{6.14}
$$

$$
\begin{aligned}
|I_4''| &= \left| \sum_{k=1}^{n} \iint\limits_{Q_T} h_k(x)\, (b_t + c)\, w_{x_k}\, w \, dx\, dt \right| \le c_{13} \iint\limits_{Q_T} (w^2 + \sum_{k=1}^{n} w_{x_k}^2)\, dx\, dt \le \\
&\le c_{14} \iint\limits_{Q_T} |\Delta w|^2 \, dx\, dt \le c_{15} T\, E(0).
\end{aligned}
\tag{6.15}
$$

Оценка для X получена в [1] :

$$
|X| \le c_{16} E(0). \tag{6.16}
$$

Используя (6.10) — (6.16) приходим к окончательной оценке $\int\limits_\Sigma |\Delta w|^2\, d\Sigma \le c_{17}(1 + T) \cdot E(0)$. Лемма доказана.

Следствие 6.2. Пусть $w(x,t)$ – решение задачи (2.1) — (2.3). Тогда имеет место оценка

$$
E(0) \le c\, \|\{w^0, w^1\}\|_F^2, \tag{6.17}
$$

где $c > 0$ – постоянная.

Доказательство : Из (4.8), с учетом (4.10), (4.11), имеем

$$E(t) \le C\,E(0) \le c_1 \int\limits_{\Omega} (w_t^2 + |\Delta w|^2 + w^2 + \sum_{k=1}^{n} |w_{x_k}|^2)\,dx \le$$

$$\le c_2 \int\limits_{\Omega} (|w^1|^2 + \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha w^0|^2)\,dx \le c_2 \|\{w^0, w^1\}\|_F^2,$$

и оценка (6.17) доказана.

Лемма 6.2. При выполнении условий а) — d), существуют постоянные $c > 0$ и $T_0 > 0$ такие, что для решения $w(x,t)$ задачи (2.1) — (2.3) имеем оценку

$$\int\limits_{\Gamma(x^0)\times(0,T)} |\Delta w|^2\,d\Gamma\,dt \ge c\,(T - T_0)\,E(0). \qquad (6.18)$$

Доказательство : Пусть $w(x,t)$ - решение задачи (2.1)-(2.3). Умножая обе части тождества (2.1) на $m_k\,w_{x_k}$, суммируя по $k = 1, 2, \ldots, n$ и интегрируя по Q_T, получим

$$\begin{gathered} 0 = \sum_{k=1}^{n} \iint\limits_{Q_T} m_k(x)\,w_{x_k}\,w_{tt}\,dx\,dt + \sum_{k=1}^{n} \iint\limits_{Q_T} \Delta^2 w\,m_k\,w_{x_k}\,dx\,dt + \\ + \sum_{k=1}^{n} \iint\limits_{Q_T} L\,w\,m_k\,w_{x_k}\,dx\,dt = J_1 + J_2 + J_3. \end{gathered} \qquad (6.19)$$

Как показано в [1],

$$J_1 = \tilde{X} + \frac{n}{2} \iint\limits_{Q_T} w_t^2\,dx\,dt, \qquad (6.20)$$

где

$$\tilde{X} = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\Omega} m_k(x)\,w_t\,w_{x_k}\,dx \Bigg|_0^T. \qquad (6.21)$$

Далее (см. [1])

$$\begin{gathered} J_2 = \sum_{k=1}^{n} \iint\limits_{Q_T} m_k\,w_{x_k}\,\Delta^2 w\,dx\,dt = \left(1 - \frac{n}{2}\right) \iint\limits_{Q_T} |\Delta w|^2\,dx\,dt - \\ - \frac{1}{2} \int\limits_{\Sigma} \left(\sum_{k=1}^{n} m_k\,\nu_k\right) |\Delta w|^2\,d\Sigma. \end{gathered} \qquad (6.22)$$

Подставляя (6.20) и (6.22) в (6.19), получим

$$\tilde{X} + \frac{n}{2} \iint\limits_{Q_T} w_t^2\,dx\,dt + \left(2 - \frac{n}{2}\right) \iint\limits_{Q_T} |\Delta w|^2\,dx\,dt - \frac{1}{2} \int\limits_{\Sigma} \left(\sum_{k=1}^{n} m_k\,\nu_k\right) |\Delta w|^2\,d\Sigma + J_3 = 0. \qquad (6.23)$$

Наконец

$$J_3=\sum_{k=1}^{n}\iint_{Q_T} m_k(x)\,w_{x_k}\,L\,w\,dx\,dt=-\sum_{i,j,k=1}^{n}\iint_{Q_T} m_k(x)\,w_{x_k}\,(a_{ij}(x,t)\,w_{x_i})_{x_j}\,dx\,dt+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\iint_{Q_T} m_k(x)\,w_{x_k}\,((bw)_t+cw)\,dx\,dt=J_3'+J_3''. \qquad (6.24)$$

Имеем

$$J_3'=\sum_{i,j,k=1}^{n}\iint_{Q_T}(m_k\,w_{x_k})_{x_j}\,a_{ij}(x,t)\,w_{x_i}\,dx\,dt=\sum_{i,j=1}^{n}\iint_{Q_T} a_{ij}(x,t)\,w_{x_i}\,w_{x_j}\,dx\,dt+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\iint_{Q_T}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[m_k(x)\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\,w_{x_i}\,w_{x_j}\right]dx\,dt-$$

$$-\frac{n}{2}\iint_{Q_T}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\,w_{x_i}\,w_{x_j}\,dx\,dt-\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{n}\iint_{Q_T}m_k(x)\,\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\,w_{x_i}\,w_{x_j}\,dx\,dt. \qquad (6.25)$$

Как следует из (2.3), на поверхности Σ интегралы обращаются в нуль. Из (2.3) следует, что

$$\iint_{Q_T}\frac{\partial}{\partial x_k}[m_k(x)\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\,w_{x_i}\,w_{x_j}]dxdt=\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Sigma}m_k(x)\,\nu_k\,a_{ij}(x,t)w_{x_i}\,w_{x_j}d\Sigma=0.$$

Преобразуем

$$J_3''=\sum_{k=1}^{n}\iint_{Q_T}m_k(x)\,w_{x_k}\,bw_t\,dx\,dt+\sum_{k=1}^{n}\iint_{Q_T}m_k(x)\,w_{x_k}\,(b_t+c)\,w\,dx\,dt=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\iint_{Q_T}b(x,t)\,m_k(x)\,w_{x_k}\,w_t\,dx\,dt-\frac{n}{2}\iint_{Q_T}(b_t+c)\,w^2\,dx\,dt- \qquad (6.26)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\iint_{Q_T}m_k(x)\,\frac{\partial}{\partial x_k}\,(b_t+c)\,w^2\,dx\,dt.$$

Подставляя в (6.23) выражения для J_3' и J_3'', получим

$$\tilde{X}+\iint_{Q_T}\left[w_t^2+|\Delta w|^2+(b_t+c)\,w^2\right]dx\,dt-\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{n}\iint_{Q_T}m_k(x)\,\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\,w_{x_i}\,w_{x_j}\,dx\,dt+$$

$$+\frac{n-2}{2}Y-\frac{1}{2}\int_{\Sigma}\left(\sum_{k=1}^{n}m_k\nu_k\right)|\Delta w|^2\,d\Sigma+\sum_{k}\iint_{Q_T}b(x,t)\,m_k\,w_{x_k}\,w_t\,dx\,dt-$$

$$-\frac{1}{2}\iint_{Q_T}\left[\sum_{k=1}^{n}m_k\,\frac{\partial}{\partial x_k}(b_t+c)-\left(1-\frac{n}{2}\right)b_t\right]w^2\,dx\,dt=0. \qquad (6.27)$$

где

$$Y = \iint\limits_{Q_T} \left[w_t^2 - |\Delta w|^2 - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\, w_{x_i} w_{x_j} - \left(\frac{1}{2} b_t + c\right) w^2 \right] dx\, dt. \tag{6.28}$$

Покажем, что

$$Y = \int_\Omega \left(w_t + \frac{1}{2} b\, w \right) w\, dx \Big|_0^T . \tag{6.29}$$

С этой целью умножим тождество (2.1) на $w(x,t)$ и проинтегрируем его по Q_T. Получим

$$\iint\limits_{Q_T} \left[w_{tt} + \Delta^2 w + L\, w \right] w\, dx\, dt = 0. \tag{6.30}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\begin{gathered} \int_\Omega w\, w_t\, dx \Big|_0^T - \iint\limits_{Q_T} \left[w_t^2 - |\Delta w|^2 - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\, w_{x_i} w_{x_j} \right] dx\, dt + \\ + \iint\limits_{Q_T} (b\, w)_t\, w\, dx\, dt + \iint\limits_{Q_T} c(x,t)\, w^2\, dx\, dt = 0. \end{gathered} \tag{6.31}$$

Далее $\iint\limits_{Q_T} b\, w\, w_t\, dx\, dt = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_\Omega b(x,t)\, w^2\, dx \Big|_0^T - \dfrac{1}{2} \iint\limits_{Q_T} b_t\, w^2\, dx\, dt$. Подставляя в (6.31), получим

$$\begin{gathered} \int_\Omega \left(w_t + \frac{1}{2} b\, w \right) w\, dx \Big|_0^T + \iint\limits_{Q_T} \left(\frac{1}{2} b_t + c \right) w^2\, dx\, dt - \\ - \iint\limits_{Q_T} \left(w_t^2 - |\Delta w|^2 - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\, w_{x_i} w_{x_j} \right) dx\, dt = 0, \end{gathered}$$

откуда следует (6.29).

Перейдем к доказательству оценки (6.18). В силу (4.9) и условия а) пункта 4^*, имеем

$$\int_0^T E(t)\, dt \le c_1 \iint\limits_{Q_T} \left[w_t^2 + |\Delta w|^2 + (b_t + c)\, w^2 \right] dx\, dt \tag{6.32}$$

с некоторой постоянной $c_1 > 0$. Также имеем

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \iint\limits_{Q_T} b(x,t)\, m_k(x)\, w_t\, w_{x_k}\, dx\, dt \right| \le c_2 \iint\limits_{Q_T} \left(w_t^2 + |\nabla w|^2 \right) dx\, dt \le c_3 \int_0^T E(t)\, dt, \tag{6.33}$$

где ∇ – градиент функции u по x.

Учитывая (6.32), (6.33), (4.9) и условия a) и b) пункта 4°, из (6.27) получим неравенство $\widetilde{X} + c_4 \int_0^T E(t)\,dt + \dfrac{n-2}{2} Y - \dfrac{1}{2} \int\limits_{\Sigma} \left(\sum_{k=1}^{n} m_k \nu_k \right) |\Delta w|^2 \, d\Sigma \leq 0$, где полагаем $c_4 = c_1^{-1} - c_3 > 0$.

Следовательно, с учетом (1.4) получим

$$c_4 T\, E(0) - \frac{1}{2} \int\limits_{\Gamma(x^0)\times(0,T)} \left(\sum_{k=1}^{n} m_k \nu_k \right) |\Delta w|^2 \, d\Gamma\, dt \leq -\widetilde{X} - \frac{n-2}{2} Y. \tag{6.34}$$

В силу условий (2.3) и (4.11), из (6.21) имеем $\left|\sum_{k=1}^{n} \int_\Omega m_k(x)\, w_t\, w_{x_k}\, dx\right| \leq c_5 \int_\Omega \left(w_t^2 + |\nabla w|^2\right) dx \leq c_6 \iint_\Omega \left(w_t^2 + |\Delta w|^2\right) dx \leq c_7 E(t) \leq c_8 E(0)$. Следовательно

$$\left|\widetilde{X}\right| \leq 2\, c_8\, E(0) = c_9\, E(0). \tag{6.35}$$

Аналогично, $\left| \int_\Omega \left(w_t + \dfrac{1}{2} b(x,t)\, w \right) w\, dx \right| \leq c_{10} \int_\Omega \left(w_t^2 + |w|^2\right) dx \leq c_{11} E(t) \leq c_{12} E(0)$ и в силу (6.29) имеем

$$|Y| \leq c_{13}\, E(0). \tag{6.36}$$

Возвращаясь к неравенству (6.34) и используя (6.35) и (6.36), находим

$$\int\limits_{\Gamma(x^0)\times(0,T)} |\Delta w|^2 \, d\Gamma\, dt \geq c\,(T - T_0)\, E(0),$$

где $T_0 = c_4^{-1} \left(c_9 + \dfrac{n-2}{2} c_{13} \right)$, $c^{-1} = \dfrac{1}{2\,c_4} \sup\limits_{x\in\Gamma} \sum\limits_{k=1}^{n} m_k\, \nu_k > 0$. Доказательство Леммы 6.2 завершено.

Лемма 6.3. Пусть оператор L удовлетворяет условиям a) и b) пункта 4°. Тогда справедлива двусторонняя оценка

$$c_2 \left\| \{w^0, w^1\} \right\|_F^2 \leq E(0) \leq c_1 \left\| \{w^0, w^1\} \right\|_F^2,$$

где $w^0 \in \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)$, $w^1 \in L_2(\Omega)$ – начальные данные задачи (2.1) — (2.3).

Доказательство : Используя (4.9) и (4.10), получим

$$E(0) \geq \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|w^1|^2 + \Delta w^0|^2\right) dx \geq c\, \left(\|w^1\|_0^2 + \|w^0\|_2^2\right) = c\, \left\| \{w^0, w^1\} \right\|_F^2$$

с некоторой постоянной $c > 0$. Оценка сверху доказывается аналогично. Лемма доказана.

Из Лемм 4.1 — 4.3 получаем следующий результат.

Теорема 6.4. Пусть выполнены условия a) — c) и $T > 0$ достаточно велико. Тогда интеграл

$$\left(\int\limits_{\Gamma(x^0)\times(0,T)} |\Delta w|^2 \, d\Gamma \, dt \right)^{1/2}$$

задает норму на множестве начальных данных $w^0(x)$ и $w^1(x)$ задачи (2.1) — (2.3), эквивалентную норме пространства Соболева на прямом произведении $F = \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega) \times L_2(\Omega)$.

Доказательство аналогично доказательству Теоремы 4.3 в [1].

Теорема 6.5. Пусть выполнены условия Теоремы 6.4, и пусть $T > 0$ достаточно велико. Тогда оператор Λ, определяемый выражением (3.1) осуществляет изоморфизм между пространствами F и $F' = H^{-2}(\Omega) \times L_2(\Omega)$, где $H^{-2}(\Omega)$ – пространство, сопряженное к $\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)$.

Доказательство повторяет схему, проведенную в Теореме 4.4 работы [1], и поэтому мы его опускаем.

7°. Теперь приведем доказательство Теоремы 6.1.

Доказательство : По начальным данным $\{w^0, w^1\} \in F$ определяется единственное решение $w(x,t)$ задачи (2.1) — (2.3). Из Теоремы 6.4 следует существование граничных значений $\Delta w|_\Sigma \in L_2(\Sigma)$. Подставляя их в (2.6) и решая задачу (2.4) — (2.6) находим $z(x,t)$. Теперь нетрудно убедиться в том, что функция $u = z(x,t)$ является решением задачи (1.1), (1.5) — (1.7). Теорема доказана.

ABSTRACT. The paper investigates the control problem for systems described by partial differential equations of the fourth order with coefficients depending both on space and time variables. For a class of equations that are correct in Petrowsky sense the existence of exact control belonging to the space L_2 is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Л. Шахбагян, М. Эль-Санди, "Задача управления для эволюционных уравнений высокого порядка", Изв. НАН Армении, Математика, том 29, № 2, стр. 57 – 75, 1994.
2. Р. Л. Шахбагян, "Задача управления для уравнений, корректных по Петровскому", Изв. НАН Армении, Математика, том 32, № 5, стр. 45 – 61, 1997.

19 июля 1999

Ереванский государственный университет
E–mail : rshahba@ysu.am