О ВЫРОЖДАЮЩЕМСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО–ОПЕРАТОРНОМ УРАВНЕНИИ

Л. П. Тепоян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 34, № 5, 1999

В статье рассматривается дифференциально–операторное уравнение $(-1)^m D_t^m (t^\alpha D_t^m u) + t^{\alpha-2m} P u = f(t)$, где m – натуральное число, $t \in (0, b)$, $b < \infty$, $\alpha \geq 0$, $D_t \equiv d/dt$, $f \in L_{2,-\alpha}((0,b), \mathcal{H}) \equiv H$ и P – оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и обладает полной системой собственных функций, образующих базис Рисса в $\mathcal{H}$. Приведены условия, обеспечивающие существование и единственность обобщенного решения. Доказываются некоторые теоремы вложения в весовых пространствах Собелева.

§1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧА

Основным объектом настоящей статьи является дифференциально–операторное уравнение

$$\mathcal{A} u \equiv (-1)^m D_t^m (t^\alpha D_t^m u) + t^{\alpha-2m} P u = f(t), \tag{1}$$

где m – натуральное число, $t \in (0, b)$, $b < \infty$, $\alpha \geq 0$, $\alpha \neq 1, 3, ..., 2m-1$, $D_t \equiv d/dt$, $f \in L_{2,-\alpha}((0,b), \mathcal{H}) \equiv H$ и P – оператор, действующий в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и обладает полной системой собственных функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, образующих базис Рисса в $\mathcal{H}$.

Нас будет интересовать характер граничных условий при $t = 0, b$, обеспечивающих существование и единственность решения уравнения (1) при любых $f \in H$. В работах [1], [3], [4] эта задача рассматривалась при $0 \leq \alpha \leq 2m$.

Наш подход, близкий к [1], основан на иследовании одномерной версии уравнения (1), когда P является оператором умножения на число p. Описывается спектр одномерного оператора и доказываются теоремы вложения в весовых пространствах Соболева.

§2. ПРОСТРАНСТВО W_α^m

Для простоты в этом параграфе предположим, что функция $u(t)$ вещественна. Пусть $\overset{\circ}{C}{}^m$ – множество m раз непрерывно дифференцируемых функций на $[0, b]$, удовлетворяющих условиям

$$u^{(k)}(t)\Big|_{t=0} = u^{(k)}(t)\Big|_{t=b} = 0, \ k = 0, 1, ..., m-1. \tag{2}$$

Обозначим через $\overset{\circ}{W}{}^m$ пополнение $\overset{\circ}{C}{}^m$ по норме, порождаемой скалярным произведением

$$\{u, v\} = (u^{(m)}, v^{(m)}),$$

где $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $L_2(0, b)$.

Обозначим через W_α^m пополнение $\overset{\circ}{W}{}^m$ по норме

$$|u, W_\alpha^m|^2 = \int_0^b t^\alpha \, |u^{(m)}|^2 \, dt. \tag{3}$$

Скалярное произведение в W_α^m обозначим через

$$\{u, v\}_\alpha = (t^\alpha \, u^{(m)}, v^{(m)}).$$

Очевидно, что вложение $\overset{\circ}{W}{}^m \subset W_\alpha^m$ – собственное и что пространство $\overset{\circ}{W}{}^m$ совпадает с классом $(m-2)$ раз непрерывно дифференцируемых функций $u(t)$, для которых $u^{(m-1)}(t)$ абсолютно непрерывна и выполняются условия (2). Легко убедиться, что нормы пространств $\overset{\circ}{W}{}^m$ и W_α^m эквивалентны на отрезке $[\eta, b]$, $\eta > 0$. Следовательно, достаточно изучить свойства функций из W_α^m при малых значениях t. Для доказательства нижеследующего предложения см. [4].

Предложение 1. Для каждого $u \in W_\alpha^m$ справедливы следующие оценки :

$$|u^{(k)}(t)|^2 \le C_k \, t^{2m-2k-1-\alpha} \, |u, W_\alpha^m|^2, \tag{4}$$

где $\alpha \neq 2n+1$, $n = 0, 1, ..., m-1$, $k = 0, 1, ..., m-1$. При $\alpha = 2n+1$, $n = 0, 1, ..., m-1$ в (4) множитель $t^{2m-2k-1-\alpha}$ надо заменить на $t^{2m-2k-2n-2}|\ln t|$, $k = 0, 1, ..., m-1$.

Из неравенства (4) вытекает, что при $\alpha < 1$ (слабое вырождение) условия (2) "удерживаются", а при $\alpha \ge 1$ (сильное вырождение) "удерживаются" не все граничные условия. Например, при $1 \le \alpha < 3$, $u^{(m-1)}(t)|_{t=0}$ может обращаться в бесконечность, а при $\alpha \ge 2m-1$ все $u^{(k)}(t)|_{t=0}$ могут обращаться в бесконечность при $k = 0, 1, ..., m-1$.

Предложение 2. При любых $\alpha \geq 0$, $\alpha \neq 1, 3, \ldots, 2m-1$ имеет место вложение

$$W^m_\alpha \subset L_{2,\alpha-2m}. \tag{5}$$

Доказательство : Так как $\overset{*}{C}{}^m$ плотно в W^m_α, то достаточно доказать (5) в случае, когда $u \in \overset{*}{C}{}^m$. Пусть $m = 1$. Имеем

$$\left|\int_0^b t^{\alpha-2}\, u^2(t)\, dt\right|^2 = \left|\frac{1}{\alpha-1}\int_0^b u^2(t)\, dt^{\alpha-1}\right|^2 =$$

$$= \left|\frac{2}{\alpha-1}\int_0^b t^{\alpha/2-1}\, u'(t)\, t^{\alpha/2}\, u(t)\, dt\right|^2 \leq \frac{4}{(\alpha-1)^2}\int_0^b t^\alpha\, (u'(t))^2\, dt \int_0^b t^{\alpha-2}\, u^2(t)\, dt.$$

Отсюда получим

$$\int_0^b t^{\alpha-2}\, u^2(t)\, dt \leq \frac{4}{(\alpha-1)^2}\int_0^b t^\alpha\, (u'(t))^2\, dt.$$

Повторяя указанное действие m раз, получим

$$\int_0^b t^{\alpha-2m}\, u^2(t)\, dt \leq \frac{4^m}{(\alpha-1)^2\,(\alpha-3)^2\cdots(\alpha-(2m-1))^2}\int_0^b t^\alpha\, (u^{(m)})^2\, dt. \tag{6}$$

Предложение 2 доказано.

Замечание 1. Вложение (5) нарушается при $\alpha = 1, 3, \ldots, 2m-1$.

Докажем это утверждение при $\alpha = 1$ и $m = 1$. Рассмотрим функцию $u(t) = |\ln t|^\beta$, $t \in (0, a)$, $a < \min(1, b)$. В $L_{2,-1}(0, a)$ норма этой функции конечна при $\beta < -1/2$, а в $W^1_1(0, a)$ – конечна при $\beta < 1/2$. Следовательно, при $-1/2 \leq \beta < 1/2$ вложение (5) нарушается.

Замечание 2. Вложение (5) не является компактным.

Для простоты докажем это утверждение при $m = 1$ и $\alpha = 2$. Рассмотрим ограниченную в $W^1_2(0, a)$ последовательность $u_n(t) = n^{-1/2}\, t^{-1/2}\, |\ln t|^{-1/2-1/2n}$, где $a < \min(1, b)$. Легко проверить, что подпоследовательность последовательности $u_n(t)$ не сходится в метрике $L_2(0, a)$.

Замечание 3. При $\alpha \geq 0$, $\alpha \neq 1, 3, \ldots, 2m-1$ в пространстве W^m_α можно определить норму

$$\|u\|^2_\alpha = \int_0^b \left|t^{\alpha/2}\, u)^{(m)}\right|^2\, dt, \tag{7}$$

эквивалентную норме (3).

Доказательство эквивалентности норм (3) и (7) следует из рассуждений, аналогичных рассуждениям неравенства (6) из Предложения 2 (см. [5]). Следовательно, можем записать $W^m_\alpha = t^{-\alpha/2} W^m$, т.е. если $u \in \overset{\circ}{W}{}^m$, то $v = t^{-\alpha/2} u \in W^m_\alpha$. Отметим, что при $\alpha = 1, 3, ..., 2m-1$ нормы (3) и (7) неэквивалентны. Обозначим через $\tilde{W}^m_\alpha$ пополнение $\overset{\circ}{W}{}^m$ по норме (7). Из неравенства (4) следует вложение $\tilde{W}^m_\alpha \subset W^m_\alpha$.

Обозначим через $L_{2,\alpha} = L_{2,\alpha}(0,b)$ весовое пространство

$$L_{2,\alpha} = \{u(t): \ |u, L_{2,\alpha}|^2 = \int_0^b t^\alpha |u(t)|^2 \, dt < \infty\}.$$

Предложение 3. При любых $\alpha \geq 0$ вложение

$$W^m_\alpha \subset L_{2,\alpha} \tag{8}$$

компактно.

Доказательство : Сначала рассмотрим случай, когда $\alpha \neq 1, 3, ..., 2m-1$. Из (4) вытекает, что $|u(t)|^2 \leq C_k t^{2m-1-\alpha} |u, W^m_\alpha|^2$. Отсюда получим

$$|u, L_{2,\alpha}| \leq c_1 |u, W^m_\alpha|. \tag{9}$$

Для доказательства компактности вложения (8) используем неравенство (4) при $k = 1$ для записи

$$|u(t+h) - u(t), L_{2,\alpha}|^2 = \int_0^b t^\alpha |u(t+h) - u(t)|^2 \, dt = \int_0^b t^\alpha \left| \int_t^{t+h} u'(\tau) \, d\tau \right|^2 dt \leq$$

$$\leq c_1 |u, W^m_\alpha|^2 \int_0^b t^\alpha \left| \int_t^{t+h} \tau^{(2m-3-\alpha)/2} \, d\tau \right|^2 dt =$$

$$= c_2 |u, W^m_\alpha|^2 |h|^2 \int_0^b t^\alpha \xi^{2m-3-\alpha} \, dt \leq c |h|^2 |u, W^m_\alpha|^2,$$

где $\xi \in [t, t+h]$. Следовательно

$$|u(t+h) - u(t), L_{2,\alpha}| \leq c |h| \, |u, W^m_\alpha|. \tag{10}$$

Результат теперь следует из критерия предкомпактности в $L_{2,\alpha}$ (см. [1], [3]). При $\alpha = 1, 3, ..., 2m-1$ доказательство аналогично.

§3. ОДНОМЕРНАЯ ВЕРСИЯ УРАВНЕНИЯ (1)

Рассмотрим одномерную версию уравнения (1) :

$$\Lambda u \equiv (-1)^m D^m_t (t^\alpha D^m_t u) + p t^{\alpha - 2m} u = f(t), \tag{11}$$

где $\alpha \geq 0$, $\alpha \neq 1, 3, ..., 2m-1$, $f(t) \in L_{2,-\alpha}$, а p – постоянное число.

Определение 1. Функция $u \in W^m_\alpha$ называется обобщенным решением уравнения (11), если для любого $v \in W^m_\alpha$ выполняется равенство

$$\{u, v\}_\alpha + p(t^{\alpha-2m}\, u, v) = (f, v). \tag{12}$$

Положим $d = 4^{-m}\,(\alpha-1)^2\,(\alpha-3)^2 \cdots (\alpha-(2m-3))^2$.

Теорема 1. Пусть $p > -d$, $\alpha \geq 0$ и $\alpha \neq 1, 3, ..., 2m-1$. Тогда для любого $f \in L_{2,-\alpha}$ существует обобщенное решение уравнения (11) и оно единственно.

Доказательство : Единственность обобщенного решения уравнения (11) следует из (6) и (12), если положить $f = 0$ и $v = u$. Для доказательства существования рассмотрим функционал $l_f(v) \equiv (f, v)$, $f \in L_{2,-\alpha}$ над пространством W^m_α. Используя (9) можем записать

$$|l_f(v)|^2 = \left|\int_0^b f(t)\,\overline{u(t)}\,dt\right|^2 = \left|\int_0^b t^{-\alpha/2} f(t)\, t^{\alpha/2}\,\overline{v(t)}\,dt\right|^2 \leq$$

$$\leq \int_0^b t^{-\alpha}\,|f(t)|^2\,dt \int_0^b t^\alpha\,|v(t)|^2\,dt \leq c\,|f, L_{2,-\alpha}|^2\,|v, W^m_\alpha|^2.$$

Следовательно, $l_f(u)$ является линейным ограниченным функпионалом над пространством W^m_α. Результат теперь следует из леммы Рисса о представлении таких функционалов (см. [1]). Теорема 1 доказана.

Замечание 4. Отметим, что обобщенное решенис $u(t)$ уравнения (11) принадлежит $W^{2m}_2(\delta, b-\delta)$ для любого $\delta > 0$. Следовательно, в каждом интервале $(\delta, b-\delta)$ обобщенное решение $u(t)$ совпадает с обычным решением уравнения (11).

Элемент $f \in L_{2,-\alpha}$ представим в виде

$$f(t) = t^\alpha\, g(t). \tag{13}$$

Очевидно, что $g \in L_{2,\alpha}$ и $|f, L_{2,-\alpha}| = |g, L_{2,\alpha}|$. Теперь, исходя из Определения 1, определим оператор $B : W^m_\alpha \subset L_{2,\alpha} \to L_{2,\alpha}$.

Определение 2. Будем говорить, что функция $u(t) \in W^m_\alpha$ принадлежит области $D(B)$ оператора B, если имеет место равенство (12) при некотором $f \in L_{2,-\alpha}$. В этом случае мы будем писать $B\,u = g$, где функция g определяется согласно (13).

Из Определения 2 следует, что оператор B действует по формуле $B\,u \equiv t^{-\alpha}\,\{(-1)^m\, D^m_t(t^\alpha\, D^m_t\, u) + p\,t^{\alpha-2m}\, u\}$ и для любых $u \in D(B)$, $v \in W^m_\alpha$ и $f \in L_{2,-\alpha}$ имеет место равенство $(B\,u, v)_\alpha = (f, v)$, где $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в $L_{2,\alpha}$.

Теорема 2. При условиях Теоремы 1 B является положительным самосопряженным оператором в $L_{2,\alpha}$. При этом, $B^{-1} : L_{2,\alpha} \to L_{2,\alpha}$ – компактный оператор.

Доказательство : Симметричность и положительность оператора B следует из Определения 2. Самосопряженность симметрического оператора B следует из того, что согласно Теореме 1, при любых $f \in L_{2,-\alpha}$ уравнение (1) разрешимо, т.е. для любых $g \in L_{2,\alpha}$ вида (13) уравнение $B\,u = g$ разрешимо. Используя (6), (12), полагая $v = u$ и вложение $L_{2,\alpha-2m} \subset L_{2,\alpha}$ получаем

$$(d+p)\,c\,|u, L_{2,\alpha}|^2 \leq (d+p)\,|u, L_{2,\alpha-2m}|^2 \leq |u, W_\alpha^m|^2 + p\,|u, L_{2,\alpha-2m}|^2 \leq$$
$$\leq |f, L_{2,-\alpha}|\,|u, L_{2,\alpha}| = |g, L_{2,\alpha}|\,|u, L_{2,\alpha}|.$$

Следовательно $|B^{-1}g, L_{2,\alpha}| \leq c_1\,|g, L_{2,\alpha}|$. Отсюда следует, что B^{-1} ограничен. Для доказательства компактности B^{-1} осталось заметить, что согласно Предложению 2, вложение $D(B) \subset W_\alpha^m \subset L_{2,\alpha}$ является компактным. Теорема 2 доказана.

По стандартным свойствам спектров самосопряженных компактных операторов получаем следующее следствие.

Следствие. Оператор B имеет чисто точечный спектр, и система соответствующих собственных функций плотна в $L_{2,\alpha}$.

Отметим, что если λ – собственное значение оператора B и $u(t)$ – соответствующая собственная функция, то согласно Определению 2 имеем

$$(-1)^m\,D_t^m(t^\alpha\,D_t^m\,u) + p\,t^{\alpha-2m}\,u = \lambda\,t^\alpha\,u.$$

§4. ОПЕРАТОРНАЯ ВЕРСИЯ УРАВНЕНИЯ (1)

В этом параграфе рассмотрим операторную версию уравнения (1) :

$$\mathcal{A}\,u \equiv (-1)^m\,D_t^m(t^\alpha\,D_t^m\,u) + t^{\alpha-2m}\,P\,u = f(t), \quad f \in H. \tag{14}$$

Напомним, что если система $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ является базисом Рисса в $\mathcal{H}$, то любой элемент $x \in \mathcal{H}$ можно единственным образом представить в виде $x = \sum_{k=1}^\infty x_k\,\varphi_k$, и имеет место неравенство

$$c_2 \sum_{k=1}^\infty |x_k|^2 \leq \|x\| \leq c_1 \sum_{k=1}^\infty |x_k|^2, \tag{15}$$

где $\|\cdot\|$ – норма в $\mathcal{H}$.

Поскольку оператор P в (14) обладает полной системой собственных функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, образующих базис Рисса в $\mathcal{H}$, мы имеем

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\,\varphi_k, \quad f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\,\varphi_k, \quad P\varphi_k = p_k\,\varphi_k, \quad k \in N. \tag{16}$$

Тогда операторное уравнение (14) расщепляется на бесконечную цепочку обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\mathcal{A}_k\,u_k \equiv (-1)^m\,D_t^m(t^\alpha\,D_t^m\,u_k) + t^{\alpha-2m}\,p_k\,u_k = f_k(t), \quad k \in N. \tag{17}$$

Из условия $f \in H$ следует, что $f_k \in L_{2,-\alpha}$ при $k \in N$. Для одномерного уравнения (17) можно определить обобщенные решения u_k, $k \in N$ (ср. с Определением 1).

Определение 3. Обобщенным решением уравнения (14) назовем функцию $u \in W_\alpha^m((0,b),\mathcal{H}) \subset L_{2,\alpha}((0,b),\mathcal{H})$, определяемую равенством

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\,\varphi_k,$$

где $u_k(t)$ – обобщенные решения одномерного уравнения (17).

Следующая теорема вытекает из общих результатов А. А. Дезина [2].

Теорема 3. Операторное уравнение (14) однозначно разрешимо тогда и только тогда, когда одномерное уравнение (17) однозначно разрешимо и равномерно по $k \in N$ выполняется неравенство

$$|u_k, L_{2,\alpha}| \le c\,\varkappa|f_k, L_{2,-\alpha}|. \tag{18}$$

Из Теоремы 1 следует, что достаточными условиями для выполнения неравенств (18) являются

$$p_k > -d + \varepsilon, \;\; \varepsilon > 0, \;\; k \in N. \tag{19}$$

Следовательно, имеет место следующая теорема.

Теорема 4. Пусть выполняется условие (19) и $\alpha \neq 1, 3, ..., 2m-1$. Тогда для каждого $f \in H$ обобщенное решение операторного уравнения (14) существует и единственно.

Отметим, что если u является обобщенным решением уравнения (14), то согласно неравенствам (15) и (18) имеем

$$\begin{gathered}|u, L_{2,\alpha}((0,b),\mathcal{H})|^2 = \int_0^b t^\alpha\,\|u(t)\|^2\,dt \le c_1 \int_0^b t^\alpha \sum_{k=1}^{\infty} |u_k(t)|^2\,dt \le \\ \le c_2 \sum_{k=1}^{\infty} |f_k, L_{2,-\alpha}|^2 \le c\,|f, H|^2.\end{gathered} \tag{20}$$

Аналогично равенству (13) положим $f = t^\alpha g$. Очевидно, что тогда $g \in L_{2,\alpha}((0,b),\mathcal{H})$ и $|f, H| = |g, L_{2,\alpha}((0,b),\mathcal{H})|$. Неравенство (20) запишем в виде

$$|u, L_{2,\alpha}((0,b),\mathcal{H})| \leq c\,|g, L_{2,\alpha}((0,b),\mathcal{H})|. \tag{21}$$

Аналогично одномерному случаю обобщенное решение уравнение (14) порождает оператор

$$B : W_\alpha^m((0,b),\mathcal{H}) \subset L_{2,\alpha}((0,b),\mathcal{H}) \to L_{2,\alpha}((0,b),\mathcal{H}).$$

Из неравенства (21) следует, что $B^{-1} : L_{2,\alpha}((0,b),\mathcal{H}) \to W_\alpha^m((0,b),\mathcal{H}) \subset L_{2,\alpha}((0,b),\mathcal{H})$ является ограниченным оператором. Следовательно, имеем $0 \in \rho(B)$, где $\rho(B)$ - резольвентное множество оператора B.

ABSTRACT. The paper considers differential–operator equation $(-1)^m \times \times D_t^m(t^\alpha D_t^m u) + t^{\alpha-2m} P u = f(t)$, where m is a natural number, $t \in (0,b)$, $b < \infty$, $\alpha \geq 0$, $D_t \equiv d/dt$, $f \in L_{2,-\alpha}((0,b),\mathcal{H}) \equiv H$ and P is an operator acting in Hilbert space $\mathcal{H}$ and possessing a complete system of eigenfunctions that form a Riesz basis in $\mathcal{H}$. Conditions under which a generalized solution exists and is unique are derived. Some embedding theorems for weighted Sobolev spaces are proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Дезин, "Вырождающиеся операторные уравнения", Мат. сборник, том 43, № 3, стр. 287 — 298, 1982.
2. А. А. Дезин, Общие Вопросы Теории Граничных Задач Москва, 1980.
3. Л. П. Тепоян, "Вырождающиеся дифференциально-операторные уравнения", Дифф. Уравнения, том 23, № 8, стр. 1366 — 1376, 1987.
4. Л. П. Тепоян, "Об одном дифференциально-операторном уравнении высокого порядка", Труды конференции, Ереван, стр. 212 — 217, 1993.
5. R. Duduchava, D. Elliott and W. Wendland, "The Spline Collocation Method for Mellin Convolution Equations", Preprint, 1996.
6. Л. Д. Кудрявцев, "О вариационном методе отыскания обобщенных решений дифференциальных уравнений в функциональных пространствах со степенным весом", Диффер. Уравнения, том 19, № 10, стр. 1723 — 1740, 1983.
7. Л. Д. Кудрявцев, "Об эквивалентных нормах в весовых пространствах", Труды Мат. Инст. АН СССР, том 170, стр. 161 — 190, 1984.

8 июля 1999

Ереванский государственный университет