ЛОКАЛИЗАЦИЯ СПИРАЛЬНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Т. Л. Гарибян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 5, 1999

В статье изучается локализация особенностей степенных рядов вне их круга сходимости. Получены достаточные условия на лакуны коэффициентов степенных рядов, обеспечивающие наличие особенности в заданном спиральном угле.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Важный раздел вейерштрассовой теории аналитических функций, который привлекал внимание многих исследователей (см. [1], [2]), содержит результаты о локализации особенностей степенных рядов. В частности, описание локализации особенностей на окружности сходимости степенного ряда представлен в сравнительно недавних работах Н. У. Аракеляна и В. А. Мартиросяна [3], [4].

В связи с этим напомним знаменитую теорему Фабри и ее частные случаи [5]. Что касается вопросов локализации особенностей на внешности круга сходимости степенного ряда, мы можем упомянуть только статью А. Яврян [6], в которой изучалась локализация особенностей на прямолинейных углах (радиальные особенности).

Цель настоящей работы заключается в изучении локализации особенностей степенных рядов на спиральных углах (спиральные особенности). Введем несколько необходимых обозначений.

Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n, \quad \limsup_{n\to\infty} |f_n|^{1/n} = 1 \tag{1}$$

с радиусом сходимости единица. Будем обозначать $Q = \{m \in \mathcal{N} : \ f_m \neq 0\} = \{m_i\}_1^\infty$, где $\mathcal{N}$ – множество натуральных чисел. Для последовательности

$\{n_k\}_1^\infty \subset Q$ и чисел $\mu > 1$, $\gamma \in (-\pi/2, \pi/2)$ положим

$$W(\mu,\gamma) = \liminf_{n_k\to\infty} \frac{1}{n_k}\int_1^{2\mu\cos\gamma} \frac{w_k(t)}{(t+a)^2+b^2}\,dt, \tag{2}$$

где

$$a = \frac{\mu(\mu\cos 2\gamma + \cos\gamma)}{\mu^2 - 2\mu\cos\gamma + 1}, \quad b = \frac{\mu|\sin\gamma|(2\mu\cos\gamma - 1)}{\mu^2 - 2\mu\cos\gamma + 1},$$

и $w_k(t)$ - число членов конечного множества $Q \cap [n_k, tn_k]$, $t > 1$. Спиральный угол, зависящий от $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\beta \in (0, 2\pi)$ определим следующим образом : $\Delta_\beta^\alpha = \{z : \left|\arg z - \alpha\log|z|\right| < \beta\}$. Основными результатами статьи являются приводимые ниже две теоремы.

Теорема 1. Пусть для степенного ряда (1) последовательность $\{n_k\}_1^\infty \subset \mathcal{N}$, $n_k \uparrow \infty$ удовлетворяет условию

$$\liminf_{n_k\to\infty} |f_{n_k}|^{1/n_k} = \rho > 0. \tag{3}$$

Если существует число $\lambda \in (0, 1]$ такое, что

$$\limsup_{\mu\to+\infty}\left\{\lambda\left[\log(2\mu\cos\gamma) + |\tan\gamma|\left(\frac{\pi}{2} - \arctan|\cot 2\gamma|\right)\right] - W(\mu,\gamma)\right\} >$$
$$> \frac{1}{2\cos^2\gamma}\log\frac{1}{\rho} + \log(2\cos\gamma) + |\tan\gamma|\left(\frac{\pi}{2} - \arctan|\cot 2\gamma|\right) +$$
$$+|\cot\gamma|\left(\frac{\pi}{2} - \arctan|\cot\gamma|\right), \tag{4}$$

где $W(\mu,\gamma)$ задается по (2), ряд (1) имеет конечную особую точку внутри спирального угла $\Delta_{\pi\lambda}^\alpha$, где $\alpha = -\tan\gamma$.

Для последовательности Q, чисел $n \in \mathcal{N}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ и $\mu > 1$ положим

$$S_Q^\gamma(n,\mu) = \sum_{m_s\in[n,2\mu n\cos\gamma]\cap Q} \frac{1}{m_s}.$$

Если $[n, 2\mu n\cos\gamma]\cap Q = \emptyset$, то предполагаем, что $S_Q^\gamma(n,\mu) = 0$. Введем обозначение

$$W^*(\mu,\gamma) = \liminf_{n_k\to\infty,\ n_k\in Q} S_Q^\gamma(n_k,\mu). \tag{5}$$

Теорема 2. Пусть для степенного ряда (1) последовательность $\{n_k\}_1^\infty \subset \mathcal{N}$, $n_k \uparrow \infty$ удовлетворяет условию (3). Если существует число $\lambda \in (0, 1]$ такое, что

$$\limsup_{\mu\to+\infty}\left\{\lambda\left[\log(2\mu\cos\gamma) + |\tan\gamma|\left(\frac{\pi}{2} - \arctan|\cot 2\gamma|\right)\right] - W^*(\mu,\gamma)\right\} >$$
$$> \frac{1}{2\cos^2\gamma}\log\frac{1}{\rho} + 1 + |\tan\gamma|\left(\frac{\pi}{2} - \arctan|\cot 2\gamma|\right), \tag{6}$$

где $W^*(\mu,\gamma)$ задается по (5), причем $|\gamma| < \pi/6$, ряд (1) имеет конечную особую точку внутри спирального угла $\Delta_{\pi\lambda}^\alpha$, где $\alpha = -\tan\gamma$.

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Через ∂E и $\overline{E}$ обозначим границу и замыкание множества $E \subset \mathbf{C}$. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. Пусть $g_\mu(\zeta,\zeta_0)$ – функция Грина круга $D_\mu = \{\zeta : \ |\zeta - \mu| < \mu\}$, $\mu > \frac{1}{2\cos\gamma}$ с полюсом в точке $\zeta_0 = re^{-i\gamma}$, где $r \in (0, 2\mu\cos\gamma)$, пусть l – внутренняя нормаль к ∂D_μ. Тогда имеет место следующая формула :

$$\int_{\partial D_\mu} |\operatorname{Im}(\zeta e^{i\gamma})| \frac{\partial g_\mu(\zeta,\zeta_0)}{\partial l} |d\zeta| = 2\int_0^{2\mu\cos\gamma} g_\mu(te^{-i\gamma},\zeta_0)\, dt.$$

В случае $\gamma = 0$ Лемма 1 доказана в [3]. Общий случай доказывается аналогично.

Доказательство Теоремы 1 : Предположим, что утверждение Теоремы 1 неверно. Тогда степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n f_n z^n$ допускает аналитическое продолжение в спиральный угол $\mathbf{C}\setminus\overline{\Delta^{\alpha}_{2\sigma}}$, где $\sigma = \pi(1-\lambda)$. Следовательно, согласно необходимой части Теоремы 1.1 Н. У. Аракеляна (см. [7]), существует целая функция φ экспоненциального типа в правой полуплоскости и внутреннего экспоненциального типа σ такая, что

$$\varphi(ne^{-i\gamma}) = (-1)^n f_n, \quad n \in \mathcal{N}, \tag{7}$$

$$h_\varphi(\theta) \le \sigma|\sin(\theta+\gamma)|, \quad |\theta|, |\gamma| < \frac{\pi}{2}, \quad \tan\gamma = -\alpha,$$

где $h_\varphi(\theta)$ – индикатрисса функции φ. Из стандартных свойств функции φ следует, что в произвольном угле $\overline{\Delta}_{2\beta}$, $\beta \in (0,\pi/2)$, где $\Delta_\beta = \Delta^0_\beta$, имеем (см. [8], стр. 97)

$$\log|\varphi(\zeta)| \le \sigma|\operatorname{Im}(\zeta e^{i\gamma})| + \varepsilon_\beta(|\zeta|)|\zeta| + c, \tag{8}$$

где $\varepsilon_\beta(r) \downarrow 0$ при $r \uparrow \infty$, а $c \ge 0$ – некоторая постоянная. В правой полуплоскости $\operatorname{Re}\zeta \ge 0$ имеем

$$\log|\varphi(\zeta)| \le c(|\zeta|+1). \tag{9}$$

Для функции Грина g_μ имеем

$$g_\mu(\zeta,\zeta_0) = \log\left|\frac{\mu^2 - (\overline{\zeta}-\mu)(\zeta_0-\mu)}{\mu(\zeta-\zeta_0)}\right|. \tag{10}$$

Применим теперь формулу Пуассона–Иенсена к функции $\phi_k(\zeta) = \varphi(n_k\zeta)$ и кругу D_μ в точке $\zeta = \zeta_0 = e^{-i\gamma}$. С учетом (7) получим

$$\log|f_{n_k}| + \Sigma \le \frac{1}{2\pi}J, \tag{11}$$

где

$$\Sigma = \sum_{\tau} g_\mu(\tau, \zeta_0), \quad J = \int_{\partial D_\mu} \log|\phi_n(\zeta)| \frac{\partial g_\mu(\zeta,\zeta_0)}{\partial l} \, |d\zeta|,$$

сумма берется по всем нулям (с учетом кратности) функции $\phi_k(\zeta)$, лежащим на луче $\arg\zeta = -\gamma$, $|\zeta| > 1$ круга D_μ.

Оценим сперва интеграл J сверху. Запишем J в виде суммы интегралов J_1 и J_2 по кривым $l_1 = \partial D_\mu \cap (\mathbb{C} \setminus \Delta_{2\beta})$ и $l_2 = \partial D_\mu \cap \Delta_{2\beta}$, соответственно. Так как $|\zeta| \le 2\mu\cos\beta$ при $\zeta \in l_1$, то из (9) получим

$$J_1 \le c(2\mu n_k \cos\beta + 1). \tag{12}$$

Из (8) имеем

$$J_2 \le \frac{\sigma n_k}{2\pi} \int_{l_1} |\operatorname{Im}(\zeta e^{i\gamma})| \frac{\partial g_\mu(\zeta,\zeta_0)}{\partial l} \, |d\zeta| + 2\mu n_k \varepsilon_\beta(2\mu n_k \cos\beta) + c \le$$

$$\le \frac{\sigma n_k}{2\pi} J_0 + 2\mu n_k \varepsilon_\beta(2\mu n_k\cos\beta) + c, \tag{13}$$

где

$$J_0 = \int_{\partial D_\mu} |\operatorname{Im}(\zeta e^{i\gamma})| \frac{\partial g_\mu(\zeta,\zeta_0)}{\partial l} \, |d\zeta|. \tag{14}$$

Применяя Лемму 1 и формулу (10), простыми вычислениями найдем

$$J_0 = \frac{2(2\mu\cos\gamma - 1)(\mu\cos\gamma - 1)}{\mu^2 - 2\mu\cos\gamma + 1} \log(2\mu\cos\gamma - 1) +$$

$$+ \frac{2\mu|\sin\gamma|(2\mu\cos\gamma - 1)}{\mu^2 - 2\mu\cos\gamma + 1} \left[\arctan\frac{\mu - \cos\gamma}{|\sin\gamma|} - \arctan\frac{\mu\cos 2\gamma - \cos\gamma}{|\sin\gamma|(2\mu\cos\gamma - 1)} \right].$$

Учитывая (12) - (14), получим оценку

$$J \le \frac{\sigma n_k}{\pi} \left\{ \frac{(2\mu\cos\gamma - 1)(\mu\cos\gamma - 1)}{\mu^2 - 2\mu\cos\gamma + 1} \log(2\mu\cos\gamma - 1) + \frac{\mu|\sin\gamma|(2\mu\cos\gamma - 1)}{\mu^2 - 2\mu\cos\gamma + 1} \times \right.$$

$$\left. \times \left[\arctan\frac{\mu - \cos\gamma}{|\sin\gamma|} - \arctan\frac{\mu\cos 2\gamma - \cos\gamma}{|\sin\gamma|(2\mu\cos\gamma - 1)} \right] \right\} +$$

$$+ 2\mu n_k \varepsilon_\beta(2\mu n_k \cos\beta) + c(2\mu n_k \cos\beta + 2). \tag{15}$$

Теперь оценим снизу сумму Σ в левой части (11). Пусть $m(t)$ – количество нулей (с учетом их кратности) функции $\phi_k(\zeta)$ на отрезке $[e^{-i\gamma}, te^{-i\gamma}]$, где $t \in [1, 2\mu\cos\gamma]$. Можем записать сумму Σ интегралом Стилтьеса

$$\Sigma = \sum_{\tau} g_\mu(\tau, \zeta_0) = \int_1^{2\mu\cos\gamma} g_\mu(te^{-i\gamma}, \zeta_0)\, dm(t). \tag{16}$$

Используя формулу (10) нетрудно проверить, что функция

$$g_\mu(te^{-i\gamma},\zeta_0)-\frac{(2\mu\cos\gamma-1)(\mu\cos\gamma-1)}{\mu^2-2\mu\cos\gamma+1}\,\frac{1}{b}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{t+a}{b}\right)$$

убывает на промежутке $(1,2\mu\cos\gamma]$ и

$$g_\mu(te^{-i\gamma},\zeta_0)\ge\frac{(2\mu\cos\gamma-1)(\mu\cos\gamma-1)}{\mu^2-2\mu\cos\gamma+1}\,\frac{1}{b}\left(\arctan\frac{2\mu\cos\gamma+a}{b}-\arctan\frac{t+a}{b}\right).$$

Учитывая (16) получим

$$\Sigma\ge-\frac{(2\mu\cos\gamma-1)(\mu\cos\gamma-1)}{\mu^2-2\mu\cos\gamma+1}\,\frac{1}{b}\int_1^{2\mu\cos\gamma}\arctan\frac{t+a}{b}\,dm(t)+$$

$$+\frac{(2\mu\cos\gamma-1)(\mu\cos\gamma-1)}{\mu^2-2\mu\cos\gamma+1}\,\frac{1}{b}\arctan\frac{2\mu\cos\gamma+a}{b}m(2\mu\cos\gamma)=$$

$$=\frac{(2\mu\cos\gamma-1)(\mu\cos\gamma-1)}{\mu^2-2\mu\cos\gamma+1}\int_1^{2\mu\cos\gamma}\frac{m(t)\,dt}{(t+a)^2+b^2}. \qquad (17)$$

Согласно Лемме 3 из [3] имеем

$$m(t)\ge(t-1)n_k-w_k(t)-2. \qquad (18)$$

Поэтому из (17) следует оценка

$$\Sigma\ge\frac{(2\mu\cos\gamma-1)(\mu\cos\gamma-1)}{\mu^2-2\mu\cos\gamma+1}\int_1^{2\mu\cos\gamma}\frac{(t-1)n_k-w_k(t)-2}{(t+a)^2+b^2}\,dt=$$

$$=\frac{(2\mu\cos\gamma-1)(\mu\cos\gamma-1)}{\mu^2-2\mu\cos\gamma+1}\left[\frac{n_k}{2}\log\frac{(2\mu\cos\gamma+a)^2+b^2}{(1+a)^2+b^2}-\int_1^{2\mu\cos\gamma}\frac{w_k(t)\,dt}{(t+a)^2+b^2}-\right.$$

$$\left.-n_k\left(\frac{1+a}{b}+\frac{2}{bn_k}\right)\left(\arctan\frac{2\mu\cos\gamma+a}{b}-\arctan\frac{1+a}{b}\right)\right]. \qquad (19)$$

Умножая (11) на $(2n_k)^{-1}$ и используя (15) – (17) и (19), получим

$$\frac{1}{2n_k}\log|f_{n_k}|+\frac{(2\mu\cos\gamma-1)(\mu\cos\gamma-1)}{2(\mu^2-2\mu\cos\gamma+1)}\left[\frac{1}{2}\log\frac{(2\mu\cos\gamma+a)^2+b^2}{(1+a)^2+b^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{n_k}\int_1^{2\mu\cos\gamma}\frac{w_k(t)\,dt}{(t+a)^2+b^2}-\frac{1+a}{b}\left(\arctan\frac{2\mu\cos\gamma+a}{b}-\arctan\frac{1+a}{b}\right)\right]\le$$

$$\le(1-\lambda)\left\{\frac{(2\mu\cos\gamma-1)(\mu\cos\gamma-1)}{2(\mu^2-2\mu\cos\gamma+1)}\log(2\mu\cos\gamma-1)+\frac{\mu|\sin\gamma|(2\mu\cos\gamma-1)}{2(\mu^2-2\mu\cos\gamma+1)}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\arctan\frac{\mu-\cos\gamma}{|\sin\gamma|}-\arctan\frac{\mu\cos2\gamma-\cos\gamma}{|\sin\gamma|(2\mu\cos\gamma-1)}\right]\right\}+c\mu\cos\beta+o(1),$$

при $n_k\to\infty$. Перейдя в обеих частях к нижнему пределу при $n_k\to\infty$, а затем устремляя β к $\pi/2$, используя (3) получим

$$\lambda\left\{\log(2\mu\cos\gamma-1)+\frac{\mu|\sin\gamma|}{\mu\cos\gamma-1}\left[\arctan\frac{\mu-\cos\gamma}{|\sin\gamma|}-\right.\right.$$

$$- \arctan \frac{\mu\cos 2\gamma - \cos\gamma}{|\sin\gamma|(2\mu\cos\gamma - 1)}\Bigg] - W(\mu,\gamma)\Bigg\} \le \frac{\mu^2 - 2\mu\cos\gamma + 1}{(2\mu\cos\gamma - 1)(\mu\cos\gamma - 1)} \log\frac{1}{\rho} +$$

$$+ \frac{1}{2}\log\frac{(2\mu\cos\gamma - 1)^2[(1+a)^2 + b^2]}{(2\mu\cos\gamma + a)^2 + b^2} - \frac{\mu|\sin\gamma|}{\mu\cos\gamma - 1}\times$$

$$\times\left[\arctan\frac{\mu - \cos\gamma}{|\sin\gamma|} - \arctan\frac{\mu\cos 2\gamma - \cos\gamma}{|\sin\gamma|(2\mu\cos\gamma - 1)}\right] +$$

$$+ \frac{1+a}{b}\left(\arctan\frac{2\mu\cos\gamma + a}{b} - \arctan\frac{1+a}{b}\right),$$

или

$$\lambda\left[\log(2\mu\cos\gamma) + |\tan\gamma|\left(\frac{\pi}{2} - \arctan|\cot 2\gamma|\right) - W(\mu,\gamma)\right] \le \frac{1}{2\cos^2\gamma}\log\frac{1}{\rho} +$$

$$+ \log(2\cos\gamma) + |\tan\gamma|\left(\frac{\pi}{2} - \arctan|\cot 2\gamma|\right) + |\cot\gamma|\left(\frac{\pi}{2} - \arctan|\cot\gamma|\right) + o(1)$$

при $\mu \to \infty$. Если перейти к верхнему пределу в обоих частях при $\mu \to \infty$, то получим противоречие с (4). Теорема 1 доказана.

Замечание. Из условия $|\gamma| < \pi/4$ следует, что $a > 0$ для $\mu > \mu_0 = \cos\gamma/\cos 2\gamma$. Поэтому интегрируя по частям получим

$$W(\mu,\gamma) \le \liminf_{\substack{n_k \to \infty \\ n_k \in Q}} \int_1^{2\mu\cos\gamma} \frac{w_k(t)}{n_k t^2}\,dt \le W^*(\mu,\gamma), \quad \mu > \mu_0. \tag{20}$$

В самом деле, при ограничении $|\gamma| < \pi/4$ Теорема 1 справедлива с заменой величины $W(\mu,\gamma)$ на $W^*(\mu,\gamma)$.

Доказательство Теоремы 2 : Предположим, что утверждение Теоремы 2 неверно. Рассуждая как и при доказательстве Теоремы 1, получим уравнение (11) и оценку (15) для интеграла J. Для того, чтобы оценить снизу сумму в левой части (11) будем действовать несколько иначе. Из формулы (10) легко следует, что в случае $|\gamma| < \pi/6$ функция $g_\mu(te^{-i\gamma},\zeta_0) - \dfrac{2(\mu\cos\gamma - 1)^2}{t(\mu^2 - 2\mu\cos\gamma + 1)}$ убывает на промежутке $t \in (1, 2\mu\cos\gamma]$ для достаточно больших μ. Следовательно

$$g_\mu(te^{-i\gamma},\zeta_0) \ge \frac{2(\mu\cos\gamma - 1)^2}{\mu^2 - 2\mu\cos\gamma + 1}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2\mu\cos\gamma}\right), \quad t \in (1, 2\mu\cos\gamma].$$

Учитывая (16) получим $\Sigma \ge \dfrac{2(\mu\cos\gamma - 1)^2}{\mu^2 - 2\mu\cos\gamma + 1}\displaystyle\int_1^{2\mu\cos\gamma}\frac{m(t)}{t^2}\,dt$. Отсюда и из (18) следует

$$\Sigma \ge \frac{2(\mu\cos\gamma - 1)^2}{\mu^2 - 2\mu\cos\gamma + 1}\left[n_k\log(2\mu\cos\gamma) - \int_1^{2\mu\cos\gamma}\frac{w_k(t)}{t^2}\,dt - \right.$$

$$-(n_k+2)\left(1-\frac{1}{2\mu\cos\gamma}\right)\Bigg].$$

Умножая (11) на $(2n_k)^{-1}$ и учитывая (17), получим

$$\frac{1}{2n_k}\log|f_{n_k}|+\frac{(\mu\cos\gamma-1)^2}{\mu^2-2\mu\cos\gamma+1}\left[\log(2\mu\cos\gamma)-\frac{1}{n_k}\int_1^{2\mu\cos\gamma}\frac{w_k(t)}{t^2}\,dt-\right.$$

$$\left.-\left(1+\frac{2}{n_k}\right)\left(1-\frac{1}{2\mu\cos\gamma}\right)\right]\le(1-\lambda)\left\{\frac{(2\mu\cos\gamma-1)(\mu\cos\gamma-1)}{2(\mu^2-2\mu\cos\gamma+1)}\times\right.$$

$$\times\log(2\mu\cos\gamma-1)+\frac{\mu|\sin\gamma|(2\mu\cos\gamma-1)}{2(\mu^2-2\mu\cos\gamma+1)}\times\left[\arctan\frac{\mu-\cos\gamma}{|\sin\gamma|}-\right.$$

$$\left.\left.-\arctan\frac{\mu\cos2\gamma-\cos\gamma}{|\sin\gamma|(2\mu\cos\gamma-1)}\right]\right\}+c\mu\cos\beta+o(1)\quad\text{при}\quad n_k\to\infty.$$

Перейдем в обеих частях к нижнему пределу при $n_k\to\infty$, а затем устремим β к $\pi/2$. С учетом (3) и (20) получим

$$\lambda\left\{\log(2\mu\cos\gamma)+|\tan\gamma|\left(\frac{\pi}{2}-\arctan|\cot2\gamma|\right)-\frac{2(\mu\cos\gamma-1)}{2\mu\cos\gamma-1}W^*(\mu,\gamma)\right\}\le$$

$$\le\frac{1}{2\cos^2\gamma}\log\frac{1}{\rho}+\frac{2(\mu\cos\gamma-1)}{2\mu\cos\gamma-1}+|\tan\gamma|\left(\frac{\pi}{2}-\arctan|\cot2\gamma|\right)+o(1),\quad\text{при }\mu\to\infty.$$

Переходя в обеих частях к верхнему пределу при $\mu\to\infty$, получим противоречие с (6). Теорема 2 доказана.

В заключение автор выражает благодарность профессору В. А. Мартиросяну за постановку задачи и поддержку.

ABSTRACT. The paper considers singularities of power series beyond the circle of convergence. Sufficient conditions on the lacunae of coefficients are found, that guarantee the existence of singular points in a given logarithmic angular domain.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Bieberbach. Analytische Fortsetzung, Springer. Berlin, 1955.
2. Н. У. Аракелян, В. А. Мартиросян, Степенные Ряды : Аналитическое Продолжение и Локализация Особенностей, Изд. ЕГУ, 1991.
3. Н. У. Аракелян, В. А. Мартиросян, "Локализация особенностей степенных рядов на границе круга сходимости", Изв. АН Арм. ССР, Математика, том 22, № 1, стр. 3 – 21, 1987.
4. Н. У. Аракелян, В. А. Мартиросян, "Локализация особенностей степенных рядов на границе круга сходимости II", Изв. АН Арм. ССР, Математика, том 23, № 3, стр. 123 – 137, 1988.
5. E. Fabry, "Sur les points singuliers d'une serie de Taylor", Jour. de Math. pures et appl.(5), vol. 4, pp. 317 – 358, 1898.
6. А. В. Явряи. "О распределении радиальных особенностей степенного ряда", том 32, № 5, стр. 62 – 75, 1997.
7. Н. У. Аракелян, "Об эффективном аналитическом продолжении степенных рядов", Мат. сборник, том 124, № 1, стр. 24 - 44. 1984.
8. Б. Я. Левин, Распределение Корней Целых Функций, М., Гостехиздат, 1956.

3 апреля 1999 Ереванский государственный университет