ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

А. О. Бабаян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 5, 1999

В статье изучается однозначная разрешимость задачи Дирихле для некоторого класса правильно эллиптических уравнений четвертого порядка. Найдены как необходимые и достаточные условия, так и достаточные условия, при которых соответствуюшая задача однозначно разрешима.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$ – единичный круг комплексной плоскости с границей $\Gamma = \{z : |z| = 1\}$. В области D рассмотрим эллиптическое дифференциальное уравнение

$$\sum_{k=0}^{4} A_k \frac{\partial^4 U}{\partial x^k \partial y^{4-k}} = 0, \quad (x, y) \in D, \tag{1.1}$$

где A_k – произвольные постоянные, $A_0 \neq 0$. Мы ищем решение U в классе четырежды непрерывно дифференцируемых функций в D, которые вместе с первыми производными удовлетворяет условию Гелдера в $D \cup \Gamma$. На границе Γ функция $U(x, y)$ удовлетворяет граничным условиям Дирихле

$$\begin{aligned} U\big|_\Gamma &= f(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \\ \frac{\partial U}{\partial r}\bigg|_\Gamma &= g(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где f и g – некоторые функции, определенные на Γ, которые вместе с $\dfrac{df}{ds}$ удовлетворяют условию Гельдера на Γ, а $\dfrac{\partial}{\partial r}$ и $\dfrac{d}{ds}$ – производные по радиусу и по длине дуги Γ соответственно. Предположим, что уравнение (1.1) правильно эллиптическое, т.е. корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ характеристического уравнения

$$A_0\lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda + A_4 = 0 \tag{1.3}$$

удовлетворяют условиям

$$\operatorname{Im}\lambda_1 > 0, \quad \operatorname{Im}\lambda_2 > 0, \quad \operatorname{Im}\lambda_3 < 0, \quad \operatorname{Im}\lambda_4 < 0. \tag{1.4}$$

Задача (1.1), (1.2) – фредгольмова, см. [1]. В настоящей статье мы получаем необходимые и достаточные условия, при которых задача (1.1), (1.2) однозначно разрешима. Наш основной результат относится к случаю $\lambda_1 = i$. Случай $\lambda_1 \neq i$ коротко обсуждается в §5.

§2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Перепишем уравнение (1.1) и граничное условие (1.2) в комплексной форме, полагая

$$x = \frac{z+\bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z-\bar{z}}{2i}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Уравнение (1.1) преобразуется следующим образом :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \mu_2\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} - \mu_3\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} - \mu_4\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)U = 0, \tag{2.1}$$

где

$$\mu_2 = -\frac{\lambda_2 - i}{\lambda_2 + i}, \quad \mu_3 = -\frac{\lambda_3 + i}{\lambda_3 - i}, \quad \mu_4 = -\frac{\lambda_4 + i}{\lambda_4 - i}.$$

Отметим, что из условий (1.4) следуют неравенства $|\mu_k| < 1$, $k = 2,3,4$. Из граничных условий (1.2) получим

$$\left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_\Gamma = F_1(x,y) \equiv \frac{x - iy}{2}\left(g(x,y) - i\frac{df}{ds}(x,y)\right), \quad (x,y) \in \Gamma, \tag{2.2}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \bar{z}}\right|_\Gamma = F_2(x,y) \equiv \frac{x + iy}{2}\left(g(x,y) + i\frac{df}{ds}(x,y)\right), \quad (x,y) \in \Gamma, \tag{2.3}$$

$$U(1,0) = f(1,0). \tag{2.4}$$

В следующей теореме положим $\delta = \mu_2\mu_3$ и $\gamma = \mu_2\mu_4$.

Теорема 1. Задача (1.1), (1.2) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда выполнены следующие три условия :

I) $\mu_2 = 0$,

II) $\mu_2 \neq 0$, $\mu_3 = \mu_4$ и

$$a_k = 1 + (k-1)\delta^k - k\delta^{k-1} \neq 0, \quad k = 3,4,..., \tag{2.5}$$

III) $\mu_2 \neq 0$, $\mu_3 \neq \mu_4$ и

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} 1 & \delta^k & \gamma^k \\ 1 & \delta & \gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad k = 3,4,... \tag{2.6}$$

Замечание 1. Из условия $|\mu_k| < 1$ следует $|\delta| < 1$ и $|\gamma| < 1$. Следовательно, при любых δ и γ условия (2.5) и (2.6) выполняются при достаточно больших k.

Следствие 1. Если выполняется одно из условий

1. $\mu_3 = 0$,
2. $|\mu_2| < 1/2$,
3. $\mu_3 = \mu_4$ и $|\mu_3| < 1/2$,
4. $\mu_3 = \mu_4$ и $\mu_2\mu_3 > 0$,
5. $\mu_3 \neq \mu_4$, $\mu_2\mu_4 > 0$ и $\mu_2\mu_3 > 0$,

то задача (1.1), (1.2) однозначно разрешима. Если $\mu_3 \neq 0$ или $|\mu_2| > 1/2$, то существуют триады μ_2, μ_3, μ_4, при которых задача (1.1), (1.2) не является однозначно разрешимой.

Следствие 2. Пусть при $\mu_k = \mu_k^0$, $k = 2, 3, 4$ задача (1.1), (1.2) не является однозначно разрешимой. Тогда в любой окрестности точки $(\mu_2^0, \mu_3^0, \mu_4^0) \in \mathbf{C}^3$ существует точка $(\mu_2^*, \mu_3^*, \mu_4^*)$ такая, что при $\mu_k = \mu_k^*$, $k = 2, 3, 4$ задача (1.1), (1.2) однозначно разрешима.

При доказательстве перечисленных утверждений используются представления аналитических функций в окрестности единичной окружности. Пусть μ и ν – комплексные числа такие, что $|\mu| < 1$ и $|\nu| < 1$. Обозначим через D_1 и D_2 образы единичного круга D при отображениях $\zeta = z + \mu\bar{z}$ и $\zeta = \bar{z} + \nu z$ соответственно. Пусть функции $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ аналитичны и непрерывны до границ в D_1 и D_2 соответственно. Известно (см. [1]), что при $|z| = 1$ функции $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ допускают представления

$$\varphi(z + \mu\bar{z}) = \omega(z) + \omega(\mu\bar{z}), \quad \psi(\bar{z} + \nu z) = \rho(\bar{z}) + \rho(\nu z), \quad |z| = 1, \tag{2.7}$$

где $\omega(z)$ и $\rho(z)$ – аналитические функции в единичном круге. В области D при $|z| \leq 1$ имеем

$$\varphi(z + \mu\bar{z}) = \omega(1/2(z + \mu\bar{z} + \sqrt{(z + \mu\bar{z})^2 - 4\mu})) + \omega(1/2(z + \mu\bar{z} - \sqrt{(z + \mu\bar{z})^2 - 4\mu})),$$

$$\psi(\bar{z} + \nu z) = \rho(1/2(\bar{z} + \nu z + \sqrt{(\bar{z} + \nu z)^2 - 4\nu})) + \rho(1/2(\bar{z} + \nu z - \sqrt{(\bar{z} + \nu z)^2 - 4\nu})).$$

Здесь выбрана ветвь функции $\sqrt{\zeta^2 - 4\mu}$, непрерывная вне отрезка $[-2\sqrt{\mu}, 2\sqrt{\mu}]$ и удовлетворяющая условию $\frac{1}{\zeta}\sqrt{\zeta^2 - 4\mu} \to 1$ при $|\zeta| \to \infty$. Если функции $\varphi'(\zeta)$ и $\psi'(\zeta)$ непрерывны до границы областей D_1 и D_2 соответственно, то

$$\varphi'(z + \mu\bar{z}) = X(z) + X(\mu\bar{z}), \quad \psi'(\bar{z} + \nu z) = Z(\bar{z}) + Z(\nu z), \quad |z| = 1, \tag{2.8}$$

где $X(z)$ и $Z(z)$ – аналитические функции в D.

Лемма 1. Пусть функции φ и ψ аналитичны и непрерывны вместе с производными первого порядка в замыкании областей D_1 и D_2 соответственно. Если они удовлетворяют условиям (2.7) и (2.8), то в единичном круге D имеем

$$\omega'(z) = \left(1 - \frac{\mu}{z^2}\right) X(z) + X(0) + \frac{\mu}{z^2} X(0) + \frac{\mu}{z} X'(0), \quad |z| < 1, \tag{2.9}$$

$$\rho'(z) = \left(1 - \frac{\mu}{z^2}\right) Z(z) + Z(0) + \frac{\mu}{z^2} Z(0) + \frac{\mu}{z} Z'(0), \quad |z| < 1. \tag{2.10}$$

Доказательство : Докажем (2.9). Для функции φ соотношения (2.7) и (2.8) можно представить в виде

$$\varphi\left(z + \frac{\mu}{z}\right) = \omega(z) + \omega\left(\frac{\mu}{z}\right), \quad \varphi'\left(z + \frac{\mu}{z}\right) = X(z) + X\left(\frac{\mu}{z}\right), \quad |z| = 1. \tag{2.11}$$

Так как $z + \frac{\mu}{z} \in D_1$ при $\sqrt{|\mu|} < |z| < 1$, равенства (2.11) выполняются также в кольце $\sqrt{|\mu|} < |z| < 1$. Следовательно, дифференцируя первое равенство в (2.11) по z, получим

$$\left(1 - \frac{\mu}{z^2}\right) \varphi'\left(z + \frac{\mu}{z}\right) = \omega'(z) - \frac{\mu}{z^2} \omega'\left(\frac{\mu}{z}\right), \quad \sqrt{|\mu|} < |z| < 1.$$

Подставляя φ' из второго равенства в (2.11) в последнее соотношение, получим

$$\left(1 - \frac{\mu}{z^2}\right) X_1(z) + \frac{\mu}{z} X'(0) + \left(1 - \frac{\mu}{z^2}\right) X_1\left(\frac{\mu}{z}\right) - \frac{\mu}{z} X'(0) = \omega_1(z) - \frac{\mu}{z^2} \omega_1\left(\frac{\mu}{z}\right), \tag{2.12}$$

где $X_1(z) = X(z) - X(0)$, $\omega_1(z) = \omega'(z) - 2X(0)$.

Приравнивая слагаемые в (2.12), аналитические при $|z| < 1$ и при $|z| > 1$, получим

$$\omega_1(z) = \left(1 - \frac{\mu}{z^2}\right) X_1(z) + \frac{\mu}{z} X'(0).$$

Переходя к функциям $\omega'(z)$ и $X(z)$, завершаем доказательство (2.9). Аналогично доказывается равенство (2.10). Лемма 1 доказана.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

I. Сначала предположим, что $\mu_2 = 0$ и $\mu_3 \neq \mu_4$. Общее решение уравнения (2.1) можно представить в виде

$$U = \Psi_1(z) + \overline{z}\Psi_2(z) + \Psi_3(\overline{z} + \mu_3 z) + \Psi_4(\overline{z} + \mu_4 z), \tag{3.1}$$

где $\Psi_1(z)$ и $\Psi_2(z)$ – аналитические функции в области D, а функции $\Psi_3(z)$ и $\Psi_4(z)$ аналитичны в образах области D при отображениях $\zeta = \overline{z} + \mu_3 z$ и $\zeta = \overline{z} + \mu_4 z$, соответственно. Подставляя (3.1) в граничные условия (2.2) и (2.3), получим

$$\Psi_1'(z) + \overline{z}\Psi_2'(z) + \mu_3 \Psi_3'(\overline{z} + \mu_3 z) + \mu_4 \Psi_4'(\overline{z} + \mu_4 z) = F_1(x, y), \tag{3.2}$$

$$\Psi_2(z) + \Psi_3'(\overline{z} + \mu_3 z) + \Psi_4'(\overline{z} + \mu_4 z) = F_2(x, y), \quad z = x + iy, \quad |z| = 1. \tag{3.3}$$

Представим функции Ψ_3' и Ψ_4' в виде

$$\Psi_3'(\overline{z} + \mu_3 z) = \omega_3(\overline{z}) + \omega_3(\mu_3 z), \quad \Psi_4'(\overline{z} + \mu_4 z) = \omega_4(\overline{z}) + \omega_4(\mu_4 z), \quad |z| = 1, \tag{3.4}$$

где $\omega_3(z)$ и $\omega_4(z)$ суть аналитические функции в D. Так как функции F_1 и F_2 удовлетворяют условию Гельдера на Γ, то они разлагаются в равномерно сходящийся ряд Фурье [2]. Таким образом, при $|z| = 1$

$$F_1(x, y) = G_1(z) + G_2(\overline{z}), \quad F_2(x, y) = H_1(z) + H_2(\overline{z}), \tag{3.5}$$

где функции

$$G_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad G_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} z^k, \quad H_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k, \quad H_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} d_{-k} z^k$$

аналитичны в D и удовлетворяют условиям

$$G_2(0) = c_0 = H_2(0) = d_0 = 0, \quad G_2'(0) = c_{-1} = d_1 = H_1'(0). \tag{3.6}$$

Подставляя (3.4) и (3.5) в (3.2) и (3.3), получим

$$\Psi_1'(z) + \frac{1}{z}\Psi_2'(z) + \mu_3\omega_3(1/z) + \mu_3\omega_3(\mu_3 z) + \mu_4\omega_4(1/z) + \mu_4\omega_4(\mu_4 z) = G_1(z) + G_2(1/z),$$

$$\Psi_2(z) + \omega_3(1/z) + \omega_3(\mu_3 z) + \omega_4(1/z) + \omega_4(\mu_4 z) = H_1(z) + H_2(1/z), \quad |z| = 1.$$

Выделяя слагаемые, допускающие аналитическое продолжение в D и вне единичного круга и используя теорему Лиувилля, получим

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{z}\Psi_2'(0) + \mu_3\omega_3(1/z) + \mu_4\omega_4(1/z) = G_2(1/z) + c_1, \quad |z| > 1, \\
&\omega_3(1/z) + \omega_4(1/z) = H_2(1/z) + c_2, \quad |z| > 1, \\
&\Psi_1'(z) + \frac{1}{z}(\Psi_2'(z) - \Psi_2'(0)) + \mu_3\omega_3(\mu_3 z) + \mu_4\omega_4(\mu_4 z) = G_1(z) - c_1, \quad |z| < 1, \\
&\Psi_2(z) + \omega_3(\mu_3 z) + \omega_4(\mu_4 z) = H_1(z) - c_2, \quad |z| < 1,
\end{aligned} \tag{3.7}$$

где постоянные c_1 и c_2 будут определены ниже. С учетом (3.6) и (3.7) решение задачи (1.1), (2.2), (2.3) находится с точностью до постоянного, а затем определяется из (2.4) единственным образом. Таким образом, при предположении $\mu_2 = 0$, $\mu_3 \neq \mu_4$ задача (1.1), (1.2) однозначно разрешима.

Если $\mu_2 = 0$ и $\mu_3 = \mu_4$, то общее решение задачи (1.1) можно представить в виде

$$U = \Psi_1(z) + \overline{z}\Psi_2(z) + \Psi_3(\overline{z} + \mu_3 z) + z\Psi_4(\overline{z} + \mu_3 z),$$

и однозначная разрешимость следует из аналогичных рассуждений.

II. Теперь предположим, что $\mu_2 \neq 0$ и $\mu_3 = \mu_4$. В этом случае общее решение задачи (1.1) можно представить в виде

$$U = \Psi_1(z) + \Psi_2(z + \mu_2\overline{z}) + \Psi_3(\overline{z} + \mu_3 z) + z\Psi_4(\overline{z} + \mu_3 z), \tag{3.8}$$

где $\Psi_1(z)$ аналитична в D, $\Psi_2(z)$ аналитична в D_1, а $\Psi_3(z)$ и $\Psi_4(z)$ аналитичны в D_2 (D_1 и D_2 – образы области D при отображениях $\zeta = z + \mu_2\overline{z}$ и $\zeta = \overline{z} + \mu_3 z$ соответственно). Не умаляя общности, предположим, что $\Psi_4(0) = 0$. Подставляя (3.8) в (2.2) и (2.3), получим систему

$$\begin{cases} \Psi_1'(z) + \Psi_2'(z + \mu_2\overline{z}) + \mu_3\Psi_3'(\overline{z} + \mu_3 z) + \\ + z\mu_4\Psi_4'(\overline{z} + \mu_3 z) + \Psi_4(\overline{z} + \mu_3 z) = F_1(x, y), \\ \mu_2\Psi_2'(z + \mu_2\overline{z}) + \Psi_3'(\overline{z} + \mu_3 z) + z\Psi_4'(\overline{z} + \mu_3 z) = F_2(x, y), \quad z = x + iy, \quad |z| = 1. \end{cases} \tag{3.9}$$

Представим функции Ψ_2', Ψ_3', Ψ_4 и Ψ_4' на Γ с помощью аналитических функций $\omega_k(z)$, $k = 2, 3, 4, 5$:

$$\begin{aligned} &\Psi_2'(z + \mu_2\overline{z}) = \omega_2(z) + \omega_2(\mu_2\overline{z}), \quad \Psi_3'(\overline{z} + \mu_3 z) = \omega_3(\overline{z}) + \omega_3(\mu_3 z), \\ &\Psi_4'(\overline{z} + \mu_3 z) = \omega_4(\overline{z}) + \omega_4(\mu_3 z), \quad \Psi_4(\overline{z} + \mu_3 z) = \omega_5(\overline{z}) + \omega_5(\mu_3 z). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Из равенства (2.10) следует

$$\omega_5'(z) = \left(1 - \frac{\mu_3}{z^2}\right)\omega_4(z) + \omega_4(0) + \frac{\mu_3}{z^2}\omega_4(0) + \frac{\mu_3}{z^2}\omega_4'(0), \quad |z| < 1. \tag{3.11}$$

Из условия $\Psi_4(0) = 0$ следует, что $\omega_5(0) = 0$. Подставляя (3.5) и (3.10) в (3.9), получим

$$\Psi_1'(z) + \omega_2(z) + \omega_2(\mu_2/z) + \mu_3\omega_3(1/z) + \mu_3\omega_3(\mu_3 z) +$$

$$+ z\mu_3\omega_4(1/z) + z\mu_3\omega_4(\mu_3 z) + \omega_5(1/z) + \omega_5(\mu_3 z) = G_1(z) + G_2(1/z), \quad |z| = 1,$$

$$\mu_3\omega_2(z) + \mu_2\omega_2(\mu_2/z) + \omega_3(1/z) + \omega_3(\mu_3 z) + z\omega_4(1/z) + z\omega_4(\mu_3 z) = H_1(z) + H_2(1/z).$$

Выделяя слагаемые, допускающие аналитическое продолжение как в область D, так и вне ее и используя теорему Лиувилля, получим

$$\Psi_1'(z) + \omega_2(z) + \mu_3\omega_3(\mu_3 z) + z\mu_3\omega_4(0) + z\mu_3\omega_4(\mu_3 z) + \omega_5(\mu_3 z) = G_1(z), \tag{3.12}$$

$$\begin{cases} \omega_2(\mu_2/z) + \mu_3\omega_3(1/z) + z\mu_3[\omega_4(1/z) - \omega_4(0)] + \omega_5(1/z) = G_2(1/z), \\ \mu_2\omega_2(\mu_2/z) + \omega_3(1/z) + z[\omega_4(1/z) - \omega_4(0)] = H_2(1/z), \\ \mu_2\omega_2(z) + \omega_3(\mu_3 z) + z\omega_4(0) + z\omega_4(\mu_3 z) = H_1(z). \end{cases} \tag{3.13}$$

Для того, чтобы решить систему (3.13), разложим аналитические функции $\omega_k(z)$, $k = 2, 3, 4, 5$ в ряды по степеням z. Из (3.11) и $\omega_5(0) = 0$ получим

$$\omega_i(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{i,k} z^k, \quad i = 2, 3, 4,$$

$$\omega_5(z) = (2A_{4,0} - \mu_3 A_{4,2})z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}(A_{4,k-1} - \mu_3 A_{4,k+1})z^k. \tag{3.14}$$

Подставляя (3.5) и (3.14) в (3.13), приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях z и используя (3.6), получим

$$A_{2,0} + \mu_3 A_{3,0} + \mu_3 A_{4,1} = 0, \quad \mu_2 A_{2,0} + A_{3,0} + A_{4,1} = 0, \quad \mu_2 A_{2,0} + A_{3,0} = c_1, \tag{3.15}$$

$$\mu_2 A_{2,1} + \mu_3 A_{3,1} + 2A_{4,0} = d_1, \quad \mu_2^2 A_{2,1} + A_{3,1} + A_{4,2} = d_{-1}, \tag{3.16}$$

$$\begin{cases} \mu_2^k A_{2,k} + \mu_3 A_{3,k} + \mu_3 A_{4,k+1} + \frac{1}{k}(A_{4,k-1} - \mu_3 A_{4,k+1}) = c_{-k}, \\ \mu_2^{k+1} A_{2,k} + A_{3,k} + A_{4,k+1} = d_{-k}, \\ \mu_3 A_{2,k} + \mu_3^k A_{3,k} + \mu_3^{k-1} A_{4,k-1} = d_k, \end{cases} \quad k \geq 2. \tag{3.17}$$

Коэффициенты $A_{2,0}$, $A_{3,0}$ и $A_{4,1}$ можно однозначно определить из (3.15). Решая систему (3.17), получим

$$\frac{a_k}{k(1-\delta^k)}(A_{4,k-1} - \mu_3 A_{4,k+1}) = c_{-k} - d_{-k}\frac{\mu_3(1-\delta^{k-1})}{1-\delta^k} - d_k \frac{\mu_2^{k-1}(1-\delta)}{1-\delta^k}, \tag{3.18}$$

где a_k определяются из (2.5). Если $a_k \neq 0$ при $k \geq 2$, то коэффициенты $A_{4,k-1} - \mu_3 A_{4,k+1}$ определяются однозначно из (3.18).

Рассмотрим однородную задачу (3.15) – (3.17). При выполнении условий (2.5) из (3.18) получим

$$A_{4,k-1} - \mu_3 A_{4,k+1} = 0, \quad k \geq 2. \tag{3.19}$$

Отсюда и из (3.15) следует, что $A_{4,2k+1} = 0$ при $k \geq 0$. Если $A_{4,2} = c \neq 0$, то из (3.19) получим $A_{4,2k} = c\mu_3^{-k}$ при $k \geq 1$. Это невозможно, так как ряд $\omega_4(z)$ сходится при $|z| < 1$. Таким образом, $A_{4,2k} = 0$ при $k \geq 1$, и следовательно из (3.17) имеем $A_{2,k} = A_{3,k} = 0$ при $k \geq 2$. Решая однородные уравнения (3.15) – (3.17), получаем

$$A_{2,0} = A_{3,0} = A_{4,1} = 0, \quad A_{2,k} = A_{3,k} = A_{4,k} = 0, \quad k = 2, 3, \ldots,$$

$$A_{4,0} = c, \quad A_{3,1} = \frac{2c\mu_2}{1-\delta}, \quad A_{2,1} = -\frac{2c}{\mu_2(1-\delta)}.$$

Используя полученные значения $A_{i,k}$ и однородное условие (2.4), в силу (3.12) и (3.14) заключаем, что при $a_k \neq 0$, $k = 3, 4, \ldots$ однородная задача (1.1), (1.2) (при $f \equiv g \equiv 0$) не имеет нетривиальных решений. Следовательно, неоднородная задача (1.1), (1.2) однозначно разрешима.

Предположим теперь, что $a_k = 0$ при $k = k_1, \ldots, k_s$. Тогда однородная задача (1.1), (1.2) имеет s линейно независимых решений $U_{k_1}, \ldots, U_{k_s}$, каждое из которых является многочленом степени $k_j + 1$, $j = 1, \ldots, s$, и однозначная разрешимость неоднородной задачи (1.1), (1.2) не имеет места.

Замечание 2. Заметим, что из (3.18) следуют необходимые условия для разрешимости неоднородной задачи (1.1), (1.2) :

$$c_{-k} - d_{-k}\frac{\mu_3(1-\delta^{k-1})}{1-\delta^k} - d_k\frac{\mu_2^{k-1}(1-\delta)}{1-\delta^k} = 0, \quad k = k_1, \ldots, k_s.$$

Эти условия линейно независимы и являются также достаточными для разрешимости задачи (1.1), (1.2) (в этом случае однородная задача (1.1), (1.2) имеет точно s линейно независимых решений).

III. Теперь рассмотрим случай, когда $\mu_2 \neq 0$ и $\mu_3 \neq \mu_4$. Общее решение уравнения (1.1) можно представить в виде

$$U = \Psi_1(z) + \Psi_2(z+\mu_2\bar{z}) + \Psi_3(\bar{z}+\mu_3 z) + \Psi_4(\bar{z}+\mu_4 z),$$

где $\Psi_k(z)$, $k = 1, 2, 3, 4$ аналитичны в соответствующих областях. Граничные условия (2.2) и (2.3) примут вид

$$\begin{gathered}\Psi_1'(z) + \Psi_2'(z+\mu_2\bar{z}) + \mu_3\Psi_3'(\bar{z}+\mu_3 z) + \mu_4\Psi_4'(\bar{z}+\mu_4 z) = F_1(x,y),\\ \mu_2\Psi_2'(z+\mu_2\bar{z}) + \Psi_3'(\bar{z}+\mu_3 z) + \Psi_4'(\bar{z}+\mu_4 z) = F_2(x,y), \quad z = x+iy, \quad |z| = 1.\end{gathered} \tag{3.20}$$

При $z \in \Gamma$ функции Ψ_k', $k = 2, 3, 4$ допускают представление

$$\begin{gathered}\Psi_2'(z+\mu_2\bar{z}) = \omega_2(z) + \omega_2(\mu_2\bar{z}), \quad \Psi_3'(\bar{z}+\mu_3 z) = \omega_3(\bar{z}) + \omega_3(\mu_3 z),\\ \Psi_4'(\bar{z}+\mu_4 z) = \omega_4(\bar{z}) + \omega_4(\mu_4 z),\end{gathered} \tag{3.21}$$

где $\omega_k(z)$ и $\Psi_1'(z)$ аналитичны в D с разложениями Тейлора

$$\Psi_1'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{1,k} z^k, \quad \omega_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{j,k} z^k, \quad j = 2, 3, 4. \tag{3.22}$$

Здесь $A_{j,k}$ – комплексные постоянные, подлежащие определению. Подставляя (3.21) и (3.22) в (3.20) и приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях z и $\bar{z}$, получим следующую линейную систему относительно $A_{j,k}$:

$$\begin{cases} A_{1,0} + 2A_{2,0} + 2\mu_3 A_{3,0} + 2\mu_4 A_{4,0} = c_0,\\ 2\mu_2 A_{2,0} + 2A_{3,0} + 2A_{4,0} = d_0,\end{cases} \tag{3.23}$$

$$A_{1,k} = c_k - A_{2,k} - \mu_3^{k+1} A_{3,k} - \mu_4^{k+1} A_{4,k}, \quad k \geq 1, \tag{3.24}$$

$$\begin{cases} \mu_2 A_{2,k} + \mu_3^k A_{3,k} + \mu_4^k A_{4,k} = d_k, \\ \mu_2^k A_{2,k} + \mu_3 A_{3,k} + \mu_4 A_{4,k} = c_{-k}, \quad k \geq 1. \\ \mu_2^{k+1} A_{2,k} + A_{3,k} + A_{4,k} = d_{-k}, \end{cases} \tag{3.25}$$

Отметим, что по (3.6) первые два уравнения в (3.25) совпадают при $k = 1$. Следовательно, эта система, так же как и система (3.23) всегда разрешима. Эти системы однозначно неразрешимы, однако их решения дают только нетривиальное решение задачи (1.1), (1.2). Следовательно, для определения условий однозначной разрешимости задачи (1.1), (1.2), достаточно рассмотреть (3.25) при $k \geq 2$. Детерминант этой системы равен Δ_k, $k = 2, 3, ...$

$$\begin{vmatrix} \mu_2 & \mu_3^k & \mu_4^k \\ \mu_2^k & \mu_3 & \mu_4 \\ \mu_2^{k+1} & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & (\mu_2\mu_3)^k & (\mu_2\mu_4)^k \\ 1 & \mu_2\mu_3 & \mu_2\mu_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \delta^k & \gamma^k \\ 1 & \delta & \gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \Delta_k.$$

Как детерминант Вандермонда, $\Delta_2 \neq 0$. Следовательно, при выполнении (2.6), для произвольных c_k, d_k можно однозначно определить $A_{j,k}$, $j = 2, 3, 4$ из (3.25). Отсюда следует однозначная разрешимость задачи (1.1), (1.2).

Для доказательства необходимости этих условий заметим, что если $\Delta_k = 0$, то соответствующая однородная система (3.25) (при $c_k \equiv d_k \equiv 0$) имеет нетривиальное решение $A_{j,k}$, $j = 2, 3, 4$, порождающее одно линейно независимое решение $U_k(x, y)$ однородной задачи (1.1), (1.2). Заметим, что $U_k(x, y)$ является многочленом по x и y порядка $k + 1$. (Например, если корни характеристического уравнения (1.3) удовлетворяют условию $\mu_2(\mu_3 + \mu_4) = -1$, то $\Delta_3 = 0$ и функция $U_3(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2$ является нетривиальным решением соответствующей однородной задачи (1.1), (1.2)).

Таким образом, если $\Delta_k = 0$ при $k = k_1, ..., k_n$, то однородная задача (1.1), (1.2) имеет n линейно независимых решений. Этим завершается доказательство Теоремы 1.

Замечание 3. Аналогично Замечанию 2, если $\Delta_k = 0$ при $k = k_1, ..., k_n$, то для разрешимости неоднородной задачи (1.1), (1.2) необходимо и достаточно выполнение следующих условий :

$$\mu_2 c_{-k} \frac{\delta^k - \gamma^k}{\delta - \gamma} + d_{-k} \frac{\delta\gamma^k - \gamma\delta^k}{\delta - \gamma} = d_k \mu_2^k, \quad k = k_1, ..., k_n,$$

где c_k, d_k – коэффициенты Фурье функций F_1 и F_2.

§4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА СЛЕДСТВИЙ

Доказательство Следствия 1. Предположим, что $\mu_2 \neq 0$.

1. Пусть $\mu_3 = 0$. Если $\mu_4 = \mu_3 = 0$, то $\delta = \mu_2\mu_3 = 0$, и следовательно из (2.5) вытекает, что $a_k = 1$ при $k \geq 3$. Поэтому однозначная разрешимость задачи (1.1), (1.2) опять следует из Теоремы 1. Пусть теперь $\mu_2 \neq 0$ и $\mu_4 \neq \mu_3$. Имеем $\delta = \mu_2\mu_3 = 0$ и $\gamma = \mu_2\mu_4 \neq 0$. Следовательно, (2.6) можно записать в виде

$$\Delta_k = \gamma^k - \gamma = \gamma(\gamma^{k-1} - 1), \quad k = 3, 4, \dots$$

Учитывая неравенство $|\gamma| < 1$ можем заключить, что $\Delta_k \neq 0$ при $k \geq 3$, т.е. задача (1.1), (1.2) однозначно разрешима. Таким образом, первое утверждение Следствия 1 доказано.

2. Для доказательства второго и третьего утверждений Следствия 1 отметим, что если $\mu_2 \neq 0$ и $\mu_4 \neq \mu_3$, то детерминант

$$\Delta_k = (\delta-\gamma)[1-(\delta^{k-1}+\delta^{k-2}\gamma+\cdots+\gamma^{k-1})+\delta\gamma(\delta^{k-2}+\delta^{k-3}\gamma+\cdots+\gamma^{k-2})], \quad k = 3, 4, \dots$$

отличен от нуля тогда и только тогда, когда

$$P_k(\delta, \gamma) = 1-(\delta^{k-1}+\delta^{k-2}\gamma+\cdots+\gamma^{k-1})+\delta\gamma(\delta^{k-2}+\delta^{k-3}\gamma+\cdots+\gamma^{k-2}) \neq 0. \quad (4.1)$$

Если $|\mu_2| < 1/2$, то из $|\mu_k| < 1$ имеем $x = \max(|\delta|, |\gamma|) < 1/2$. При $k \geq 3$ имеем

$$|P_k(\delta, \gamma)| \geq h(k, x) \equiv 1 - kx^{k-1} - (k-1)x^k. \quad (4.2)$$

Далее

$$h(3, x) = 1 - 3x^2 - 2x^3 = (x+1)^2(1-2x) > 0 \quad \text{при } x < \frac{1}{2}. \quad (4.3)$$

При $k \geq 3$ имеем

$$\frac{\partial h(k,x)}{\partial k} = x^{k-1}\left[(x(k-1)+k))\ln\frac{1}{x} - (1+x)\right] > x^{k-1}(3\ln 2 - 3/2) > 0, \quad x < \frac{1}{2}.$$

Следовательно, при $k \geq 3$ и $x \in (0, 1/2)$, функция $h(k, x)$ возрастает по k. Из (4.2) и (4.3) следует, что

$$|P_k(\delta, \gamma)| \geq h(k, x) \geq h(3, x) > 0, \quad x \in (0, 1/2). \quad (4.4)$$

Таким образом, условия (2.6) выполняются и следовательно задача (1.1), (1.2) однозначно разрешима. Пусть теперь $\mu_3 = \mu_4$. Из (2.5) и (4.1) получим $a_k = P_k(\delta, \delta)$. Следовательно, если $|\mu_2| < 1/2$ или $|\mu_3| < 1/2$, то имеем $|\delta| < 1/2$, и из (4.4) вытекает

$$|a_k| = |P_k(\delta, \delta)| > h(3, |\delta|) > 0, \quad k \geq 3,$$

т.е. задача (1.1), (1.2) однозначно разрешима.

3. Для доказательства утверждений 4 и 5 Следствия 1 заметим, что в силу (2.5) и (2.6) имеем

$$a_k = (\delta-1)^2[1+2\delta+\dots+(k-1)\delta^{k-2}], \quad k=3,4,\dots, \tag{4.5}$$

$$\Delta_k = (\delta-1)(\gamma-1)(\delta-\gamma)\left[1+\sum_{j=1}^{k-1}(\delta^j+\delta^{j-1}\gamma+\dots+\delta\gamma^{j-1}+\gamma^j)\right]. \tag{4.6}$$

Следовательно, если $\mu_4=\mu_3$ и $\delta=\mu_2\mu_3>0$, то согласно (4.5) получаем $a_k>(\delta-1)^2\neq 0$ при $k\geq 3$. Если $\mu_4\neq\mu_3$, то $\delta\neq\gamma$, и согласно (4.6) получим $\Delta_k\neq 0$ при $\delta,\gamma>0$ и $k\geq 3$. Этим доказывается однозначная разрешимость задачи (1.1), (1.2).

4. Пусть $|\mu_2|>1/2$. Если $\mu_4=\mu_3=-1/2\mu_2$, то $\delta=\mu_2\mu_3=-1/2$ и $|\mu_3|<1$. Из (2.5) имеем $a_3=0$, и следовательно задача (1.1), (1.2) не является однозначно разрешимой. Вернемся к случаю $\mu_3\neq\mu_4$. Сначала рассмотрим $P_{2k+1}(\delta,\gamma)$ при отрицательных значениях δ и γ. Отметим, что функция

$$X(\delta)\equiv P_{2k+1}(\delta,\delta)=1+2k\delta^{2k+1}-(2k+1)\delta^{2k}$$

имеет единственный корень δ_0 на отрезке $[-1,0]$. Действительно, имеем

$$P_{2k+1}(0,0)=1, \quad P_{2k+1}(-1,-1)=-4k<0,$$

$$\frac{d}{d\delta}P_{2k+1}(\delta,\delta)=2k(2k+1)\delta^{2k-1}(\delta-1)>0, \quad \delta\in[-1,0].$$

Если $\delta_1\in(-1,\delta_0)\cup(\delta_0,0)$, то

$$P_{2k+1}(\delta_1,0)=1-\delta_1^{2k}>0, \quad P_{2k+1}(\delta_1,-1)=-2(|\delta_1|^{2k}+|\delta_1|^{2k-1}+\dots+|\delta_1|)<0. \tag{4.7}$$

Следовательно, по теореме Коши существует точка $\gamma\in(-1,0)$ такая, что $P_{2k+1}(\delta_1,\gamma_1)=0$. Так как $\delta_1\neq\delta_0$, то имеем $\delta_1\neq\gamma_1$. Отметим также, что $\gamma_1\to\delta_0$, если $\delta_1\to\delta_0$, $\gamma_1\to-1$, если $\delta_1\to 0$ и $\gamma_1\to 0$, если $\delta_1\to -1$.

Пусть $\mu_3\neq 0$. Если $\delta_1\to-|\mu_3|$, то $\gamma_1\to\gamma_1^*$ и $|\gamma_1^*|<1$, так как $0<|\mu_3|<1$. Таким образом, если $\delta_1\to-|\mu_3|$, то предел отношения δ_1/γ_1 существует и больше $|\mu_3|$. Следовательно можно выбрать δ_1, удовлетворяющее неравенствам $|\delta_1|<|\mu_3|<|\delta_1|/|\gamma_1|$. Учитывая $\gamma_1\neq\delta_1$, получим $|\mu_2|=|\delta_1\mu_3^{-1}|<1$, $|\mu_4|=|\gamma_1\mu_3\delta_1^{-1}|<1$. $\mu_3\neq\mu_4$. Тогда, при таких μ_2 и μ_4 задача (1.1), (1.2) не является однозначно разрешимой. Следствие 1 доказано.

Доказательство Следствия 2. Предположим, что при $\mu_k = \mu_k^0$, $k = 2,3,4$ задача (1.1), (1.2) не является однозначно разрешимой. Положим $\delta_0 = \mu_2^0\mu_3^0$, $\gamma_0 = \mu_2^0\mu_4^0$, $r = |\gamma_0 - \delta_0|$, $\alpha = \max(|\delta_0|, |\gamma_0|)$. Из доказанных выше утверждений следует, что $r > 0$ и $0 < \alpha < 1$. Поэтому для любой точки (δ,γ) из окрестности

$$U = \{(\delta,\gamma) \in \mathbf{C}^2 : |\delta - \delta_0| < \varepsilon,\ |\gamma - \gamma_0| < \varepsilon\}, \quad 0 < \varepsilon < \min\left(\frac{r}{3}, \frac{1-\alpha}{2}\right) \tag{4.8}$$

имеем $|\delta - \gamma| < r/3$. При любых $(\delta,\gamma) \in U$

$$\Delta_k(\delta,\gamma) \neq 0 \quad \text{при } k \geq N, \tag{4.9}$$

где N достаточно велико. Положим

$$\varphi(\delta,\gamma) = \prod_{k=2}^{N-1} \Delta_k(\delta,\gamma).$$

Легко проверить, что $\varphi(\delta,\gamma)$ – отличный от нуля многочлен от комплексных переменных δ,γ, обращающийся в нуль в точке (δ_0,γ_0). Следовательно, в любой окрестности точки (δ_0,γ_0) (в частности в окрестности U) существует точка (δ^*,γ^*) такая, что $\varphi(\delta^*,\gamma^*) \neq 0$. Отсюда, вместе с соотношением (4.9) вытекает $\Delta_k(\delta^*,\gamma^*) \neq 0$, $k = 2,3,4$. Выбирая μ_k^*, $k = 2,3,4$ так, чтобы $\delta^* = \mu_2^*\mu_3^*$, $\gamma^* = \mu_2^*\mu_4^*$ и учитывая, что число ε в (4.8) может быть выбрано сколь угодно малым, завершаем доказательство Следствия 2.

§5. СЛУЧАЙ $\lambda_1 \neq i$

Рассмотрим теперь уравнение (1.1) в случае $\lambda_k \neq i$, $k = 1,2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_3 \neq \lambda_4$. Уравнение (2.1) в этом случае примет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial\bar z} - \mu_1\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\bar z} - \mu_2\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} - \mu_3\frac{\partial}{\partial\bar z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} - \mu_4\frac{\partial}{\partial\bar z}\right)U = 0,$$

где $|\mu_k| < 1$, $k = 1,2,3,4$, и $\mu_1 \neq \mu_2$, $\mu_3 \neq \mu_4$, $\mu_1\mu_2 \neq 0$. Общее решение уравнения (1.1) можно представить в виде

$$U = \varphi_1(z + \mu_1\bar z) + \varphi_2(z + \mu_2\bar z) + \varphi_3(\bar z + \mu_3 z) + \varphi_4(\bar z + \mu_4 z), \quad |z| < 1, \tag{5.1}$$

где $\varphi_k(\zeta)$ – аналитические функции в D, $z = x + iy \in D$. Подставляя (5.1) в граничные условия (2.2) и (2.3), получим

$$\begin{aligned}
&\varphi_1'(z + \mu_1\bar z) + \varphi_2'(z + \mu_2\bar z) + \mu_3\varphi_3'(\bar z + \mu_3 z) + \mu_4\varphi_4'(\bar z + \mu_4 z) = F_1(x,y),\\
&\mu_1\varphi_1'(z + \mu_1\bar z) + \mu_2\varphi_2'(z + \mu_2\bar z) + \varphi_3'(\bar z + \mu_3 z) + \varphi_4'(\bar z + \mu_4 z) = F_2(x,y).
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Представим функции φ_k' в виде

$$\varphi_k'(z+\mu_k\overline{z}) = \omega_k(z) + \omega_k(\mu_k\overline{z}), \quad k = 1, 2,$$

$$\varphi_k'(\overline{z}+\mu_k z) = \omega_k(\overline{z}) + \omega_k(\mu_k z), \quad k = 3, 4, \quad |z| = 1,$$

где $\omega_k(z)$ – аналитические функции в D. Разлагая ω_k в ряд Тейлора $\omega_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{j,k} z^k$, $j = 1, 2, 3, 4$, и подставляя в (5.2), получим следующую линейную систему для коэффициентов $A_{j,k}$:

$$\begin{cases} A_{1,k} + A_{2,k} + \mu_3^{k+1} A_{3,k} + \mu_4^{k+1} A_{4,k} = c_k, \\ \mu_1 A_{1,k} + \mu_2 A_{2,k} + \mu_3^k A_{3,k} + \mu_4^k A_{4,k} = d_k, \\ \mu_1^k A_{1,k} + \mu_2^k A_{2,k} + \mu_3 A_{3,k} + \mu_4 A_{4,k} = c_{-k}, \\ \mu_1^{k+1} A_{1,k} + \mu_2^{k+1} A_{2,k} + A_{3,k} + A_{4,k} = d_{-k}, \end{cases} \quad k \geq 0. \tag{5.3}$$

Учитывая (3.6), заключаем, что при $k = 0, 1$ система (5.3) всегда разрешима. Повторяя рассуждения доказательства Теоремы 1 заключаем, что условия

$$\Omega_k = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \mu_3^{k+1} & \mu_4^{k+1} \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3^k & \mu_4^k \\ \mu_1^k & \mu_2^k & \mu_3 & \mu_4 \\ \mu_1^{k+1} & \mu_2^{k+1} & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad k \geq 3 \tag{5.4}$$

необходимы и достаточны для однозначной разрешимости задачи (1.1), (1.2). Отметим, что $\Omega_2 \neq 0$ при всех μ_k таких, что $\mu_1 \neq \mu_2$ и $\mu_3 \neq \mu_4$. Предположим, что $|\mu_1| < |\mu_2|$. Имеем $|\beta| \geq 1$, где $\beta = \mu_2\mu_1^{-1}$. Детерминанты Ω_k можно записать в виде

$$\Omega_k = \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{k+1} \begin{vmatrix} \beta^{k+1} & 1 & \delta^{k+1} & \gamma^{k+1} \\ \beta^k & 1 & \delta^k & \gamma^k \\ \beta & 1 & \delta & \gamma \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{k+1} g_k(\beta, \gamma, \delta), \quad k \geq 3.$$

Так как по предположению $\mu_1 \neq 0$, то условия (5.4) выполняются тогда и только тогда, когда

$$g_k(\beta, \gamma, \delta) \neq 0, \quad k \geq 3. \tag{5.5}$$

Из (5.5) можно получить достаточные условия для однозначной разрешимости задачи (1.1), (1.2), аналогичные пункту 2 Следствия 1. Пусть

$$X = \max(|\delta|, |\gamma|) < \frac{1}{2} - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \tag{5.6}$$

Из (2.6) и (5.5) следует, что

$$g_k(\beta, \gamma, \delta) = \beta^{k+1}\Delta_k - \beta^k \Delta_{k+1} + \beta v_k - \delta\gamma v_{k-1}, \quad k \geq 3, \tag{5.7}$$

где

$$v_k = \begin{vmatrix} 1 & \delta^{k+1} & \gamma^{k+1} \\ 1 & \delta^k & \gamma^k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad k \geq 3.$$

Из (4.4) и (5.6) имеем $|\Delta_k| = |\delta - \gamma| \cdot |P_k(\delta, \gamma)| > |\delta - \gamma| h(3, x) > |\delta - \gamma| 2\varepsilon$. Следовательно, согласно (5.7) имеем

$$|g_k(\beta, \gamma, \delta)| > |\beta|^{k+1} |\Delta_k| \left(1 - \frac{|\Delta_{k+1}|}{|\delta - \gamma| 2\varepsilon |\beta|} - \frac{|v_k|}{|\delta - \gamma| 2\varepsilon |\beta|^k} - \frac{|\delta| \cdot |\gamma| \cdot |v_{k-1}|}{|\delta - \gamma| 2\varepsilon |\beta|^{k+1}} \right).$$

Таким образом, $|g_k(\beta, \gamma, \delta)| > 0$ при $k \geq 3$ и $|\beta| > N_\varepsilon$, где

$$N_\varepsilon = \frac{3K}{|\delta - \gamma| 2\varepsilon}, \quad K = \max(|\Delta_k|, |v_k|).$$

Итак, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что имеют место неравенства $|\mu_2 \mu_3| < 1/2 - \varepsilon$, $|\mu_2 \mu_4| < 1/2 - \varepsilon$, $|\mu_2| > N_\varepsilon |\mu_1|$, то задача (1.1), (1.2) однозначно разрешима.

Автор благодарен проф. Н. Е. Товмасяну за постановку задачи и ценные замечания.

ABSTRACT. The paper studies the unique solvability of Dirichlet problem for some class of fourth order properly elliptic equations. Necessary and sufficient conditions as well as some sufficient conditions rendering the corresponding problem uniquely solvable are found.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. E. Tovmasian, Non-Regular Differential Equations and Calculations of Electromagnetic Fields, World Scientific Publ., Singapore, 1998.
2. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Элементы Теории Функций и Функционального Анализа. Наука, Москва, 1989.

24 апреля 1999

Армянский государственный инженерный университет