О КОММУТАТИВНОСТИ В БАНАХОВОЙ АЛГЕБРЕ

И. М. Караханян, М. И. Караханян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 4, 1999

Пусть в комплексной банаховой алгебре A с единицей $\mathbf{1}$ $\|\mathbf{1}\| = 1$, $\|\mathrm{ab}\| \le \|\mathrm{a}\|\,\|\mathrm{b}\|$ для всех элементов $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in A$. Напомним [6, 7], что линейный функционал $\varphi : A \to \mathbf{C}$ называется **состоянием**, если $\|\varphi\| = \varphi(\mathbf{1}) = 1$. Множество состояний образуют слабо-звездочно компактное подмножество в сопряженном к A пространстве, которое мы обозначим через $P(A)$. Множество $V(\mathrm{a}) = \{\varphi(\mathrm{a}) : \varphi \in P(A)\}$ называется **(алгебраическим) числовым образом** элемента a в A. В частности, если A– подалгебра в операторной алгебре $BL(\mathbf{H})$ всех ограниченных линейных операторов, определенных в комплексном гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$, то числовой образ $V(T)$ любого оператора $T \in A$ совпадает (см. [8]) с замыканием обычного числового образа оператора T. Заметим, что элемент $\mathrm{h} \in A$ называется **эрмитовым**, если $V(\mathrm{h}) \in \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ – поле вещественных чисел. Это условие равносильно тому, что $\|\exp(it\mathrm{h})\| = 1$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Множество $\mathbf{H}(A)$ всех эрмитовых элементов является замкнутым $\mathbb{R}$-линейным подпространством в A. Элемент $\mathrm{h} \in A$ называется **квазиэрмитовым** (см. [5]), если $\|\exp(it\mathrm{h})\| = o(|t|^{1/2})$ при $|t| \to \infty$, $t \in \mathbb{R}$. Из этого условия следует $\mathrm{sp}(\mathrm{h}) \subset \mathbb{R}$, где $\mathrm{sp}(\mathrm{h})$ - спектр h-элемента. Числовой образ $V(\mathrm{h})$ может выползать за числовую ось. Однако, для любого элемента $\mathrm{a} \in A$ имеет место вложение $\mathrm{sp}(\mathrm{a}) \subset V(\mathrm{a})$. Элемент $\mathrm{a} = \mathrm{h} + i\mathrm{k}$, где $\mathrm{h}, \mathrm{k} \in H(A)$ называется **эрмитово-разложимым**, а $\mathrm{a}^+ = \mathrm{h} - i\mathrm{k}$ – **эрмитово-сопряженным** к элементу a. В случае, если $[\mathrm{h}, \mathrm{k}] = \mathrm{hk} - \mathrm{kh} = 0$, то элемент a называется **эрмитово-нормальным** элементом, а когда h, k - квазиэрмитовы и $[\mathrm{h}, \mathrm{k}] = 0$, то элемент $\mathrm{a} = \mathrm{h} + i\mathrm{k}$ называется **квазинормальным**.

Пусть J – замкнутый двусторонний идеал в алгебре A. Тогда фактор-алгебра A/J является банаховой алгеброй относительно фактор-нормы $|||\bullet|||$ и имеем $\bar{a} = a + J = \pi_J(a) \in A/J$, где $\pi_J : A \to A/J$ – канонический гомоморфизм, порожденный идеалом J.

Пусть $\{a_n\}_0^\infty$, $\{b_n\}_0^\infty$ – две последовательности элементов в банаховой алгебре A такие, что $\overline{\lim_{n\to\infty}}\|a_n\|^{1/n} = \rho_a < \infty$, $\overline{\lim_{n\to\infty}}\|b_n\|^{1/n} = \rho_b < \infty$. Тогда для любого элемента $c \in A$ функция $f(\lambda) = A(\lambda)c\,B(\lambda) = \sum_0^\infty \frac{c_n\lambda^n}{n!}$, где $A(\lambda) = \sum_0^\infty \frac{a_n\lambda^n}{n!}$, $B(\lambda) = \sum_0^\infty \frac{b_n\lambda^n}{n!}$ является A-значной целой функцией экспоненциального типа $\sigma_f \leq \rho_a + \rho_b$, где $c_n = \sum_{p=0}^n C_n^p a_p\, c\, b_{n-p}$. Для $a, b, c \in A$ будем писать $ca = bc(\mathrm{mod}J)$, если $ca - bc \in J$. В частности, условие $ca = ac(\mathrm{mod}J)$ означает, что элементы a и c коммутируют по модулю идеала J.

Теорема 1. **Пусть A – комплексная банахова алгебра с единицей, и J – замкнутый двусторонний идеал в A. Тогда элементы $c_n = \sum_{p=0}^n C_n^p a_p\, c\, b_{n-p} \in J$ для всех $n \geq 1$ тогда и только тогда, когда** $\sup_{\lambda\in C}|||\bar{f}(\lambda)||| < \infty$, где $\{a_n\}_0^\infty$, $\{b_n\}_0^\infty \in A$ и $\overline{\lim_{n\to\infty}}\|a_n\|^{1/n} < \infty$, $\overline{\lim_{n\to\infty}}\|b_n\|^{1/n} < \infty$.

Доказательство : Пусть $\pi_J : A \to A/J$ – канонический гомоморфизм, порожденный идеалом J. Так как $c_n \in J$, то $\bar{c}_n = \bar{0}$. Отсюда имеем $\bar{f}(\lambda) = \sum_0^\infty \frac{\bar{c}_n\lambda^n}{n!} = \bar{c}_0$, т.е. $|||\bar{f}(\lambda)||| = |||\bar{c}_0|||$ и поэтому $\sup_{\lambda\in C}|||\bar{f}(\lambda)||| < \infty$. Обратно, предположим, что $\sup_{\lambda\in C}|||\bar{f}(\lambda)||| < \infty$. Тогда для A/J-значной целой функции $\bar{f}(\lambda) = \sum_0^\infty \frac{\bar{c}_n\lambda^n}{n!}$, и в силу теоремы Лиувиля имеем $\bar{f}(\lambda) \equiv \bar{c}_0$. Следовательно, для всех $n \geq 1$ имеем $\bar{c}_n = 0$, откуда получаем $c_n \in J$. Теорема 1 доказана.

Следующая теорема относится к случаю $a_n = a^n$ и $b_n = b^n$, где $a, b \in A$.

Теорема 2. **Пусть A – комплексная банахова алгебра с единицей, J – замкнутый двусторонний идеал в A и $a, b, c \in A$. Тогда для того, чтобы $ca = bc(\mathrm{mod}J)$ необходимо и достаточно, чтобы**

$$\sup_{\lambda\in C}|||\exp(\lambda\bar{b})\bar{c}\exp(-\lambda\bar{a})||| < \infty.$$

Доказательство : Пусть $\pi_J : A \to A/J$ как и выше есть канонический гомоморфизм, порожденный идеалом J. Так как $ca - bc \in J$, то для любого натурального n имеем $\bar{c}\bar{a}^n = \bar{b}^n\bar{c}$, и поэтому $\bar{c}\exp(\lambda\bar{a}) = \exp(\lambda\bar{b})\bar{c}$ для произвольного $\lambda \in C$. Следовательно, $\bar{c} = \exp(\lambda\bar{b})\bar{c}\exp(-\lambda\bar{a})$, и поэтому $\sup_{\lambda\in C}|||\exp(\lambda\bar{b})\bar{c}\exp(-\lambda\bar{a})||| < \infty$.

Обратно, пусть $\sup_{\lambda\in\mathbf{C}}|||\exp(\lambda\bar{\mathbf{b}})\bar{\mathbf{c}}\exp(-\lambda\bar{\mathbf{a}})||| < \infty$. Тогда для A/J-значной целой функции в силу теоремы Лиувиля имеем $\bar{f}(\lambda) = \exp(\lambda\bar{\mathbf{b}})\bar{\mathbf{c}}\exp(-\lambda\bar{\mathbf{a}}) \equiv \bar{\mathbf{c}}$. Тогда для любого натурального n имеем $\bar{\mathbf{c}}\bar{\mathbf{a}}^n = \bar{\mathbf{b}}^n\bar{\mathbf{c}}$, и следовательно, $\mathbf{ca} = \mathbf{bc}(\mathrm{mod}J)$. Теорема 2 доказана.

Следствие 1. Пусть $M, N, T \in BL(X)$, где X – комплексное банахово (в частности, гильбертово) пространство и $J \subset BL(X)$ – замкнутый двусторонний идеал. Для выполнения равенства $MT = TN(\mathrm{mod}J)$ необходимо и достаточно, чтобы $\sup_{\lambda\in\mathbf{C}}|||\exp(\lambda\bar{M})\bar{T}\exp(-\lambda\bar{N})||| < \infty$.

Комбинируя Теорему 2 с обобщенной теоремой фон Неймана–Фугледе–Путмана (см. [3, 4]), получаем следующий результат.

Следствие 2. Пусть $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A$ – квазинормальные элементы и $\mathbf{c} \in A$. Если $\sup_{\lambda\in\mathbf{C}}|||\exp(\lambda\bar{\mathbf{b}})\bar{\mathbf{c}}\exp(-\lambda\bar{\mathbf{a}})||| < \infty$, то $\mathbf{a}^+\mathbf{c} = \mathbf{cb}^+(\mathrm{mod}J)$ (см. [9]).

Следствие 3. Если A - комплексная банахова алгебра с единицей и $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A$, то условие $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}(\mathrm{mod}J)$ эквивалентно $\sup_{\lambda\in\mathbf{C}}|||\exp(\lambda\bar{\mathbf{b}})\bar{\mathbf{a}}\exp(-\lambda\bar{\mathbf{b}})||| < \infty$.

В случае $J = \{0\}$, Следствия 2, 3 дают усиления результатов из [1] и [2].

Следствие 4. Пусть A - комплексная банахова алгебра с единицей и J - замкнутый двусторонний идеал в A. Для того, чтобы A/J была бы коммутативной необходимо и достаточно, чтобы $\sup_{(\mathbf{a},\mathbf{b})\in A\times A}\ \sup_{\lambda\in\mathbf{C}}|||\exp(\lambda\bar{\mathbf{b}})\bar{\mathbf{a}}\exp(-\lambda\bar{\mathbf{b}})||| < \infty$.

Если семейство элементов $\{\mathbf{a}_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset A$ есть система образующих алгебры A, то будем писать $A = A[\{\mathbf{a}_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}]$. В этом случае Следствие 4 можно сформулировать в таком виде :

Следствие 5. Пусть $A = A[\{\mathbf{a}_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}]$ – комплексная банахова алгебра с единицей, и J – замкнутый двусторонний идеал в A. Для коммутативности A/J необходимо и достаточно, чтобы $\sup_{\gamma,\chi\in\Gamma}\ \sup_{\lambda\in\mathbf{C}}|||\exp(\lambda\bar{\mathbf{a}}_\gamma)\bar{\mathbf{a}}_\chi\exp(-\lambda\bar{\mathbf{a}}_\gamma)||| < \infty$.

Если $J = \mathrm{Rad}(A)$ – радикал алгебры A, то Следствия 4 и 5 обеспечивают коммутативность фактор–алгебры $A/\mathrm{Rad}(A)$, что, в свою очередь, эквивалентно равномерной непрерывности спектрального радиуса в A (см. [10]). В случае $J = \{0\}$ получаем критерий коммутативности алгебры.

Пусть $D : A \to A$ – непрерывное A-дифференцирование (т.е. $D \in BL(A)$ и $D(\mathbf{ab}) = (D\mathbf{a})\mathbf{b}+\mathbf{a}(D\mathbf{b})$, где $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A$). Тогда в фактор–алгебре A/J индуцируется A/J–дифференцирование $D_J : A/J \to A/J$, определяемое по формуле $D_J(\bar{\mathbf{a}}) = \pi_J(D\mathbf{a}) = \bar{D}\mathbf{a}$. Очевидно, $D_J \in BL(A/J)$. Пусть $\mathrm{aut}(A)$ – группа автоморфизмов алгебры A. Тогда, при каждом фиксированном $\lambda \in \mathbf{C}$ оператор $\exp(\lambda D) \in \mathrm{aut}(A)$, и поэтому $\exp(\lambda D_J) \in \mathrm{aut}(A/J)$.

Теорема 3. Пусть A – комплексная банахова алгебра с единицей, J – замкнутый двусторонний идеал в A, а $D : A \to A$ есть непрерывная A–производная. Для того, чтобы $D^n(a) \in J$ для всех $n \geq n_0$, $a \in A$, необходимо и достаточно, чтобы $|||\exp(\lambda D_J)(\bar{a})||| = O(|\lambda|^{n_0-1})$ для $|\lambda| \to \infty$, $\lambda \in \mathbf{C}$.

Доказательство : Пусть $D^{n_0}(a) \in J$. Тогда $D_J^{n_0}(\bar{a}) = 0$, и поэтому для всех натуральных $n \geq n_0$ имеем $D_J^n(\bar{a}) = 0$. Если $\varphi \in P(A/J)$, то для целой функции $f_\varphi(\lambda) = \varphi(\exp(\lambda D_J)(\bar{a}))$ имеем

$$f_\varphi(\lambda) = \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{\lambda^k \varphi(D_J^k(\bar{a}))}{k!}.$$

Следовательно, $|||\exp(\lambda D_J)(\bar{a})||| = \sup\limits_{\varphi \in P(A/J)} |f_\varphi(\lambda)| = O(|\lambda|^{n_0-1})$, for $|\lambda| \to \infty$.
Обратно, предположим, что $|||\exp(\lambda D_J)(\bar{a})||| = O(|\lambda|^{n_0-1})$ для $|\lambda| \to \infty$. Тогда в силу теоремы Лиувиля, для $n \geq n_0$ имеем $D_J^n(\bar{a}) = 0$, и поэтому $D^n(a) \in J$. Теорема 3 доказана.

Следствие 6. Пусть A – комплексная банахова алгебра с единицей, J – замкнутый двусторонний идеал в A, а $D : A \to A$ есть непрерывная A–производная. Для того, чтобы $Da \in J$, где $a \in A$, необходимо и достаточно, чтобы $\sup\limits_{\lambda \in \mathbf{C}} |||(\exp \lambda D_J)(\bar{a})||| < \infty$.
В случае $J = \{0\}$ получаем следующее утверждение.

Следствие 7. Пусть A – комплексная банахова алгебра с единицей, и $D : A \to A$ есть непрерывная A–производная. Для того, чтобы элемент $a \in \ker(D)$, где $\ker(D)$ – ядро оператора D, необходимо и достаточно, чтобы $\sup\limits_{\lambda \in \mathbf{C}} \|(\exp \lambda D)(a)\| < \infty$.

Теорема 4. Пусть A – комплексная банахова алгебра с единицей, J – замкнутый двусторонний идеал в A, а $D : A \to A$ есть непрерывная A–производная. Если для $a \in A$ имеем $Da \notin J$, то $\bigcup\limits_{\lambda \in \mathbf{C}} V((\exp \lambda D_J)(\bar{a})) = \mathbf{C}$.

Доказательство : Пусть $\varphi \in P(A/J)$. Рассмотрим целую функцию $f_\varphi(\lambda) = \varphi(\exp(\lambda D_J)(\bar{a}))$. Тогда образ f_φ лежит в множестве $U_J = \bigcup\limits_{\lambda \in \mathbf{C}} V((\exp \lambda D_J)(\bar{a}))$. Предположим, что $\mathbf{C} \setminus U_J$ содержит по крайней мере две точки. Тогда, в силу теоремы Пикара для целых функций имеем $f_\varphi(\lambda) \equiv \mathrm{const}$, и поэтому для всех натуральных $n \geq 1$ получаем $\varphi(D_J^n(\bar{a})) = 0$. В частности, $D_J(\bar{a}) = 0$, т.е. $D\mathbf{a} \in J$. Однако это противоречит условию теоремы. Таким образом, $C \setminus U_J$ содержит самое большее одну точку. Теперь покажем, что $U_J = C$. Так как для каждого фиксированного $\lambda \in \mathbf{C}$ оператор $\exp(\lambda D_J) \in \operatorname{aut}(A/J)$, то имеем $\operatorname{sp}(\bar{a}) = \operatorname{sp}((\exp \lambda D_J)(\bar{a}))$ для любого элемента $\bar{a} \in A/J$.

Пусть $\zeta_0 \in \operatorname{sp}(\bar{a})$ и $\zeta \in \mathbf{C}$ – произвольное комплексное число. Тогда на прямой, проходящей через точки ζ_0 и ζ, найдется такая точка ζ_1, что $\zeta_1 \in \bigvee((\exp \lambda D_J)(\bar{a}))$ для некоторого $\lambda \in \mathbf{C}$. Так как отрезок $[\zeta_0, \zeta_1] \subset \bigvee((\exp \lambda D_J)(\bar{a}))$ и числовой образ $\bigvee((\exp \lambda D_J)(\bar{a}))$ есть выпуклое множество, то $\zeta \in \bigvee((\exp \lambda D_J)(\bar{a}))$, и значит $U_J = \mathbf{C}$. Теорема 4 доказана.

В случае, когда идеал $J = \{0\}$ получаем нижеследующее утверждение.

Следствие 8. Пусть A – комплексная банахова алгебра с единицей, и $D : A \to A$ есть непрерывная A–производная. Если элемент $\mathbf{a} \notin \ker(D)$, то $\bigcup\limits_{\lambda \in \mathbf{C}} \bigvee((\exp \lambda D)(\mathbf{a})) = \mathbf{C}$.

Рассмотрим оператор $\delta_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(\mathbf{c}) = \mathbf{ac} - \mathbf{cb}$, где $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in A$. Так как $\delta_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(\mathbf{cd}) = \delta_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(\mathbf{c})\mathbf{d} + \mathbf{c}\delta_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(\mathbf{d}) + \mathbf{c}(\mathbf{b} - \mathbf{a})\mathbf{d}$, то для $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ оператор $\delta_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$ не дифференцируем. Тем не менее имеет место следующая теорема.

Теорема 5. Пусть A – комплексная банахова алгебра с единицей, и пусть $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in A$ такие элементы, что $\mathbf{ac} \neq \mathbf{cb} (\operatorname{mod} J)$, где J – замкнутый двусторонний идеал в A. Тогда $\bigcup\limits_{\lambda \in \mathbf{C}} \bigvee(\exp(\lambda\bar{\mathbf{a}})\bar{\mathbf{c}} \exp(-\lambda\bar{\mathbf{b}})) = \mathbf{C}$.

Доказательство : Так как $\mathbf{ac} - \mathbf{cb} \notin J$, то для любого элемента $\mathbf{d} \in J$ имеем $\mathbf{ac} - \mathbf{cb} + \mathbf{d} \notin J$. Тогда для любого $\mathbf{j} \in J$ элемент $\mathbf{d} = (\mathbf{a} - \mathbf{c})\mathbf{j} + \mathbf{j}(\mathbf{c} - \mathbf{b}) \in J$, и следовательно, $(\mathbf{a} + \mathbf{j})(\mathbf{c} + \mathbf{j}) - (\mathbf{c} + \mathbf{j})(\mathbf{b} + \mathbf{j}) \notin J$. Отсюда следует, что $\exp(\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{j}))(\mathbf{c} + \mathbf{j}) - (\mathbf{c} + \mathbf{j}) \exp(\lambda(\mathbf{b} + \mathbf{j})) \notin J$ для произвольного $\lambda \in \mathbf{C}$. Отсюда получаем $\exp(\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{j}))(\mathbf{c} + \mathbf{j}) \exp(-\lambda(\mathbf{b} + \mathbf{j})) - (\mathbf{c} + \mathbf{j}) \notin J$. Пусть $U_{\mathbf{j}} = \bigcup\limits_{\lambda \in \mathbf{C}} U_\lambda^{<\mathbf{j}>}$, где $U_\lambda^{<\mathbf{j}>} = \bigvee(\exp(\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{j}))(\mathbf{c} + \mathbf{j}) \exp(-\lambda(\mathbf{b} + \mathbf{j})))$. Покажем, что $U_{\mathbf{j}} = \mathbf{C}$. Пусть $\mathbf{C} \setminus U_{\mathbf{j}}$ содержит по крайней мере две точки. Тогда для $\varphi \in P(A)$ образ целой функции $f_\varphi^{<\mathbf{j}>}(\lambda) = \varphi(\exp(\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{j}))(\mathbf{c} + \mathbf{j}) \exp(-\lambda(\mathbf{b} + \mathbf{j})))$ лежит в $U_{\mathbf{j}}$. Тогда по теореме Пикара для целых функций имеем, что $f_\varphi^{<\mathbf{j}>}(\lambda) \equiv \mathrm{const}$. Следовательно, производная f–функции равна нулю, и поэтому $(\mathbf{a} + \mathbf{j})(\mathbf{c} + \mathbf{j}) = (\mathbf{c} + \mathbf{j})(\mathbf{b} + \mathbf{j})$, что противоречит условиям Теоремы 5. Таким образом, множество $\mathbf{C} \setminus U_{\mathbf{j}}$ может содержать самое большее одну точку. Убедимся, что $U_{\mathbf{j}} = \mathbf{C}$. Пусть $\zeta_0 \in \operatorname{Sp}(\mathbf{c} + \mathbf{j})$ и $\zeta \in \mathbf{C}$ – произвольное комплексное число. Тогда существует точка $\zeta_1 \in U_\lambda^{<\mathbf{j}>}$

такая, что ζ лежит в сегменте $[\zeta_0, \zeta_1]$. Так как $\zeta_0 \in U_\lambda^{<j>}$ и $U_\lambda^{<j>}$ – выпуклое множество, то необходимо $\zeta \in U_\lambda^{<j>}$, и поэтому $\zeta \in U_j$. Таким образом, для каждого элемента $j \in J$ имеем $U_j = C$.

Заметим, что $V(\exp(\lambda\bar{a})\bar{c}\exp(-\lambda\bar{b})) = \bigcap_{j\in J} V(\exp(\lambda(a+j))(c+j)\exp(-\lambda(b+j)))$. Следовательно

$$\bigcup_{\lambda\in C}(\exp(\lambda\bar{a})\bar{c}\exp(-\lambda\bar{b})) = \bigcap_{j\in J} U_j = C.$$

Доказательство завершено.

В случае $J = \{0\}$ соответствующие результаты можно найти в [1], [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. J. P. Williams, "On commutativity and numerical range in Banach algebras", J. Functional Analysis, vol. 10, pp. 326 — 329, 1972.
2. S. K. Khasbardar, N. K. Thakare, "Commutativity in a Banach algebra," Bolletino U.M.I. vol. 5, no. 15-A, pp. 581 — 584, 1978.
3. Е. А. Горин, М. И. Караханян, "Асимптотический вариант теоремы Фугледе-Путмана о коммутаторах для элементов банаховых алгебр", Мат. Заметки, том 22, № 22, стр. 179 — 188, 1977.
4. М. И. Караханян, "Асимптотические свойства коммутаторов элементов банаховых алгебр", Изв. АН Арм. ССР, сер. Матем., том 19, № 6, стр. 405 — 421, 1978.
5. М. И. Караханян, "Асимптотические свойства коммутаторов", Изв. НАН Армении, сер. Матем., том 29, № 1, стр. 43 — 49, 1994.
6. J. F. Bonsal and J. Dunkan, Complete Normed Algebras, Springer-Verlag, 1973.
7. E. A. Gorin, "Estimation of a partial involution in a Banach algebra", Russian Journal of Mathematical Physics, vol. 5, no. 1, pp. 117 — 118, 1997.
8. P. R. Halmosh, A Hilbert Space Problem Book, Princeton, New-Jersey, 1967.
9. М. И. Караханян, "О коммутативности области изменения A-значной аналитической функции", Изв. НАН Армении, сер. Матем., том 31, № 1, стр. 29 — 37, 1996.
10. B. Aupetit, "Characterisation spectrale des algebres de Banach comutatives", Pacif. Journ. of Mathematics, vol. 63, no. 1, pp. 23 — 35, 1976.

12 мая 1999

Ереванский государственный университет