ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ ХАУСДОРФА

А. М. Джрбашян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 4, 1999

В данной статье решена проблема моментов типа Хаусдорфа, подобная проблеме, предложенной М. М. Джрбашяном в [1], [2].

Теорема 1. **Пусть** $\omega_i(x)$, $i = 1, 2$ **– две неотрицательные функции класса** $L_1\left(\dfrac{dx}{1+x}\right)$, **определенные на** $(0, +\infty)$. **Если выполнены следующие условия :**

(i) $\omega_1(x+\Delta)\omega_2(x-\Delta) \le \omega_1(x-\Delta)\omega_2(x+\Delta)$ **для любых** x, $\Delta > 0$ **таких, что** $0 < x - \Delta < x < x + \Delta < +\infty$;

(ii) $\min\limits_{x\in[a,b]} \omega_2(x) \ge \rho > 0$ **для некоторого сегмента** $[a, b] \subset (0, +\infty)$,

то уравнение

$$\frac{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\omega_1(x)}{s+x}\,dx}{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\omega_2(x)}{s+x}\,dx} = \int_0^{+\infty} e^{-st}\,d\alpha(t), \qquad s \in (0, +\infty)$$

обладает неубывающим решением $\alpha(x)$, **удовлетворяющим условиям**

$$\alpha(0) = 0, \qquad \alpha(x) \le \frac{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\omega_1(t)\,dt}{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\omega_2(t)\,dt}, \qquad 0 < x < +\infty.$$

Доказательство этой теоремы основано на следующей теореме из [3], [4].

Теорема 2. **1°. Пусть** Ω_1 **и** Ω_2 **– положительные, непрерывные и монотонные функции на** $(0, +\infty)$, **в частности, пусть** Ω_2 **– невозрастающая. Пусть выполнены следующие условия :**

(a) отношение $\dfrac{\Omega_1}{\Omega_2}$ не убывает на $(0,+\infty)$;

(b) логарифм хотя бы одной из функций Ω_1 или Ω_2 выпуклый в $(0,+\infty)$;

(c) для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-\varepsilon x}\Omega_2(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-\varepsilon x}\frac{\Omega_1(x)}{\Omega_2(x)} = 0;$$

(d) $\Omega_{1,2} \in L^1(0,R)$ при любом $R > 0$.

Тогда существует неубывающая функция $\alpha(x)$ такая, что

$$\frac{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-sx}\Omega_1(x)dx}{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-sx}\Omega_2(x)dx} = \int_0^{+\infty} e^{-sx}d\alpha(x), \quad s\in(0,+\infty),$$

и

$$\Omega_1(x) = \int_0^x \Omega_2(x-t)d\alpha(t), \quad x\in(0,+\infty),$$

со свойствами

$$\alpha(0)=0, \qquad \alpha(x) \le \frac{\Omega_1(x)}{\Omega_2(x)}, \qquad 0 < x < +\infty.$$

2°. Если вместо (c) и (d) выполнены следующие более ограничительные условия :

$$\Omega_i(+\infty) = 1 \quad \text{и} \quad \int_0^{+\infty} |\Omega_i(x)-1|\,dx < +\infty, \quad i=1,2,$$

то необходимо $\alpha(+\infty)=1$.

Доказательство Теоремы 1 : Используем Теорему 2 и тот факт, что логарифм преобразования Лапласа неотрицательной функции является выпуклой функцией (см. [5], стр. 259 – 260). Очевидно, достаточно проверить, что интегралы $J_{\omega_i}(t) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\omega_i(t)\,dt$, $i=1,2$ удовлетворяют условиям предыдушей теоремы. Заметим, что

$$\operatorname{sign}\left[\frac{J_{\omega_1}(t)}{J_{\omega_2}(t)}\right]' = \operatorname{sign}\left\{-\int_0^t \omega_1(x)\omega_2(t-x)x\,dx + \int_0^t \omega_1(x)\omega_2(t-x)(t-x)dx\right\} =$$
$$= \operatorname{sign}\left\{\int_0^{t/2}\left[\omega_1\left(\frac{t}{2}-\sigma\right)\omega_2\left(\frac{t}{2}+\sigma\right) - \omega_1\left(\frac{t}{2}+\sigma\right)\omega_2\left(\frac{t}{2}-\sigma\right)\right]\sigma d\sigma\right\}.$$

Далее, при любом $R>0$

$$\int_0^R dt\int_0^{+\infty} e^{-tx}|\omega_i(x)|dx \le C_1\int_0^1 |\omega_i(x)|dx + C_2\int_1^{+\infty}|\omega_i(x)|\frac{dx}{x} \le$$

$$\leq C_3 \int_0^{+\infty} |\omega_i(x)| \frac{dx}{1+x} < +\infty,$$

где C_1, C_2, C_3 – некоторые положительные постоянные. Теперь осталось заметить, что ввиду (ii) имеем $J_{\omega_2}(t) > \frac{\varrho}{t}(e^{-a} - e^{-b})$. Следовательно, при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-\varepsilon t} J_{\omega_2}(t) = \lim_{t \to +\infty} e^{-\varepsilon t} \frac{J_{\omega_1}(t)}{J_{\omega_2}(t)} = 0,$$

так как $J_{\omega_1}(t)$ непрерывна на $(0, +\infty)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян, "Некоторые открытые вопросы теории представлений аналитических функций", Заметки Науч. Сем. ЛОМИ, № 81, стр. 238 – 241, 1978.
2. M. M. Djrbashian, "Some open problems in the theory of representations of analytic functions", Lecture Notes in Math., vol. 1043, pp. 522 – 526, 1984.
3. А. М. Джрбашян, "О вложении классов $N\{\omega\}$ типа Неванлинны", Изв. РАН, том 63, № 4, 1999.
4. A. M. Djrbashian, "On a problem of M. M. Djrbashian", Bull. of Ir. Math. Soc. (to appear).
5. D. V. Widder, The Laplace Transform, Princeton Univ. Press, 1946.

3 декабря 1998

Институт математики
Национальная Академия Наук Армении