МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ, ОПЕРАТОРЫ ТЕПЛИЦА И ВЛОЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ

Р. Ф. Шамоян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 4, 1999

В статье изучаются задачи, касающиеся пространств $F_\alpha^{p,q}(\mathbf{U}^n)$ аналитических функций в единичном полидиске $\mathbf{U}^n$, обобщающие хорошо известные классы Харди, Соболева и Джрбашяна. Описаны мультипликаторы степенных рядов из $F_\alpha^{p,q}(\mathbf{U}^n)$ в классы BMOA, Липшица и Бесова. Получены также необходимые и достаточные условия в терминах символа φ, сохраняющего оператор Теплица $T_{\overline{\varphi}}$ ограниченным оператором, отображающим гладкий аналог пространства $F_\alpha^{p,q}(\mathbf{U}^n)$ в некоторое подпространство класса $H(\mathbf{U}^n)$ голоморфных функций в $\mathbf{U}^n$. Доказана теорема вложения для классов $F_\alpha^{p,q}(\mathbf{U}^n)$.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbf{U}^n = \{z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbf{C}^n : \ |z_j| < 1, j = 1, ..., n\}$ есть единичный полидиск в n-мерном комплексном пространстве $\mathbf{C}^n$, I – отрезок $[0,1]$ и T^n – остов полидиска $\mathbf{U}^n$. Обозначим через $H(\mathbf{U}^n)$ класс всех голоморфных функций в $\mathbf{U}^n$, а через $m_n(\xi)$ – n-мерную меру Лебега в T^n и $dR = dR_1 \cdots dR_n$. Пространство $F_\alpha^{p,q}(\mathbf{U}^n)$ аналитических функций в полидиске $\mathbf{U}^n$ при $0 < p, q, \alpha < \infty$ определяется следующим образом :

$$F_\alpha^{p,q}(\mathbf{U}^n) = \Big\{ f \in H(\mathbf{U}^n) : \ \|f\|^q_{F_\alpha^{p,q}} = \\ = \int_{T^n} \left(\int_{I^n} |f(R\xi)|^p (1-R)^{\alpha p - 1} dR \right)^{p/q} dm_n(\xi) < \infty \Big\}. \tag{1}$$

Легко видеть, что при $p = q$ пространство $F_\alpha^{p,q}(\mathbf{U}^n)$ совпадает с хорошо известным пространством М. М. Джрбашяна $A_\alpha^q(\mathbf{U}^n)$ в полидиске (см. [1], [2]), а в силу результатов [3], при $n = 1$, $p = 2$ пространство $F_\alpha^{p,q}(\mathbf{U}^n)$ совпадает с пространством Харди–Соболева $H_\alpha^q(U)$.

Некоторые свойства пространств $F_\alpha^{p,q}(\mathbf{U}^n)$ и их гладкие аналоги изучены в [4] – [7]. В работе [6] было получено полное описание функционалов для пространств $F^{p,q}_{\alpha}(\mathbf{U}^n)$, а также характеристик мультипликаторов степенных рядов из $F^{p,q}_{\alpha}(\mathbf{U}^n)$ в пространство Харди $H^s(U^n)$ при $0 < p, q \leq 1$, $0 < \max(p, q) \leq s$ и из $F^{p,q}_{\alpha}(\mathbf{U}^n)$ в $F^{t,s}_{\beta}(U^n)$ при $0 < s \leq t < \infty$, $0 < \max(p, q) \leq s \leq 1$.

В настоящей статье мы продолжаем изучение пространств $F^{p,q}_{\alpha}(\mathbf{U}^n)$, $0 < p, q < \infty$. В дальнейшем изложении мы будем использовать следующие стандартные обозначения :

$$rz = (r_1 z_1, ..., r_n z_n), \quad z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbf{C}^n, \quad r = (r_1, ..., r_n) \in I^n;$$

$$|1 - z|^\gamma = \prod_{k=1}^{n} |1 - z_k|^\gamma, \quad -\infty < \gamma < \infty, \quad z_k \neq 1, \quad k = 1, ..., n;$$

$$M_p(f, r) = \left(\int_{T^n} |f(r\xi)|^p \, dm_n(\xi) \right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty.$$

В пространстве $H(\mathbf{U}^n)$ рассмотрим оператор дробного дифференцирования D^α : для $f(z) = \sum\limits_{|k| \geq 0} a_k z^k \in H(\mathbf{U}^n)$ и $\alpha > -1$

$$(D^\alpha f)(z) = \sum_{|k| \geq 0} \frac{\Gamma(k + \alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(k + 1)} a_k z^k, \quad \Gamma(k + \alpha + 1) = \prod_{j=1}^{n} \Gamma(k_j + \alpha + 1).$$

Легко видеть, что $(D^\alpha f)(z) \in H(\mathbf{U}^n)$, если $f \in H(\mathbf{U}^n)$.

Статья имеет следующую структуру : §1 содержит полное описание мультипликаторов степенных рядов из $F^{p,q}_{\alpha}(\mathbf{U}^n)$ в классы BMOA, Липшица и Бесова в полидиске. В §2 вводятся гладкие аналоги пространств $F^{p,q}_{\alpha}(\mathbf{U}^n)$ и изучаются операторы Теплица $T_{\overline{\varphi}}$, действующие на этих пространствах. В §3 доказывается теорема вложения для классов $F^{p,q}_{\alpha}(\mathbf{U}^n)$. Задачи, рассматриваемые в §§1 и 2, исследовались в [8] – [12] для пространств Харди $H(\mathbf{U}^n)$.

§1. МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ ИЗ КЛАССОВ $F^{p,q}_{\alpha}(\mathbf{U}^n)$

Определение 1.1. Пусть X и Y – подпространства $H(\mathbf{U}^n)$. Последовательность комплексных чисел $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}^n_+}$, где $\mathbb{Z}_+$ – множество неотрицательных целых чисел, называется **мультипликатором** из X в Y, если для любой функции $f(z) = \sum\limits_{|k| \geq 0} a_k z^k \in X$ функция $g(z) = \sum\limits_{|k| \geq 0} a_k c_k z^k$ принадлежит Y. Множество таких последовательностей обозначим через $M_T(X, Y)$. Опираясь на результаты [6], дадим полное описание мультипликаторов из $F^{p,q}_{\alpha}(\mathbf{U}^n)$ в классы BMOA, Липшица $\Lambda^{\beta_1, ..., \beta_n}_{A}$ и Бесова B^{β}_{s}, определенные в полидиске. Введем следующие классы голоморфных функций в $\mathbf{U}^n$:

$$BMOA(\mathbf{U}^n) = \{f \in H(\mathbf{U}^n):$$

$$\|f\|_{BMOA} = \sup_{z\in\mathbf{U}^n}\left(\int_{T^n}|f(\xi)-f(z)|^s\frac{1-|z|^2}{|1-\bar{z}\xi|^2}\,dm_n(\xi)\right)^{1/s}<\infty\Big\},\quad 1\le s<\infty;$$

$$\Lambda_A^{\beta_1,\dots,\beta_n}(\mathbf{U}^n) = \Big\{f\in H(\mathbf{U}^n):\ \|f\|_{\Lambda_A^{\vec\beta}} =$$

$$=\sup_{z\in\mathbf{U}^n}\left|\frac{\partial^{|m|}g(z)}{\partial z_1^{m_1}\cdots\partial z_n^{m_n}}\right|(1-|z_1|)^{m_1-\beta_1}\cdots(1-|z_n|)^{m_n-\beta_n}<\infty\Big\},$$

$$m_i\in\mathbb{Z}_+,\quad m_i>\beta_i>0,\quad i=1,\dots,n,\quad |m|=m_1+\dots+m_n;$$

$$B_s^\beta(\mathbf{U}^n) = \Big\{f\in H(\mathbf{U}^n):\ \|f\|_{B_s^\beta} =$$

$$=\int_{\mathbf{U}^n}|D^m f(w)|^s(1-|w|)^{s(m-\beta)-1}dm_{2n}(w)<\infty\Big\},$$

$$m\in\mathbb{Z}_+,\quad m>\beta,\quad 0<s<\infty.$$

В силу теоремы Харди-Литтлвуда и условия Гарсия (см. [13] - [15]), при $n=1$ введенные пространства $BMOA(\mathbf{U}^n)$ и $\Lambda_A^{\beta_1,\dots,\beta_n}$ совпадают с пространством $BMOA(\mathbf{U})$ и классом Липшица-Зигмунда $\Lambda_A^\beta(\mathbf{U})$, соответственно. Следующая лемма из [6] будет часто использоваться в этой статье.

Лемма 1.1. Если $0<\max(p,q)\le s<\infty$, $0<\alpha<\infty$, то

$$\left(\int_{\mathbf{U}^n}|f(w)|^s(1-|w|)^{s(\alpha+\frac{1}{q})-2}dm_{2n}(w)\right)^{1/s}\le C\|f\|_{F_\alpha^{p,q}},\quad f\in F_\alpha^{p,q}(\mathbf{U}^n).$$

Здесь и ниже буква C с индексами или без будет обозначать положительные постоянные.

Теорема 1.1. Пусть $g(z)=\sum_{|k|\ge0}c_kz^k\in H(\mathbf{U}^n)$, $0<p,q\le1$. Следующие утверждения равносильны :

1) $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+^n}\in M_T(F_\alpha^{p,q}(\mathbf{U}^n),BMOA(\mathbf{U}^n))$,

2) $$\sup_{z\in\mathbf{U}^n}\left(\sup_{R\in I^n}\int_{T^n}|D^mg_R(\xi)-D^mg_R(z)|^s\frac{1-|z|^2}{|1-\bar{z}\xi|^2}\,dm_n(\xi)\right)^{1/s}\times$$
$$\times(1-R)^{m-\alpha-\frac{1}{q}+1}<\infty,$$

где $1\le s<\infty$, $g_R(z)=g(Rz)$, $m\in\mathbb{N}=\mathbb{Z}_+\setminus\{0\}$, $m>\alpha+\frac{1}{q}-1$.

Следующие утверждения также равносильны :

3) $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+^n}\in M_T(F_\alpha^{p,q}(\mathbf{U}^n),\Lambda_A^{\vec\beta}(\mathbf{U}^n))$,

4) $$\sup_{R\in I^n}\sup_{z\in\mathbf{U}^n}|D^mg_R^{|k|}(z)|(1-|z_1|)^{k_1-\beta_1}\cdots(1-|z_n|)^{k_n-\beta_n}(1-R)^{m-\alpha-\frac{1}{q}+1}<\infty,$$

где

$$g_R^{|k|}(z) = \frac{\partial^{|k|} g(Rz)}{\partial z_1^{k_1}\dots\partial z_n^{k_n}}, \quad k_j, m \in \mathbb{N}, \quad m > \alpha + \frac{1}{q} - 1, \quad k_j > \beta_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Доказательство : Положим

$$f_R(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{(1 - R_k z_k)^{m+1}}, \quad R_k \in I, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Имеет место следующее неравенство :

$$\int_I (1-v)^s |1 - wv|^t \, dv \le \frac{C'}{|1-w|^{t-(s+1)}}, \quad t > s+1 > 0, \quad w \in \mathbf{U}^n,$$

из которого получаем ($z = |z|\xi$)

$$\|f_R\|_{F_\alpha^{p,q}} = \left(\int_{T^n}\left(\int_{I^n} \frac{(1-|z|)^{\alpha p - 1}}{|1 - Rz|^{(m+1)p}}\, d|z|\right)^{q/p} dm_n(\xi)\right)^{1/q} \le \frac{C_1}{(1-R)^{(m+1-\alpha)-1/q}}.$$

Следовательно, если $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+^n} \in M_T(F_\alpha^{p,q}(\mathbf{U}^n), BMOA)$, то применяя теорему о замкнутом графе, находим

$$\left\|\sum_{|k|\ge 0} \frac{\Gamma(k+m+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(k+1)} c_k R^k z^k\right\|_{BMOA} \le$$

$$\le C_2 \left\|\sum_{|k|\ge 0} \frac{\Gamma(k+m+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(k+1)} R^k z^k\right\|_{F_\alpha^{p,q}(\mathbf{U}^n)} =$$

$$= C_2 \|f_R\|_{F_\alpha^{p,q}} \le \frac{C_3}{(1-R)^{(m+1-\alpha)-1/q}},$$

$$\|D^m g_R\|_{BMOA} \le \frac{C_3}{(1-R)^{(m+1-\alpha)-1/q}}, \quad m > \alpha + \frac{1}{q} - 1.$$

Следовательно, 1) $\Longrightarrow$ 2). Для доказательства 2) $\Longrightarrow$ 1) заметим, что для функций $h(z) = \sum_{|k|\ge 0} c_k a_k z^k$ и $f(z) = \sum_{|k|\ge 0} a_k z^k$ имеем

$$h(R^2\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n} f(tR) g(R\xi\bar{t})\, dm_n(t).$$

Достаточно доказать, что следующее условие удовлетворяется :

$$\sup_{z\in\mathbf{U}^n}\left(\int_{T^n} |h(R^2\xi) - h(R^2 z)|^s \frac{1-|z|^2}{|1-\bar{z}\xi|^2}\, dm_n(\xi)\right)^{1/s} < \infty, \quad 1 \le s < \infty, \quad R \in I. \tag{2}$$

Имеем

$$h_{R^2}(\xi) = h(R^2\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n} f(\bar{t}R) g(R\xi t)\, dm_n(t). \tag{3}$$

Далее, для функций $\widetilde{f}(w) = \sum_{|k|\geq 0} b_k w^k \in H(\mathbf{U}^n)$ и $\widetilde{g}(w) = \sum_{|k|\geq 0} g_k w^k \in H(\mathbf{U}^n)$ имеем

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n}\widetilde{f}(rt)\widetilde{g}(r\bar{t})\,dm_n(t) =$$
$$= \left(\frac{m}{\pi}\right)^n r_1^{-2m}\cdots r_n^{-2m}\int_0^{r_1}\cdots\int_0^{r_n}\int_{T^n} D^m\widetilde{g}(R\xi)\widetilde{f}(R\bar{\xi})\times$$
$$\times\prod_{l=1}^n (r_l^2 - R_l^2)^{m-1} R\,dR\,dm_n(\xi). \tag{4}$$

Действительно

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n}\widetilde{f}(rt)\widetilde{g}(r\bar{t})\,dm_n(t) = \sum_{|k|\geq 0} b_k g_k r_1^{2k_1}\cdots r_n^{2k_n},$$

$$J = \left(\frac{m}{\pi}\right)^n r_1^{-2m}\cdots r_n^{-2m}\int_0^{r_1}\cdots\int_0^{r_n}\int_{T^n} D^m\widetilde{g}(R\xi)\widetilde{f}(R\bar{\xi})\prod_{l=1}^n (r_l^2 - R_l^2)^{m-1}\times$$
$$\times R\,dR\,dm_n(\xi) = \left(\frac{m}{\pi}\right)^n (2\pi)^n r_1^{-2m}\cdots r_n^{-2m}\int_0^{r_1}\cdots\int_0^{r_n}\sum_{|k|\geq 0} b_k g_k\times$$
$$\times\prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(k_j+m+1)}{\Gamma(k_j+1)(\Gamma(m+1))^n} R_1^{2k_1}\cdots R_n^{2k_n}\prod_{l=1}^n (r_l^2 - R_l^2)^{m-1} R\,dR =$$
$$= (2m)^n\sum_{|k|\geq 0} b_k g_k\prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(k_j+m+1)}{\Gamma(k_j+1)(\Gamma(m+1))^n} r_1^{2k_1}\cdots r_n^{2k_n}\int_{I_n}\prod_{l=1}^n (1-t_l^2)^{m-1} t_l^{2k_l+1}\,dt_l.$$

Следовательно, в силу равенства

$$\int_0^1 (1-t_l^2)^{m-1} t_l^{2k_j+1}\,dt_l = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(m)\Gamma(k_j+1)}{\Gamma(m+k_j+1)}$$

для $l = 1,\dots,n$ получим $J = \sum_{|k|\geq 0} b_k g_k r_1^{2k_1}\cdots r_n^{2k_n}$. Отсюда

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\left|\int_{T^n}\widetilde{f}_\xi(Rt)\widetilde{g}_{r\zeta}(R\bar{t})\,dm_n(t)\right| \leq$$
$$\leq \frac{c(m,n)}{R^{2mn}}\int_{\mathbf{U}^n}|D^m\widetilde{g}_{r\zeta}(w)|\cdot\left|\widetilde{f}_\xi(\overline{w})\right|(1-|w|)^{m-1}\,dm_{2n}(w),\quad \zeta,\xi\in T^n, \tag{5}$$

где $\widetilde{f}_\xi(w) = \widetilde{f}(\xi w)$ и $\widetilde{g}_{r\zeta}(w) = \widetilde{g}(r\zeta w)$. В силу (3) и (4)

$$|h_{R^2}(\xi) - h_{R^2}(z)| = \frac{1}{(2\pi)^n}\left|\int_{T^n}(g_\xi - g_z)(Rt)f(\bar{t}R)\,dm_n(t)\right| \leq$$
$$\leq \frac{c(m,n)}{R^{2mn}}\int_{\mathbf{U}^n}|D^m g(\xi w) - D^m g(zw)|\cdot|f(\overline{w})|(1-|w|)^{m-1}\,dm_{2n}(w). \tag{6}$$

Очевидно, что

$$\sup_{z\in\mathbf{U}^n}|\varphi(z)| = \sup_{z\in\mathbf{U}^n}|\varphi(e^{it}z)|,\quad e^{it} = (e^{it_1},\dots,e^{it_n}),\quad \varphi\in H(\mathbf{U}^n).$$

Поэтому условие (1) равносильно следующему :

$$\sup_{R\in I^n}(1-R)^{m-\alpha+1-1/q}\left(\sup_{z\in U^n}\int_{T^n}|D^m g_R(e^{it}\xi)-\right.$$
$$\left.-D^m g_R(e^{it}z)|^s\frac{1-|z|^2}{|1-\overline{ze^{it}}e^{it}\xi|^2}\,dm_n(\xi)\right)^{1/s}<\infty. \tag{7}$$

Учитывая (6), получаем

$$\left(\int_{T^n}\left[|h(R^2\xi)-h(R^2z)|\left(\frac{1-|z|^2}{|1-\overline{z}\xi|^2}\right)^{1/s}\right]^s dm_n(\xi)\right)^{1/s}\le$$
$$\le\frac{c(m,n)}{R^{2mn}}\left[\int_{T^n}\left(\int_{U^n}|D^m g(\xi w)-D^m g(zw)|\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\left(\frac{1-|z|^2}{|1-\overline{z}\xi|^2}\right)^{1/s}|f(\overline{w})|(1-|w|)^{m-1}dm_{2n}(w)\right)^s dm_n(\xi)\right]^{1/s}.$$

Применение неравенства Минковского дает $||h_{R^2}||_{BMOA}\le$

$$\le\frac{c(m,n)}{R^{2mn}}\int_{U^n}\left(\sup_{z\in U^n}\int_{T^n}|D^m g(\xi w)-D^m g(zw)|^s\frac{1-|z|^2}{|1-\overline{z}\xi|^2}\,dm_n(\xi)\right)^{1/s}\times$$
$$\times|f(\overline{w})|(1-|w|)^{m-1}dm_{2n}(w).$$

Из (7) получаем

$$||h_{R^2}||_{BMOA}\le\frac{C_1(m,n)}{R^{2mn}}\int_{U^n}|f(w)|(1-|w|)^{\alpha-2+1/q}dm_{2n}(w).$$

Наконец, применяя Лемму 1.1 с $s=1$, получим

$$||h||_{BMOA}\le C_2(m,n)\,||f||_{F^{p,q}_\alpha(U^n)},\quad 0<p,q\le1,\quad 0<\alpha<\infty.$$

Этим доказывается импликация 2) $\Longrightarrow$ 1). Доказательство импликации 3) $\Longrightarrow$ 4) аналогично доказательству первой части теоремы. Поэтому докажем только импликацию 4) $\Longrightarrow$ 3). Из (2) и (5) следует, что

$$|h^{|k|}_{r^2}(z)|=\frac{1}{(2\pi)^n}\left|\int_{T^n}f(rt)g^{|k|}_{r\overline{t}}(z)\,dm_n(t)\right|\le$$
$$\le\frac{C(m,n)}{r^{2mn}}\int_{U^n}|D^m g^{|k|}_w(z)|\cdot|f(\overline{w})|(1-|w|)^{m-1}dm_{2n}(w).$$

Далее, имеем

$$\sup_{z\in U^n}|h^{|k|}(z)|(1-|z_1|)^{k_1-\beta_1}\cdots(1-|z_n|)^{k_n-\beta_n}\le$$

$$\leq C(m,n)\int_{\mathbf{U}^n}\left(\sup_{z\in\mathbf{U}^n}|D^m g_R^{|k|}(z)|(1-|z_1|)^{k_1-\beta_1}\cdots(1-|z_n|)^{k_n-\beta_n}\right)\times$$
$$\times|f(\overline{w})|(1-R)^{m-1}dm_{2n}(w)\leq$$
$$\leq C_1(m,n)\int_{\mathbf{U}^n}|f(w)|(1-|w|)^{\alpha-2+1/q}dm_{2n}(w),\quad k_j\in\mathbb{N},\quad k_j>\beta_j,\quad j=1,\dots,n.$$

Из (7) получим $\|h\|_{\Lambda_A^{\vec\beta}}\leq C_2(m,n)\|f\|_{F_\alpha^{p,q}(\mathbf{U}^n)}$. Этим доказывается импликация 4) $\Longrightarrow$ 3). Теорема 1.1 доказана.

Следующая теорема дает полную характеристику мультипликаторов степенных рядов из $F_\alpha^{p,q}(\mathbf{U}^n)$ в классы Бесова $B_s^\beta(\mathbf{U}^n)$ для случая $0<\max(p,q)\leq s\leq 1$, $s(\alpha+1/q)<2$. Нам понадобится следующая лемма, которая вытекает из результатов работы [2].

Лемма 1.2. **Пусть** $g,f\in H(\mathbf{U}^n)$, $0<p\leq 1$, $r\in I^n$ **и** $m\in\mathbb{N}$. **Тогда**

$$\left(\int_{\mathbf{U}^n}|f_\eta(w)|\cdot|D^m g_r(w)|(1-|w|)^{m-1}dm_{2n}(w)\right)^p\leq$$
$$\leq C\int_{\mathbf{U}^n}|f_\eta(w)|^p|D^m g_r(w)|^p(1-|w|)^{pm+p-2}dm_{2n}(w).$$

Доказательство : Обозначим через $\mathbf{U}_{jk}$ и $\mathbf{U}_{jk}^*$ двоичные разбиения полидиска $\mathbf{U}^n$ (см. [2], [16]). Так как функция $|f_\eta(w)D^m\overline{g}_r(w)|$ n-субгармонична (см. [16]), то имеем

$$\max_{w\in\overline{\mathbf{U}_{jk}}}|f_\eta(w)|^p|D^m\overline{g}_r(w)|^p\leq\frac{C}{m_{2n}(\mathbf{U}_{jk}^*)}\int_{\mathbf{U}_{jk}^*}|f_\eta(w)|^p|D^m\overline{g}_r(w)|^p dm_{2n}(w).$$

Легко проверить, что $C_4 2^{-2|k|}\leq m_{2n}(\mathbf{U}_{jk}^*)\leq C_5 2^{-2|k|}$, $C_4' 2^{-2|k|}\leq 1-|w|\leq C_5' 2^{-2|k|}$, $w\in\mathbf{U}_{jk}$, $|k|=k_1+\cdots+k_n$. Следовательно, учитывая, что разбиение $\mathbf{U}_{jk}^*$ конечной кратности (см. [16]), получаем

$$\left(\int_{\mathbf{U}^n}|f_\eta(w)|\cdot|D^m g_r(\overline{w})|(1-|w|)^{m-1}dm_{2n}(w)\right)^p\leq$$
$$\leq\sum_{j,k}\max_{w\in\overline{\mathbf{U}_{jk}}}|f_\eta(w)|^p|D^m\overline{g}_r(w)|^p\left(\int_{\mathbf{U}_{jk}}(1-|w|)^{m-1}dm_{2n}(w)\right)^p\leq$$
$$\leq C_6\sum_{j,k}\left(\int_{\mathbf{U}_{jk}^*}|f_\eta(w)|^p|D^m\overline{g}_r(w)|^p dm_{2n}(w)\right)2^{2|k|}\times$$
$$\times\left(\int_{\mathbf{U}_{jk}}(1-|w|)^{m-1}dm_{2n}(w)\right)^p\leq$$
$$\leq C_7\sum_{j,k}\int_{\mathbf{U}_{jk}}|f_\eta(w)|^p|D^m\overline{g}_r(w)|^p dm_{2n}(w)2^{2|k|}2^{-2|k|p}2^{-|k|(m-1)p}\leq$$

$$\leq C_8 \sum_{j,k} \int_{U^*_{jk}} |f_\eta(w)|^p |D^m g_r(w)|^p (1-|w|)^{p(m-1)+2p-2} dm_{2n}(w) \leq$$

$$\leq C_9 \int_{U^n} |f_\eta(w)|^p |D^m g_r(w)|^p (1-|w|)^{p(m+1)-2} dm_{2n}(w).$$

Лемма 1.2 доказана.

Теорема 1.2. **Если** $g(z) = \sum_{|k|\geq 0} c_k z^k \in H(\mathbf{U}^n)$, $0 < \max(p,q) \leq s \leq 1$, $s(\alpha + 1/q) < 2$, **то следующие утверждения равносильны :**

$$1) \quad \{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}^n_+} \in M_T(F^{p,q}_\alpha(\mathbf{U}^n), B^\beta_s(\mathbf{U}^n)),$$

$$2) \quad \sup_{r \in I^n} M_s(D^m D^k g, r)(1-r)^{m-\beta+k-\alpha+1-\frac{1}{s}} < \infty, \tag{8}$$

где $m, k \in \mathbb{N}$, $m > \beta$, $k \geq \frac{2}{s} - 1$.

Доказательство : Из неравенства (см. [18])

$$M_s(D^m D^k g) \leq C(1-r)^{m-\beta} ||D^m D^k g||_{B^\beta_s},$$

и Теоремы 1.1 следует импликация 1) $\Longrightarrow$ 2). Для доказательства 2) $\Longrightarrow$ 1) заметим, что для функций $h(z) = \sum_{|k|\geq 0} c_k a_k z^k$ и $f(z) = \sum_{|k|\geq 0} a_k z^k$ имеем

$$D^m h(\rho r z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} D^m g(\rho r \bar{t}) f(r\zeta t)\, dm_n(t), \quad z = r\zeta.$$

Из (4) следует, что $|D^m h(\rho r z)| \leq$

$$\leq \frac{C(m,n)}{\rho^{2mn}} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \int_{T^n} |f_\eta(R\xi)| \cdot |D^m D^k g_r(R\bar{\xi})| (1-R)^{k-1} R\, dR\, dm_n(\xi),$$

где $\eta_j = \zeta_j r_j / \rho$, $r_j, \rho \in (0,1)$, $j = 1, ..., n$. Устремляя $\rho \to 1$, из Леммы 1.2 и неравенства $(1-R)^\gamma \leq (1-Rr)^\gamma$, $\quad \gamma \geq 0, \quad r, R \in (0,1)$, при $k \geq \frac{2}{s} - 1$ получаем

$$|D^m h(r^2\zeta)|^s \leq$$
$$\leq C_1(m,n) \int_{I^n} \int_{T^n} |f(R\zeta r\xi)|^s |D^m D^k g(rR\bar{\xi})|^s (1-Rr)^{sk+s-2} R\, dR\, dm_n(\xi).$$

Проинтегрировав обе части по T^n и применив теорему Фубини, из (8) имеем

$$\int_{T^n} |D^m h(r^2\zeta)|^s dm_n(\zeta) \leq C_1(m,n) \int_{I^n} \int_{T^n} |f(Rr\xi)|^s dm_n(\xi) \times$$
$$\times \int_{T^n} |D^m D^k g(rR\zeta)|^s dm_n(\zeta)(1-Rr)^{sk+s-2} R\, dR \leq$$

$$\leq C_1(m,n) \sup_{R \in I^n} \left\{ \int_{T^n} |D^m D^k g(rR\zeta)|\, dm_n(\zeta)(1-Rr)^{sm+sk+s-s\beta-s\alpha-s/q} \right\} \times$$

$$\times \int_{I^n}\int_{T^n} |f(Rr\xi)|^s dm_n(\xi)(1-Rr)^{s\alpha+s\beta-sm-2+s/q} R\,dR.$$

Далее, из неравенства

$$\int_0^1 (1-Rr)^{-\lambda}(1-r)^{\gamma} dr \le C(1-R)^{-\lambda+\gamma+1}, \quad \lambda > \gamma+1,$$

вытекает

$$\|h\|^s_{B^\beta_s} = \int_{I^n}\int_{T^n} |D^m h(r\zeta)|^s (1-r)^{s(m-\beta)-1} r\,dr\,dm_n(\zeta) \le$$

$$\le C_2(m,n) \int\limits_{I^n}\int\limits_{T^n}\int\limits_{I^n} |f(Rr\xi)|^s dm_n(\xi)(1-r)^{s(m-\beta)-1}(1-Rr)^{s\alpha-s(m-\beta)-2+s/q}\,dR\,dr \le$$

$$\le C_3(m,n)\int_{\mathbf{U}^n} |f(w)|^s (1-|w|)^{s(\alpha+1/q)-2} dm_{2n}(w), \quad w = R\xi.$$

Теперь, используя Лемму 1.1, получим $\|h\|_{B^\beta_s} \le C_4(m,n)\|f\|_{F^{p,q}_\alpha(\mathbf{U}^n)}$, откуда следует 2) $\Longrightarrow$ 1). Теорема 1.2 доказана.

§2. ГЛАДКИЕ АНАЛОГИ ПРОСТРАНСТВА $F^{p,q}_\alpha(\mathbf{U}^n)$ И ОПЕРАТОРОВ ТЕПЛИЦА

Гладкий аналог пространства $F^{p,q}_\alpha(\mathbf{U}^n)$ определим для $0 < p,q,\alpha,k < \infty$, $k \in \mathbb{N}$ следующим образом :

$$F^{p,q}_{k,\alpha}(\mathbf{U}^n) = \left\{ f \in H(\mathbf{U}^n) : \|f\|_{F^{p,q}_{k,\alpha}} = \left\|D^k f\right\|_{F^{p,q}_\alpha} < \infty \right\}.$$

Рассмотрим оператор Теплица $T_{\overline{\varphi}}$ с индексом $\overline{\varphi}$ (см. [17])

$$(T_{\overline{\varphi}} f)(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{T^n} \frac{\overline{\varphi(t)} f(t)}{1 - z\overline{t}}\,dm_n(t), \quad \varphi \in L^1(T^n).$$

В этом параграфе выводятся необходимые и достаточные условия в терминах символа φ, при которых $T_{\overline{\varphi}}$ является ограниченным оператором из $F^{p,q}_{k,\alpha}(\mathbf{U}^n)$ в X, где X – некоторое подпространство $H(\mathbf{U}^n)$. Пусть $A^s_{m,\alpha}$ – подпространство $H(\mathbf{U}^n)$, определяемое при $0 < s,\alpha < \infty$ формулой

$$A^s_{m,\alpha}(\mathbf{U}^n) = \Big\{ f \in H(\mathbf{U}^n) : \|f\|_{A^s_{m,\alpha}} =$$
$$= \left(\int_{\mathbf{U}^n} |D^m f|^s (1-|w|)^{\alpha-1} dm_{2n}(w)\right)^{1/s} < \infty \Big\}.$$

Теорема 2.1. Пусть $0 < \max(p,q) \le s$, $1 < s < \infty$, $k > \alpha + \frac{1}{q} - 1$, $\gamma = (k-1)s - (m-1)(s-1) > \frac{s}{q} - 2$ и $0 < \alpha \le \frac{\gamma+2}{s}$. Тогда оператор Теплица

$T_{\overline{\varphi}}$, **действующий из $F^{p,q}_{k,\alpha}(\mathbf{U}^n)$ в $A^s_{m,m}(\mathbf{U}^n)$, ограничен тогда и только тогда, когда $\varphi \in H^\infty(\mathbf{U}^n)$.**

Доказательство : Необходимость. Пусть $T_{\overline{\varphi}}$ - ограниченный оператор из $F^{p,q}_{k,\alpha}(\mathbf{U}^n)$ в $A^s_{m,m}(\mathbf{U}^n)$. Рассмотрим функцию

$$f_r(z) = \frac{(1-r)^{k+1-\alpha-1/q}}{1-rz}, \quad 1-rz = \prod_{i=1}^n (1-r_i z_i), \quad r \in I^n, \quad z \in \mathbf{U}^n.$$

Легко проверить, что для $k > \alpha + \frac{1}{q} - 1$

$$\|f_r\|_{F^{p,q}_{k,\alpha}(\mathbf{U}^n)} \le C, \quad \|T_{\overline{\varphi}}(f_r)\|_{A^s_{m,m}} = |\varphi(r)| \cdot \|f_r\|_{F^{p,q}_{k,\alpha}(\mathbf{U}^n)}.$$

Следовательно, $|\varphi(r)| \le C'$ при $r \in I^n$. Необходимость оценки $|\varphi(z)| \le C''$ при $z \in \mathbf{U}^n$ следует из свойств функции $f_r(e^{i\theta}z)$.

Достаточность. Пусть $\varphi \in H^\infty(\mathbf{U}^n)$ и $F(w) = (T_{\overline{\varphi}}f)(w)$. Из соображений двойственности

$$\|F_R\|_{A^s_{m,m}} = \left(\int_{\mathbf{U}^n} |D^m F_R(w)|^s (1-|w|^2)^{m-1} dm_{2n}(w)\right)^{1/s} =$$
$$= \left|\int_{\mathbf{U}^n} D^m F_R(w)\overline{G_R(w)}(1-|w|^2)^{m-1} dm_{2n}(w)\right|,$$

где $F_R(w) = F(Rw)$, а $G_R(w)$ принадлежит пространству $L^{s'}_{m-1}$ измеримых на $\mathbf{U}^n$ функций f, удовлетворяющих условию

$$\int_{\mathbf{U}^n} |f(z)|^{s'} (1-|z|^2)^{m-1} dm_{2n}(z) < \infty, \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1.$$

Имеем

$$\|F_R\|_{A^s_{m,m}} = C(n)\left|\int_{\mathbf{U}^n}\int_{T^n} \frac{\overline{\varphi(t)} f(t) \overline{G_R(w)}(1-|w|^2)^{m-1}}{(1-\bar{t}Rw)^{m+1}} \, dm_{2n}(w)\, dm_n(t)\right|.$$

Определим следующее отображение :

$$S(G_R) = \phi(\bar{t}R) = \int_{\mathbf{U}^n} \frac{\overline{G_R(w)}(1-|w|^2)^{m-1}}{(1-\bar{t}Rw)^{m+1}} \, dm_{2n}(w),$$

представляющее проекцию Бергмана из $L^{s'}_{m-1}(\mathbf{U}^n)$ на $A^{s'}_{m-1}(\mathbf{U}^n) = L^{s'}_{m-1}(\mathbf{U}^n) \cap H(\mathbf{U}^n)$. Следовательно, применяя теорему Фубини, получим

$$\|F_R\|_{A^s_{m,m}} = C(n)\left|\int_{T^n} \phi(\bar{t}R) f(t)\overline{\varphi(t)}\, dm_n(t)\right|, \quad \phi(w) \in A^{s'}_{m-1}(\mathbf{U}^n)$$

Таким образом

$$\|F\|_{A^{s}_{m,m}} = \lim_{R\to 1} \|F_R\|_{A^{s}_{m,m}} = C(n)\left|\lim_{R\to 1}\int_{T^n} \phi(\bar{t}R) f(Rt)\overline{\varphi}(\bar{t}R)\, dm_n(t)\right|.$$

Учитывая (4), имеем

$$\|F\|_{A^{s}_{m,m}} \le C\int_{\mathbf{U}^n} |D^k f(w)|(1-|w|)^{k-1}|\overline{\varphi}(w)|\cdot|\phi(w)|\, dm_{2n}(w) \le$$

$$\le C\|\varphi\|_\infty \int_{\mathbf{U}^n} |D^k f(w)|(1-|w|)^{k-1}|\phi(w)|\, dm_{2n}(w).$$

Применяя Лемму 1.1 и неравенство Гельдера, получим

$$\|F\|_{A^{s}_{m,m}} \le C\|\varphi\|_\infty \left(\int_{\mathbf{U}^n} |D^k f(w)|^s (1-|w|)^\gamma dm_{2n}(w)\right)^{1/s} \times$$

$$\times \left(\int_{\mathbf{U}^n} |\phi(w)|^{s'}(1-|w|)^{m-1} dm_{2n}(w)\right)^{1/s'} \le C\|\varphi\|_\infty \|\phi\|_{A^{s'}_{m,0}} \|f\|_{F^{p,q}_{k,\alpha}(\mathbf{U}^n)} < \infty.$$

Теорема 2.1 доказана.

Пусть H^s_m – пространство Харди–Соболева в полидиске, определенное по формуле

$$H^s_m(\mathbf{U}^n) = \{f \in H(\mathbf{U}^n) : \|D^m f\|_{H^s} < \infty\}, \quad 0 < s < \infty, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Теорема 2.2. Пусть

$$0 < \max(p,q) \le 1, \quad 1 < s < \infty, \quad k, m \in \mathbb{N}, \quad k - m > \frac{1}{q} - \frac{1}{s}, \quad 0 < \alpha < \frac{1}{s} - \frac{1}{q} + 1.$$

Тогда оператор Теплица $T_{\overline{\varphi}}$, действующий из $F^{p,q}_{k,\alpha}(\mathbf{U}^n)$ в $H^s_m(\mathbf{U}^n)$, ограничен тогда и только тогда, когда $\varphi \in H^\infty(\mathbf{U}^n)$.

Доказательство : Необходимость можно доказать методом примененным в доказательстве Теоремы 2.1 для функции

$$f_r(z) = \frac{(1-r)^{m+1-1/s}}{1-rz}, \quad r \in I^n, \quad z \in \mathbf{U}^n.$$

Для доказательства достаточности, положим $G(z) = (T_{\overline{\varphi}} f)(z)$. Вновь по дуальности при $\phi \in L^{s'}(T^n)$ имеем

$$\|D^m G_R\|_{H^s} = \left(\int_{T^n} |D^m G(Re^{i\varphi})|^s dm_n(\varphi)\right)^{1/s} =$$

$$= \left|\int_{T^n} D^m G(Re^{i\varphi})\overline{\phi(Re^{i\varphi})}\, dm_n(\varphi)\right|,$$

где $G_R(z) = G(Rz)$, $R \in (0,1)$. Далее, имеем

$$D^m G(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{T^n} \frac{\overline{\varphi(t)} f(t)}{(1 - z\bar{t})^{m+1}}\, dm_n(t), \quad z = Re^{i\psi}.$$

Следовательно

$$\|D^m G\|_{H^s} = \lim_{R\to 1} \|D^m G_R\|_{H^s} =$$
$$= C(n) \left| \lim_{R\to 1} \int_{T^n}\int_{T^n} \overline{\phi(Re^{i\psi})} \frac{\overline{\varphi(t)} f(t)}{(1 - \bar{t}Re^{i\psi})^{m+1}}\, dm_n(t)\, dm_n(\psi) \right| =$$
$$= C(n) \left| \lim_{R\to 1} \int_{T^n} D^m \left(\int_{T^n} \frac{\overline{\phi(Re^{i\psi})}}{1 - \bar{t}Re^{i\psi}}\, dm_n(\psi) \right) \overline{\varphi}(\bar{t}) f(t)\, dm_n(t) \right|.$$

Так как оператор

$$S(\phi)(\bar{t}R) = h(\bar{t}R) = \int_{T^n} \frac{\bar{\phi}(Re^{-i\psi})}{1 - \bar{t}Re^{i\psi}}\, dm_n(\psi)$$

является проектором Рисса на ϕ, то имеем $h(\bar{t}R) \in H^{s'}(T^n)$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$. Таким образом

$$\|D^m G\|_{H^s} = C(n) \left| \lim_{R\to 1} \int_{T^n} f(Rt)\overline{\varphi}(\bar{t}R) D^m h(\bar{t}R)\, dm_n(t) \right| \le$$
$$\le C_1(n) \int_{\mathbf{U}^n} |D^k f(w)|(1 - |w|)^{k-1} |\overline{\varphi}(w)| \cdot |D^m h(w)|\, dm_{2n}(w) \le$$
$$\le C_1(n) \|\varphi\|_\infty \int_{\mathbf{U}^n} |D^k f(w)|(1 - |w|)^{k-1} |D^m h(w)|\, dm_{2n}(w).$$

Согласно неравенству Гельдера имеем

$$\|D^m G\|_{H^s} \le C_1(n) \|\varphi\|_\infty \int_{I^n} M_s(D^k f, t) M_{s'}(D^m h, t)(1 - t)^{k-1} dt.$$

Известно (см. [18]), что $M_s(D^m h, t) \le C(1 - t)^{-m} M_s(h, t)$. Откуда следует, что

$$\|D^m G\|_{H^s} \le C_2 \|\varphi\|_\infty \|h\|_{H^{s'}} \int_{I^n} M_s(D^k f, t)(1 - t)^{k-m-1} dt, \quad k > m, \quad k, m \in \mathbb{N}.$$

Заметим далее, что (см. Лемму 1.1)

$$\int_{I^n} M_s(G, r)(1 - r)^\alpha dr \le$$
$$\le C' \int_{\mathbf{U}^n} |G(w)|(1 - |w|)^{\alpha - 1 + 1/s} dm_{2n}(w), \quad G \in H(\mathbf{U}^n), \quad \alpha > -1, \quad s \ge 1,$$

$$\int_{\mathbf{U}^n} |G(w)|(1 - |w|)^{\alpha - 1 + 1/s} dm_{2n}(w) \le$$
$$\le C'' \left[\int_{T^n} \left(\int_{I^n} |G(w)|^p (1 - R)^{tp - 1} dR \right)^{q/p} dm_n(\zeta) \right]^{1/q},$$
$$w = R\zeta, \quad -\frac{1}{s} < \alpha < \infty, \quad t = \frac{1}{s} - \frac{1}{q} + \alpha + 1 > 0.$$

Комбинируя последние два неравенства получим

$$\|D^m G\|_{H^s} \le C_3 \|\varphi\|_\infty \|h\|_{H^{s'}} \|f\|_{F^{p,q}_{\alpha,\alpha}(\mathbf{U}^n)} < \infty.$$

Теорема 2.2 доказана.

§3. ТЕОРЕМА ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ $F_\alpha^{p,q}(\mathbf{U}^n)$

В этом параграфе доказывается теорема вложения для пространств $F_\alpha^{p,q}(\mathbf{U}^n)$. Аналогичный результат для пространств Харди и Неванлинны был получен в [8].

Лемма 3.1. **Пусть** $f \in H(\mathbf{U}^n)$, $0 < p \le q < \infty$ **и** $-1 < \beta < \infty$. **Тогда**

$$\int_{I^n} M_q^p(f,r)(1-r)^\beta dr \le C \int_{\mathbf{U}^n} |f(w)|^p (1-|w|)^{\beta-1+p/q} dm_{2n}(w).$$

Доказательство : Обозначим через $\mathbf{U}_{jk}$ и $\mathbf{U}_{jk}^*$ двоичные разбиения полидиска $\mathbf{U}^n$ (см. [16]). Поскольку

$$\left(\sum_{|k|\ge 0} |a_k|\right)^\gamma \le \sum_{|k|\ge 0} |a_k|^\gamma, \quad a_k = a_{k_1,\dots,k_n}, \quad 0<\gamma\le 1, \tag{9}$$

то

$$J' = \int_{I^n}\left(\int_{T^n} |f(R\xi)|^q dm_n(\xi)\right)^{p/q}(1-R)^\beta dR =$$

$$= \sum_{k_1,\dots,k_n}\int_{I_{k_1,\dots,k_n}}\left(\sum_j \int_{I_{jk}} |f(R\xi)|^q dm_n(\xi)\right)^{p/q}(1-R)^\beta dR \le$$

$$\le C\sum_{k_1,\dots,k_n}\int_{I_{k_1,\dots,k_n}}\sum_j\left(\int_{I_{jk}} |f(R\xi)|^q dm_n(\xi)\right)^{p/q} 2^{-|k|\beta} dR, \tag{10}$$

где

$$I_{jk} = \{\xi \in T^n : r\xi \in \mathbf{U}_{jk}\},\ I_{k_1,\dots,k_n} = [1-2^{-k_1}, 1-2^{-k_1-1}]\times\dots\times[1-2^{-k_n}, 1-2^{-k_n-1}]. \tag{11}$$

Так как

$$\left(\int_{I_{jk}} |f(R\xi)|^q dm_n(\xi)\right)^{p/q} \le C_1 \max_{\xi\in I_{jk}} |f(R\xi)|^p 2^{-|k|p/q},$$

то

$$J' \le C' \sum_{k_1,\dots,k_n}\sum_j 2^{-|k|(p/q+\beta)}\int_{I_{k_1,\dots,k_n}} \max_{\xi\in I_{jk}} |f(R\xi)|^p dR.$$

Интегрируя по $I_{k_1,\dots,k_n}$ обе части неравенства

$$|f(R\xi)|^p \le C_2 2^{2|k|}\int_{\mathbf{U}_{jk}} |f(w)|^p dm_{2n}(w), \quad w = R\xi \in \mathbf{U}_{jk} \tag{12}$$

(см. [16]), получим

$$\int_{I_{k_1,\dots,k_n}} \max_{\xi\in I_{jk}} |f(R\xi)|^p dR \le C 2^{|k|}\int_{\mathbf{U}_{jk}} |f(w)|^p dm_{2n}(w).$$

Принимая во внимание, что разбиение $\mathbf{U}^*_{jk}$ имеет конечную кратность (см. [16]) и используя неравенство $C'2^{-|k|} \le 1 - R \le C''2^{-|k|}$, $R \in I_{k_1,\dots,k_n}$, получаем

$$J' \le C_3 \sum_{k_1,\dots,k_n} \sum_j 2^{-|k|(p/q+\beta-1)} \int_{\mathbf{U}_{jk}} |f(w)|^p dm_{2n}(w) \le$$

$$\le C_4 \sum_{k_1,\dots,k_n} \sum_j \int_{\mathbf{U}_{jk}} |f(w)|^p (1-|w|)^{p/q+\beta-1} dm_{2n}(w) \le$$

$$\le C_5 \int_{\mathbf{U}^n} |f(w)|^p (1-|w|)^{p/q+\beta-1} dm_{2n}(w).$$

Лемма 3.1 доказана.

Теорема 3.1. Пусть пространство $F^{p,q}_\beta(\mathbf{U}^n)$ определяется формулой (1) с $\beta = p\alpha - 1$. Тогда

1) $F^{p,q}_{\beta_0} \subset \bigcap_{\beta>\beta_0} F^{p,q}_\beta$ при $0 < p < q < \infty$,

2) $F^{p_0,q}_\beta \subset \bigcap_{p_0>p} F^{p,q}_\beta$ при $0 < p < p_0 < q < \infty$, $-1 < \beta < \infty$,

3) $\bigcup_{p_0<p} F^{p,q}_\beta \subset F^{p_0,q}_\beta$ при $0 < p \le q < \infty$, $-1 < \beta < \infty$, $\dfrac{2}{p} < \dfrac{1}{p_0} + \dfrac{1}{q}$.

Доказательство : Не умаляя общности можхо предположить, что $\beta_0 = 0$. Вложение $F^{p,q}_0 \subseteq \bigcap_{\beta>0} F^{p,q}_\beta$ очевидно. Покажем, что оно является строгим вложением. Разделим параллелепипед $I_{k_1,\dots,k_n}$ (см. (11)) на N^n равных частей так, чтобы интегральные суммы

$$S(\gamma) = \frac{2^{-|k|}}{N^n} \sum_{j_1=1}^{N} \cdots \sum_{j_n=1}^{N} |f(R_{k_1 j_1}\xi_1, \dots, R_{k_n j_n}\xi_n)|^\gamma, \quad \gamma = p, q$$

аппроксимировали интегралы $\int_{I_{k_1,\dots,k_n}} |f(R\xi)|^\gamma dR$. Из (9) и (10), при $1 < p < q < \infty$ имеем

$$J = \int_{T^n} \left(\int_{I^n} |f(R\xi)|^p (1-R)^\beta dR \right)^{q/p} dm_n(\xi) \le$$

$$\le C \int_{T^n} \left(\sum_{k_1,\dots,k_n \ge 0} 2^{-|k|\beta/p} (S(p))^{1/p} \right)^q dm_n(\xi).$$

В силу неравенства

$$\left(\sum_{j=1}^{M} \frac{a_j^p}{M} \right)^{1/p} \le \left(\sum_{j=1}^{M} \frac{a_j^q}{M} \right)^{1/q}, \quad a_j > 0, \quad 0 < p \le q < \infty,$$

получаем

$$J \le C_1 \int_{T^n} \left[\sum_{k_1,\dots,k_n \ge 0} 2^{-|k|\beta/p} 2^{-|k|/p} (2^{|k|} S(q))^{1/q} \right]^q dm_n(\xi), \quad |k| = k_1 + \dots + k_n.$$

Так как $C'(1-R) \le 2^{-|k|} \le C''(1-R)$ для $R \in I_{k_1,\dots,k_n}$, то из неравенства Гельдера находим

$$J \le C_2 \int_{T^n} \left(\sum_{k_1,\dots,k_n \ge 0} 2^{-|k|\beta q/p} \right)^{q/p} \left(\sum_{k_1,\dots,k_n \ge 0} 2^{-|k|(q/p-1)} S(q)) \right) dm_n(\xi) \le$$

$$\le C_3 \int_{T^n} \sum_{k_1,\dots,k_n \ge 0} 2^{-|k|(q/p-1)} dm_n(\xi) \int_{I_{k_1,\dots,k_n}} |f(R\xi)|^q dR \le$$

$$\le C_4 \int_{\mathbf{U}^n} |f(R\xi)|^q (1-R)^{q/p-1} R\, dR\, dm_n(\xi).$$

Из Леммы 1.1 следует, что $F_0^{p,q} \subseteq A^q_{q/p-1}$. Пусть теперь $F_0^{p,q} \supseteq A^q_{q/p-1}$. Так как $q > p$, то

$$\int_{\mathbf{U}^n} |f(w)|^q (1-|w|)^{\frac{q}{p}-1} dm_{2n}(w) \ge C_5 \int_{\mathbf{U}^n} |f(w)|^p dm_{2n}(w).$$

Следовательно, при $s = \frac{q}{p} - 1$ имеем

$$\begin{aligned} &\sum_{k_1,\dots,k_n \ge 0} \sum_{j_1,\dots,j_n} \left[2^{|k|p(s+2)/q} m_{2n}(\mathbf{U}_{jk}) \right]^{q/(q-p)} = \\ &= \sum_{k_1,\dots,k_n \ge 0} \left(2^{|k|} 2^{|k|ps/(q-p)} 2^{-2|k|} \right) = \infty. \end{aligned} \tag{13}$$

С другой стороны, из известного результата Олейник [19] получаем, что из включения $A^q_s \subset L^p(\mathbf{U}^n, \mu)$, $q > p$ следует сходимость сумм в левой части (13). Из этого противоречия получаем $F_0^{p,q} \subset A^q_{q/p-1} \subseteq \bigcap_{\beta > 0} F_\beta^{p,q}$. Следовательно, при $1 < p < q < \infty$ доказано строгое включение. Пусть теперь $0 < p \le 1 < q < \infty$. Имеем

$$J \le C \int_{T^n} \left[\sum_{k_1,\dots,k_n \ge 0} \left(\max_{R \in I_{k_1,\dots,k_n}} |f(R\xi)|^p 2^{-|k|} \right) 2^{-|k|\beta} \right]^{q/p} dm_n(\xi),$$

поэтому из неравенства Гельдера получаем

$$J \le C_1 \sum_{|k| \ge 0} \int_{T^n} \max_{R \in I_{k_1,\dots,k_n}} |f(R\xi)|^q 2^{-|k|q/p} dm_n(\xi).$$

Интегрируя по I_{jk} (см. (11)) обе части (12) и используя неравенство $C' m_n(I_{jk}) \le 2^{-|k|} \le C'' m_n(I_{jk})$, находим

$$\int_{I_{jk}} \max_{R \in I_{k_1,\dots,k_n}} |f(R\xi)|^q dm_n(\xi) \le C_2 2^{|k|} \int_{\mathbf{U}^*_{jk}} |f(w)|^q dm_{2n}(w).$$

Так как разбиение $\mathbf{U}^*_{jk}$ имеет конечную кратность, то

$$J \le C_1 \sum_{k_1,\dots,k_n\ge 0} 2^{-|k|q/p} \sum_j \int_{I_{jk}} \max_{R\in I_{k_1,\dots,k_n}} |f(R\xi)|^q dm_n(\xi) \le$$

$$\le C_4 \sum_{k_1,\dots,k_n\ge 0} \sum_{j_1,\dots,j_n} 2^{-|k|(q/p-1)} \int_{\mathbf{U}^*_{jk}} |f(w)|^q dm_{2n}(w) \le$$

$$\le C_5 \sum_{k_1,\dots,k_n} \sum_{j_1,\dots,j_n} \int_{\mathbf{U}_{jk}} |f(w)|^q (1-|w|)^{q/p-1} dm_{2n}(w) \le$$

$$\le C_6 \int_{\mathbf{U}^n} |f(w)|^q (1-|w|)^{q/p-1} dm_{2n}(w).$$

Аргументы, аналогичные использованным при $1 < p < q < \infty$, завершают доказательство 1).

Для доказательства 2), заметим, что вложение $F^{p_0,q}_\beta \subseteq \bigcap_{p_0>p} F^{p,q}_\beta$ может быть получено из неравенства Гельдера

$$J \le C \int_{T^n} \left(\int_{I^n} |f(R\xi)|^{p_0} (1-R)^{p_0\beta/p} dR \right)^{q/p_0} dm_n(\xi) \le C\, \|f\|^q_{F^{p,q}_\beta}. \qquad (14)$$

Вновь из (14) имеем $\bigcap_{p<p_0} F^{p_0,q}_{\beta p_0/p} \subseteq \bigcap_{p<p_0} F^{p,q}_\beta$. Согласно утверждению 1)

$$\bigcap_{p<p_0} F^{p_0,q}_{\beta p_0/p} = \bigcap_{\beta<\alpha} F^{p_0,q}_\alpha \supset F^{p_0,q}_\beta.$$

Следовательно, $F^{p_0,q}_\beta \subset \bigcap_{p<p_0} F^{p,q}_\beta$, т.е. 2) доказано.

Перейдем к доказательству утверждения 3). Используя неравенство Гельдера (14), получим

$$\|f\|^q_{F^{p_0,q}_\beta} \le C\, \|f\|^q_{F^{p,q}_\beta}. \qquad (15)$$

Следовательно, $\bigcup_{p_0<p} F^{p,q}_\beta \subseteq F^{p_0,q}_\beta$. Теперь покажем, что это включение строгое. Из (15) получаем $\bigcup_{p_0<p} F^{p,q}_{\beta p/p_0} \subseteq F^{p_0,q}_\beta$. Предположим, что $\bigcup_{p_0<p} F^{p,q}_{\beta p/p_0} \supseteq F^{p_0,q}_\beta$. Имеем

$$\int_{T^n} \left(\int_{I^n} |f(R\xi)|^p (1-R)^{p\beta/p_0} dR \right)^{q/p} dm_n(\xi) \le$$

$$\le C \int_{T^n} \left(\int_{I^n} |f(R\xi)|^{p_0} (1-R)^{\beta} dR \right)^{q/p_0} dm_n(\xi).$$

Так как $p \le q$, то из неравенства Минковского получаем

$$\left(\int_{\mathbf{U}^n} |f(w)|^p (1-|w|)^{p\beta/p_0} dm_{2n}(w) \right)^{p_0/q} \le$$

$$\le C_1 \int_{I^n} \left(\int_{T^n} |f(R\xi)|^q dm_n(\xi) \right)^{p_0/q} (1-R)^\beta dR.$$

Используя Лемму 3.1, находим

$$\left(\int_{\mathbf{U}^n} |f(w)|^p (1-|w|)^{p\beta/p_0} dm_{2n}(w)\right)^{1/p} \leq$$
$$\leq C_2 \left(\int_{\mathbf{U}^n} |f(w)|^{p_0} (1-|w|)^{\beta-1+p_0/q} dm_{2n}(w)\right)^{q/(p_0 p)}.$$

Следовательно

$$\sup_{k_1,\dots,k_n} 2^{(k_1+\dots+k_n)\left[p\left(\frac{1}{q}+\frac{\beta+1}{p_0}\right)-2-\frac{p\beta}{p_0}\right]} = \sup_{k_1,\dots,k_n} 2^{|k|\left(\frac{p}{q}+\frac{2}{p_0}-2\right)} = \infty.$$

С другой стороны, из результата Олейник [19], из вложения $A^{p_0}_q \subset L^p(\mathbf{U}^n, \mu)$, $p > p_0$ следует, что тот же самый супремум конечен. Из этого противоречия получаем

$$\bigcup_{p_0<p} F^{p,q}_\beta \subseteq \bigcup_{p_0<p} F^{p,q}_{p\beta/p_0} \subset F^{p_0,q}_\beta.$$

Теорема 3.1 доказана.

Замечание. Легко проверить, что из равенства $F^{2,q}_{2\alpha-1}(\mathbf{U}) = H^q_\alpha(\mathbf{U})$, $0 < \alpha, q < \infty$ и результатов [21] следует

$$\bigcup_{q_0<q} F^{2,q}_\beta \subset F^{2,q_0}_\beta, \quad F^{2,q_0}_\beta \subset \bigcap_{q<q_0} F^{2,q}_\beta, \quad -1 < \beta < \infty.$$

ABSTRACT. The paper considers some problems concerning the spaces $F^{p,q}_\alpha(\mathbf{U}^n)$ of analytic functions in unit polydisk $\mathbf{U}^n$, generalizing the well-known classes of Hardy, Sobolev and Djrbashian. Multipliers of power series from $F^{p,q}_\alpha(\mathbf{U}^n)$ into the classes BMOA, Lipschitz and Besov are described, as well as necessary and sufficient conditions in terms of the symbol φ, rendering the Toeplitz operator $T_{\overline{\varphi}}$ a bounded operator from the smooth analog of the space $F^{p,q}_\alpha(\mathbf{U}^n)$ into some subspace of the class $H(\mathbf{U}^n)$ of holomorphic functions in $\mathbf{U}^n$. An embedding theorem for classes $F^{p,q}_\alpha(\mathbf{U}^n)$ is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян, "К проблеме представимости аналитических функций", Сооб. Инст. Матем. и Механики АН Арм.ССР, том 2, стр. 3 – 55, 1948.
2. A. Djrbashian, F. Shamoyan, "Topics in the theory of A^p_α spaces", Teubner-Texte zur Math., vol. 105, Leipzig, 1988.
3. C. Fefferman, E. Stein, "H^p spaces of several variables", Acta Math., vol. 129, pp. 137 – 173, 1972.
4. A. B. Aleksandrov, V. V. Peller, "Hankel operators and similarity to a contraction", Intern. Math. Res. Notices, vol. 6, pp. 263 – 275, 1996.
5. В. С. Гулиев, П. И. Лизоркин, "Классы голоморфных и гармонических функций в поликруге в связи с их граничными значениями", Труды Мат. Инст РАН,

том 204, стр. 137 – 159, 1993.
6. Р. Ф. Шамоян, "Непрерывные функционалы и мультипликаторы степенных рядов одного класса аналитических функций в поликруге", Изв. Вузов, серия Математика, (в печати).
7. Х. Трибель, Теория Функциональных Пространств, Мир, Москва, 1986.
8. С. В. Шведенко, "Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре", Итоги Науки и Техники, серия Матем. Анализ, том 23, 1985.
9. Р. М. Тригуб, "Мультипликаторы степенных рядов и K-функционалы в пространствах Харди H^p в поликруге при $p \in (0,1]$", Тезисы междун. конфер. "Функцион.Анализ, Прибл., Нелинейный Анализ", Москва, 1995.
10. M. Nawrocki, "Multipliers, linear functionals and the Frechet envelope of the Smirnoff class $N_*(\mathbf{U}^n)$", Trans. of the AMS, vol. 322, no. 2, pp. 493 – 506, 1990.
11. А. Б. Александров, "Теория функций в единичном шаре", Итоги Науки и Техники, том. 8, 1985.
12. Ф. А. Шамоян, А.В. Арутюнян, "Теплицевы операторы в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций", ДАН Арм.ССР, том 91, № 4, 1990.
13. P. L. Duren, Theory of H^p Spaces, Academic Press, NY, 1970.
14. J. B. Garnett, Bounded Analytic Functions, Academic Press, Orlando, 1981.
15. P. S.Chee, "BMOA and vanishing Carleson measures", Complex Var. Theory and Appl., vol. 25, pp. 311 – 322, 1994.
16. Ф. А. Шамоян, "Диагональное отображение и вопросы представления в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций", Сиб. Матем. Журнал, том 30, № 2, стр. 196 – 215, 1990.
17. В. В. Пеллер, С. В. Хрущев, "Операторы Ханкеля, наилучшие приближения и стационарные гауссовские процессы", УМН, том 37, № 1, стр. 53 - 124, 1982.
18. М. И. Гварадзе, "Множители одного класса аналитических функций, определенных на полидиске", Труды Тбил. Инст. Матем., стр. 15 – 21, 1980.
19. В. Л. Олейник, "Теоремы вложения для весовых классов гармонических и аналитических функций", Зап. Научн. Семин. ЛОМИ, том 74, стр. 120 – 137, 1974.
20. В. Л. Олейник, "Одна теорема вложения для классов аналитических функций" Проблемы Мат. Физики, том 11, стр. 164 – 167, 1986.
21. Y. Matsugu, "The strict inclusion relation between the spaces $H_\varphi(\mathbf{U})$ on the open unit disc $\mathbf{U}$ in $\mathbf{C}$", Jour. Fac. Sci. Shinshu Univ., vol. 18, no. 1, pp. 1 – 10, 1993.

29 марта 1999

Московский государственный
педагогический университет, Россия