АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И АДИАБАТИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ

Е. А. Тароян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 4, 1999

Асимптотические представления решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и систем используется для построения адиабатических инвариантов и для оценки их изменений. Эти результаты применяются для изучения системы Дирака, системы слабо связанных линейных осциляторов, а также для улучшения некоторых известных оценок.

§1. ВВЕДЕНИЕ

В этом параграфе получено асимптотическое представление для решений системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad -\infty < t < \infty, \tag{1.1}$$

где $x(t)$ – n-мерная вектор-функция, а $A(t)$ – $n \times n$-матрица–функция определенная на действительной оси. Затем мы используем эти результаты для получения асимптотических представлений для решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящих от параметра. Эти асимптотические представления используются для оценки изменения адиабатического инварианта таких систем.

Пусть $\|\cdot\|_M$ и $\|\cdot\|_V$ суть евклидова норма матрицы и вектора, соответственно.

Теорема 1. **Если в (1.1) $A(t) \in C(R)$ и существует обратимая $n \times n$-матрица–функция $\Phi(t) \in C^1(R)$ такая, что**

$$\Psi \equiv \Phi^{-1}\left(A\Phi - \frac{d\Phi}{dt}\right) \in L_1(R), \tag{1.2}$$

то любое решение уравнения (1.1) можно представить в виде

$$x = \Phi(c + \varepsilon), \tag{1.3}$$

где c – произвольный постоянный n-вектор, а n-вектор-функция $\varepsilon(t)$ удовлетворяет условию

$$\|\varepsilon\|_V \le \|c\|_V \left(\exp \int_t^{\infty} \|\Psi\|_M ds - 1 \right) \quad \text{для всех} \quad t \in R. \tag{1.4}$$

Доказательство : Пусть $x = x(t)$ - произвольное решение уравнения (1.1). Легко видеть, что подстановка

$$x = \Phi y \tag{1.5}$$

приводит (1.1) к виду

$$\frac{dy}{dt} = \Psi y, \quad -\infty < t < \infty, \tag{1.6}$$

где Ψ определена в (1.2). Интегрируя (1.6) получаем

$$y = c - \int_t^{\infty} \Psi y\, ds, \tag{1.7}$$

где c – постоянный n-вектор. Из (1.7) находим

$$\|y\|_V \le \|c\|_V + \int_t^{\infty} \|\Psi\|_M \|y\|_V\, ds. \tag{1.8}$$

Тогда из леммы Гроунола [1] получаем следующую оценку :

$$\|y\|_V \le \|c\|_V \exp \int_t^{\infty} \|\Psi\|_M ds. \tag{1.9}$$

Наконец, полагая

$$\varepsilon = y - c = -\int_t^{\infty} \Psi y ds, \tag{1.10}$$

и используя (1.5), (1.7) и (1.9), приходим к представлению (1.3), где

$$\|\varepsilon\|_V \le \int_t^{\infty} \|\Psi\|_M \|y\|_V ds \le \|c\|_V \int_t^{\infty} \|\Psi\|_M \left(\exp \int_s^{\infty} \|\Psi\|_M d\tau \right) ds \le$$

$$\le \|c\|_V \left(\exp \int_t^{\infty} \|\Psi\|_M ds - 1 \right).$$

Теорема 1 доказана.

Замечание 1. В оценке (1.4) можно заменить $\exp \int_t^{\infty} \|\Psi\|_M ds$ на $\exp \left| \int_{t_0}^{t} \|\Psi\|_M ds \right|$, где t_0– произвольное число или $\pm\infty$.

Пример 1. Предположим, что система (1.1) является L-диагональной, т.е. матрица-функция $A(t) \in C(R)$ имеет вид $A(t) = \operatorname{diag}(r_1(t), \ldots, r_n(t)) + B(t)$, где $\operatorname{Re}(r_j - r_k)$, $\|B\|_M \in L_1(R)$, $j, k = 1, \ldots, n$. Тогда в Теореме 1 можно выбрать

$$\Phi = \operatorname{diag}\left(\exp\int_0^t r_1\,ds, \ldots, \exp\int_0^t r_1\,ds\right),$$

так, что

$$\Psi = \left(b_{jk}\exp\int_0^t (r_k - r_j)\,ds\right)_{j,k=1}^n, \quad \text{где} \quad B = (b_{jk})_{j,k=1}^n,$$

и Теорема 1 сводится к версии известной теоремы Левинсона для L-диагональных систем с более точной оценкой для вектор-функции ε (см., например, [1] и замечание, что в теореме Левинсона условие $\operatorname{Re}(r_j - r_k) \in L_1(R)$, $j, k = 1, \ldots, n$ можно заменить на условие, что $\operatorname{Re}(r_j - r_k)$ не меняет знака на R.)

Как следствие Теоремы 1 можно получить аналогичный результат для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений n-го порядка. Рассмотрим уравнение

$$Lq = q^{(n)} + a_1(t)q^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)q = 0, \quad -\infty < t < \infty. \tag{1.11}$$

Пусть $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ – система функций, непрерывных на R, а $W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \neq 0$ – их вронскиан. Положим

$$\Phi = \left(\varphi_k^{(j-1)}\right)_{j,k=1}^n \quad \text{и} \quad \Phi^{-1} = \left(\frac{(-1)^{j+k}\Phi_{kj}}{W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}\right)_{j,k=1}^n, \tag{1.12}$$

где Φ_{kj} – минимальный элемент $\varphi_j^{(k-1)}$ в матрице-функции $\Phi(t)$, и преобразуем уравнение (1.11) к системе вида (1.1) с

$$x = \operatorname{column}(q, \ldots, q^{(n-1)}) \quad \text{и} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому для матрицы-функции Ψ, определенной в (1.2), имеем

$$\Psi = \Phi^{-1}\left[\begin{pmatrix} \varphi_1^{(1)} & \cdots & \varphi_n^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \\ \varphi_1^{(n)} - L\varphi_1 & \cdots & \varphi_n^{(n)} - L\varphi_n \end{pmatrix} - \frac{d\Phi}{dt}\right] = -\Phi^{-1}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ L\varphi_1 & \cdots & L\varphi_n \end{pmatrix}$$

Принимая во внимание (1.12), находим элементы матрицы Ψ :

$$\psi_{jk} = \frac{(-1)^{n+j-1}\Phi_{nj}L\varphi_k}{W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}, \quad j, k = 1, \ldots, n.$$

Таким образом, мы доказали следующий результат.

Следствие 1. Если коэффициенты $a_1(t), \dots, a_n(t)$ уравнения (1.11) непрерывны на $\mathbb{R}$ и существует обратимая матрица-функция $\Phi = \left(\varphi_k^{(j-1)}\right)_{j,k=1}^n \in C(R)$ такая, что

$$\frac{\Phi_{nj} L\varphi_k}{W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)} \in L_1(R), \quad j, k = 1, \dots, n,$$

то любое решение уравнения (1.11) вместе с его производными допускает представление

$$q^{(k-1)} = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j^{(k-1)}(c_j + \varepsilon_j), \quad k = 1, \dots, n,$$

где функции $\varepsilon_j(t)$ удовлетворяют условию

$$|\varepsilon_j| \leq \left|\sum_{k=1}^{n} c_k\right| \left(\exp \int_t^\infty \left|\frac{\sum_{i,k=1}^n \Phi_{ni} L\varphi_k}{W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}\right| ds - 1\right), \quad t \in R, \quad j = 1, \dots, n,$$

с произвольными постояммыми c_j, $j = 1, \dots, n$.

Аналог этого результата с интересными применениями впервые получены в [2].

§2. СИСТЕМЫ С ПАРАМЕТРОМ И АДИАБАТИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \lambda)x, \quad -\infty < t < \infty, \tag{2.1}$$

где $A(t, \lambda)$ – $n \times n$-матрица-функция, определенная на $\mathbb{R}$, а λ – положительный параметр. Введем следующее условие на матрицу-функцию $A(t, \lambda)$ (a_i – абсолютные постоянные) :

$\mathcal{A}$. Существует обратимая $n \times n$–матрица–функция $\Phi(\cdot, \lambda) \in C^1(R)$ такая, что $\|\Phi(0, \lambda)\|_M \leq a_1$, а элементы ψ_{jk} матрицы-функции Ψ, определенные в (1.2), имеют вид

$$\psi_{jk} = u_{jk} \exp\left(\lambda \int_{t_0}^{t} v_{jk}\, ds\right), \quad j, k = 1, \dots, n, \tag{2.2}$$

где функции $u_{jk}(t, \lambda)$ и $v_{jk}(t, \lambda)$, $j, k = 1, \dots, n$ удовлетворяют условиям

$$u_{jk}(\cdot, \lambda) \in C^m(R), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |u_{jk}^{(s)}(t, \lambda)| dt \leq a_2, \quad s = 0, \dots, m,$$

$|v_{jk}(t,\lambda)| \geq a_3 > 0$, $v_{jk}(\cdot,\lambda) \in C^m(R)$, $|v_{jk}^{(s)}(\cdot,\lambda)| \leq a_4$, $\operatorname{Re} v_{jk} = 0$, $s = 1,\ldots,m$

для некоторого натурального m.

Легко проверить, что из $\mathcal{A}$ следуют условия Теоремы 1, и поэтому любое решение системы (2.1) допускает представление (1.3), (1.4). Однако условие $\mathcal{A}$ позволяет получить более точное асимптотическое представление решений, соответствующее ограниченным при $\lambda \geq \lambda_0 > 0$ данным Коши.

Теорема 2. Пусть в (2.1) имеем $A(\cdot,\lambda) \in C(R)$, и пусть условие $\mathcal{A}$ выполняется для всех $t \in R$, $\lambda \geq \lambda_0$ и некотором натуральном m. Тогда любое решение $x = x(t,\lambda)$ уравнения (2.1) с ограниченными при $\lambda \geq \lambda_0$ данными Коши имеет вид

$$x = \Phi\left(c + \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{\lambda^k}\right), \tag{2.3}$$

где $c(\lambda)$ – произвольный n-вектор такой, что $\|c(\lambda)\|_v \leq a$, а вектор-функции $\alpha_k(t,\lambda)$ удовлетворяют условиям

$$\alpha_k(\cdot,\lambda) \in C^m(R),\ \|\alpha_k(t,\lambda)\|_v \leq a_m \text{ для всех } t \in R,\ \lambda \geq \lambda_0,\ k = 1,\ldots,m, \tag{2.4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|\alpha_k(t,\lambda)\|_v dt \leq a_m \quad \text{для любого} \quad \lambda \geq \lambda_0, \quad k = 1,\ldots,m-1, \tag{2.5}$$

$$\lim_{t\to\infty} \alpha_m(t,\lambda) = 0 \quad \text{и существует} \quad \lim_{t\to-\infty} \alpha_m(t,\lambda) \quad \text{для любого} \quad \lambda \geq \lambda_0. \tag{2.6}$$

Доказательство : Пусть $\mathcal{A}$ выполнено. Вначале докажем, что если решение уравнения (2.1) имеет вид (1.3), (1.4), где $\|c\|_v$ ограничены при $\lambda \geq \lambda_0$, то ε можно записать в виде $\varepsilon = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{\lambda^k}$ причем $\alpha_k(t,\lambda)$, $k = 1,\ldots,m$ удовлетворяют условиям (2.4) – (2.6). Действительно, для $\varepsilon(t,\lambda)$ имеем (1.10), причем y удовлетворяет (1.6). Подставляя (2.2) в (1.10) получаем

$$\varepsilon_j = -\int_t^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \psi_{jk} y_k ds = -\sum_{k=1}^{n} \int_t^{\infty} u_{jk} y_k \exp\left(\lambda \int_{t_0}^{s} v_{jk} d\tau\right) ds, \tag{2.7}$$

где ε_j, $j = 1,\ldots,n$ суть компоненты вектор-функции ε. Интегрируя (2.7) по частям получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_j = &-\frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} \frac{u_{jk} y_k}{v_{jk}} \exp\left(\lambda \int_{t_0}^{s} v_{jk} d\tau\right)\Bigg|_t^{\infty} + \\ &+ \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} \int_t^{\infty} \exp\left(\lambda \int_{t_0}^{s} v_{jk} d\tau\right) \frac{d}{ds}\left(\frac{u_{jk} y_k}{v_{jk}}\right) ds. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Принимая во внимание (1.6), (1.8) и обозначая первое слагаемое в правой части (2.8) через α_{j1}/λ, где $\alpha_1 = \mathrm{column}(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{n1})$, получаем, что $\alpha_1(\cdot, \lambda) \in C(R)$ и условия (2.4), (2.5) выполняются. Повторяя эту процедуру m раз, получаем доказательство теоремы для решений уравнения (2.1), имеющих вид (1.3), (1.4), где $\|c\|_v$ ограничена при $\lambda \geq \lambda_0$. Теперь предположим, что $x = x(t, \lambda)$ – решение (2.1) с ограниченными при $\lambda \geq \lambda_0$ данными Коши. Достаточно показать, что в его представлении (1.3), (1.4) $\|c\|_v$ ограничена при $\lambda \geq \lambda_0$. Согласно Замечанию 1 это решение имеет вид

$$x = \Phi(c + \varepsilon) = \Phi(c_0 + \varepsilon_0). \tag{2.9}$$

где ε удовлетворяет (1.4), а ε_0 – (1.4) с верхним пределом интегрирования $= 0$ (вместо ∞). Так как $\varepsilon_0(0, \lambda) = 0$ получаем

$$c_0 = \Phi^{-1}(0, \lambda)x(0, \lambda). \tag{2.10}$$

Из (2.10) и условия $\mathcal{A}$ следует, что $\|c_0\|_v$ ограничена при $\lambda \geq \lambda_0$. Следовательно, и $\|\varepsilon_0\|_v$ также ограничена. Из (2.9) следует, что

$$c = c_0 + \varepsilon_0 - \varepsilon = c_0 + \varepsilon_0(\infty, \lambda), \tag{2.11}$$

и поэтому $\|c\|_v$ ограничена при $\lambda \geq \lambda_0$. Теорема 2 доказана.

Интересно построить матрицу-функцию $\Phi(t, \lambda)$ при более сильных ограничениях на $A(t, \lambda)$. Например, рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = \lambda A(t)x, \quad -\infty < t < \infty. \tag{2.12}$$

Известно из линейной алгебры, что если собственные значения v_k, $k = 1, \ldots, n$ матрицы A различны, то существует обратимая матрица T, преобразующая A к диагональному виду, т.е.

$$T^{-1}AT = \mathrm{diag}(v_1, \ldots, v_n) = V, \tag{2.13}$$

где столбцы e_i, $i = 1, \ldots, n$ матрицы $T = (e_1, \ldots, e_n)$ суть линейно независимые собственные вектора матрицы A.

Следствие 2. **Пусть для матрицы-функции** $A(t) \in C(R)$ **существуют пределы** $A(\pm\infty) = \lim\limits_{t \to \pm\infty} A(t)$, **и собственные значения** $v_k(t) \in C^m(R)$ **удовлетворяют условию**

$$\mathrm{Im}(v_j - v_k) \neq 0, \qquad \mathrm{Re}\,(v_j - v_k) = 0, \quad j \neq k, \quad |v_k^{(s)}| \leq a \tag{2.14}$$

для всех $-\infty \le t \le \infty$, $j, k = 1, \ldots, n$, $s = 1, \ldots, m$, и пусть существует обратимая матрица-функция $T(t)$, преобразующая $A(t)$ к диагональному виду так, что

$$T(t) \in C^m(R), \quad \|T^{(j)}(t)\|_M \in L_1(R), \quad j = 1, \ldots, m. \tag{2.15}$$

Тогда любое решение $x = x(t, \lambda)$ уравнения (2.12) с ограниченными при $\lambda \ge \lambda_0$ данными Коши, удовлетворяет условиям (2.3) – (2.6), причем

$$\Phi = T \operatorname{diag}\left(\exp\int_{t_0}^{t}(\lambda v_1 - u_1)ds, \ldots, \exp\int_{t_0}^{t}(\lambda v_n - u_n)ds\right), \tag{2.16}$$

где $u_k(t)$, $k = 1, \ldots, n$ суть диагональные элементы матрицы $T^{-1}dT/dt$.

Доказательство : Достаточно показать, что из условий Следствия 2 вытекает $\mathcal{A}$, где Φ – как в (2.16). Обозначим через R диагональную матрицу-функцию в (2.16). Подставляя (2.16) в выражение (1.2) получаем

$$\Psi = R^{-1}T^{-1}\left(\lambda ATR - \frac{dT}{dt}R - T\frac{dR}{dt}\right) = R^{-1}\left(\lambda VR - T^{-1}\frac{dT}{dt}R - \frac{dR}{dt}\right), \tag{2.17}$$

где $V(t)$ – диагональная матрица-функция, определенная в (2.13). Подставляя R в (2.17) легко видеть, что диагональные элементы для Ψ равны нулю. Далее, из (2.15) следует, что непрерывная матрица-функция $T(t)$, преобразующая $A(t)$ в диагональный вид, имеет пределы при $\pm\infty$, и поэтому (2.13) выполняется в $\pm\infty$, т.е. $\det T(t) \ne 0$ для всех $-\infty \le t \le \infty$. Следовательно, $T^{-1}dT/dt \in L_1(R)$, и легко видеть, что условие $\mathcal{A}$ выполняется для Φ, имеющей вид (2.16) (разности $v_j - v_k$ играют роль элементов v_{jk} в (2.2)). Следствие 2 доказано.

Определение 1. Матрица-функция $f(t) \in C(R)$ называется **слабой** (см. [3]), если

$$\frac{d^s f}{dt^s} \in L_1(R) \quad \text{для всех} \quad s = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.18}$$

В [3] доказано, что если $A(t)$ – матрица-функция, удовлетворяющая $d^sA/dt^s \in L_1(R)$ для всех $s = 1, 2, \ldots$ и ее собственные значения $r_k(t)$, $k = 1, \ldots, n$ различны и чисто мнимые для всех $-\infty \le t \le \infty$, то $dr_k(t)/dt$, $k = 1, \ldots, n$ суть слабые и существует обратимая матрица-функция $T(t)$, преобразующая $A(t)$ к диагональному виду такая, что $dT(t)/dt$ является слабой. Очевидно, если $dA(t)/dt$ – слабая, то $A(t)$ имеет пределы в $\pm\infty$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Следствие 3. Пусть $dA(t)/dt$ – слабая матрица-функция с различными и чисто мнимыми собственными значениями для всех $-\infty \le t \le \infty$. Тогда утверждение Следствия 2 имеет место для любого решения уравнения (2.12) с ограниченными при $\lambda \ge \lambda_0$ данными Коши и для любого натурального m.

Полученные результаты применяются ниже при изучении адиабатических инвариантов для систем дифференциальных уравнений.

Определение 2. Пусть $A(t,\lambda)$ в (2.1) является $2n \times 2n$-матриц-функцией, непрерывной на $\mathbb{R}$ и удовлетворяющей условию $\mathcal{A}$ для некоторого натурального m, и пусть

$$\Phi^{-1} = (\varphi_{j\,k}^{-1})_{j,k=1}^{2n}, \quad \overline{\varphi_{2i-1\,k}^{-1}} = \varphi_{2i\,k}^{-1}, \quad i = 1,\dots,n, \quad k = 1,\dots,2n.$$

Тогда скалярные произведения

$$J_i(t,x,\lambda) = < S^i x, x >, \quad \text{где} \quad S^i = (\varphi_{2i-1\,j}^{-1}\varphi_{2i\,k}^{-1} + \varphi_{2i\,j}^{-1}\varphi_{2i-1\,k}^{-1})_{j,k=1}^{2n}, \quad i = 1,\dots,n, \tag{2.19}$$

называются **адиабатическими инвариантами** уравнения (2.1) (см. также [4]). Из определения следует, что $S^i = S^i(t,\lambda)$ суть действительные симметричные $2n \times 2n$-матрицы-функции.

Теорема 3. Если $J_i(t,x,\lambda)$, $i = 1,\dots,n$ суть адиабатические инварианты уравнения (2.1), то

$$J_i(t_1,x,\lambda) - J_i(t_2,x,\lambda) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda \to \infty, \ \text{для любых } \infty < t_1, t_2 < \infty, \tag{2.20}$$

$$J_i(\infty,x,\lambda) - J_i(-\infty,x,\lambda) = O\left(\frac{1}{\lambda^m}\right), \quad \lambda \to \infty, \tag{2.21}$$

где $x = x(t,\lambda)$ – произвольное решение уравнения (2.1) с ограниченными при $\lambda \ge \lambda_0$ данными Коши.

Доказательство : Из (2.19) для $i = 1,\dots,n$ имеем

$$J_i(t,x,\lambda) = \sum_{j,k=1}^{2n} (\varphi_{2i-1\,j}^{-1}\varphi_{2i\,k}^{-1} + \varphi_{2i\,j}^{-1}\varphi_{2i-1\,k}^{-1})\, x_j x_k = 2\sum_{j=1}^{2n} \varphi_{2i-1\,j}^{-1} x_j \sum_{k=1}^{2n} \varphi_{2i-1\,k}^{-1} x_k. \tag{2.22}$$

Пусть $x = x(t,\lambda)$ – решение уравнения (2.1) с ограниченными данными Коши. Тогда из (2.3) и (2.22) получаем

$$J_i(t,x,\lambda) = 2\left(c_{2i-1} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_{2i-1\,k}}{\lambda^k}\right)\left(c_{2i} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_{2i\,k}}{\lambda^k}\right), \quad i = 1,\dots,n. \tag{2.23}$$

Наконец, из свойств (2.4) – (2.6) вектор-функций $\alpha_k = \text{column}(\alpha_{1\,k},\dots,\alpha_{2n\,k})$ вытекают оценки (2.20) и (2.21). Теорема 3 доказана.

Замечание 2. Адиабатические инварианты аппроксимируют первые интегралы системы в том смысле, что если аппроксимирующая резольвентная матрица Φ становится точной резольвентной матрицей, то α_k, $k = 1, \ldots, m$ равны нулю и как следует из (2.23), адиабатические инварианты становятся первыми интегралами системы.

§3. ПРИМЕРЫ

1. Рассмотрим следующую систему типа Дирака :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} p & q \\ q & -p \end{pmatrix} x = \lambda x, \quad -\infty < t < \infty, \tag{3.1}$$

где $p = p(t)$ и $q = q(t)$, $t \in R$ суть действительные, ограниченные, m-раз непрерывно дифференцируемые функции, и λ – достаточно большой положительный параметр. Перепишем (3.1) в виде

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \lambda)x, \quad \text{где} \quad A(t, \lambda) = \begin{pmatrix} q & -\lambda - p \\ \lambda - p & -q \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Корни характеристического уравнения $\det(A - \mu I) = 0$ имеют вид :

$$\mu_{12} = \pm i\sqrt{\lambda^2 - p^2 - q^2} = \pm i\alpha. \tag{3.3}$$

Эта матрица-функция преобразует $A(t, \lambda)$ к диагональному виду (см. (2.13)), а ее обратная матрица-функция имеет вид

$$T = \frac{1}{p + \lambda} \begin{pmatrix} p + \lambda & p + \lambda \\ q - i\alpha & q + i\alpha \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{2i\alpha} \begin{pmatrix} q + i\alpha & -p - \lambda \\ -q + i\alpha & p + \lambda \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Диагональные элементы для τ_1, τ_2 из $T^{-1}dT/dt$ имеют вид

$$\tau_1 = \frac{p + \lambda}{2\alpha} \frac{d}{dt} \left(\frac{iq}{p + \lambda} \right) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\ln \frac{\alpha}{p + \lambda} \right), \quad \tau_2 = \overline{\tau_1}. \tag{3.5}$$

Выберем

$$\Phi(t, \lambda) = T \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \overline{r} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad r = \sqrt{\frac{p + \lambda}{\alpha}} \exp \left\{ i \int_0^t \left[\alpha - \frac{p + \lambda}{2\alpha} \frac{d}{ds} \left(\frac{q}{p + \lambda} \right) \right] ds \right\}, \tag{3.6}$$

а $T(t, \lambda)$ определена по (3.4). Положим $d^s p/dt^s, d^s q/dt^s \in L_1(R)$ для $s = 1, \ldots, m$. Тогда $\Phi(t, \lambda)$ будет удовлетворять условию $\mathcal{A}$ и условиям Определения 2. Матрица-функция $S = S^1$, определенная по (2.19), принимает вид

$$S = \left(\varphi_{1j}^{-1} \varphi_{2k}^{-1} + \varphi_{2j}^{-1} \varphi_{1k}^{-1} \right)_{j,k=1}^2 = \frac{1}{2\alpha} \begin{pmatrix} \lambda - p & -q \\ -q & \lambda + p \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Предложение 1. Пусть $p = p(t)$ и $q = q(t)$, $t \in R$ суть действительные функции, удовлетворяющие условию

$$p(t),\, q(t) \in C^m(R) \quad \text{и} \quad \frac{d^s p}{dt^s},\, \frac{d^s q}{dt^s} \in L_1(R), \quad s = 1, \ldots, m. \tag{3.8}$$

Тогда

(i) имеет место утверждение Теоремы 2 для любого решения $x = x(t, \lambda)$ уравнения (3.1) с ограниченными при $\lambda \geq \lambda_0$ данными Коши, а $\Phi(t, \lambda)$ имеет вид (3.6),

(ii) существует адиабатический инвариант уравнения (3.1)

$$J = < Sx,\, x > = \frac{(\lambda - p)x_1^2 - 2qx_1x_2 + (\lambda + p)x_2^2}{2\sqrt{\lambda^2 - p^2 - q^2}}, \tag{3.9}$$

удовлетворяющий оценкам (2.20), (2.21),

(iii) если dp/dt и dq/dt суть слабые, то утверждения (i), (ii) имеют место для каждого $m = 1, 2, \ldots$.

2. Рассмотрим систему слабо связанных линейных осциляторов, определяемых следующим уравнением второго порядка :

$$\ddot{x} + S\left(\frac{t}{\lambda}\right) x = 0, \quad -\infty < t < \infty, \tag{3.10}$$

где $S(t)$ - действительная симметричная $n \times n$–матрица-функция, а λ - достаточно большой положительный параметр. Преобразуем ее в систему первого порядка

$$\frac{dy}{dt} = A\left(\frac{t}{\lambda}\right) y, \quad -\infty < t < \infty, \tag{3.11}$$

где

$$y = \mathrm{column}(x, \dot{x}), \quad A = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -S & 0_n \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

Можно определить адиабатический инвариант уравнения (3.10) как адиабатический инвариант соответствующей системы первого порядка (3.12).

Предложение 2. Пусть действительная симметричная матрица-функция $S(t)$ имеет пределы $S(\pm\infty) = \lim\limits_{t \to \pm\infty} S(t)$ и положительные собственные значения $\omega_k^2(t) \in C^m(R)$, $k = 1, \ldots, n$, удовлетворяющие при $j, k = 1, \ldots, n$ условию

$$\omega_j^2 - \omega_k^2 \neq 0, \; j \neq k, \; |\omega_k^{(s)}| \leq a \quad \text{для любых} \quad -\infty \leq t \leq \infty, \quad s = 1, \ldots, m, \tag{3.13}$$

и пусть существует действительная ортогональная матрица-функция $F(t)$, преобразующая $A(t)$ к диагональномы виду и удовлетворяющая (2.15). Тогда

(i) любое решение $y = y(t, \lambda)$ уравнения (3.11) с ограниченными при $\lambda \geq \lambda_0$ данными Коши удовлетворяет (2.3) – (2.6) с

$$\Phi(t, \lambda) = T\left(\frac{t}{\lambda}\right) \operatorname{diag}(r_1(t, \lambda), \overline{r_1(t, \lambda)}, \ldots, r_n(t, \lambda), \overline{r_n(t, \lambda)}), \tag{3.14}$$

где $r_k = \omega_k^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{t}{\lambda}\right) \exp i \int\limits_0^t \omega_k\left(\frac{s}{\lambda}\right) ds$, $k = 1, \ldots, n$,

$$T = \begin{pmatrix} f_1 & f_1 & \cdots & f_n & f_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ i\omega_1 f_1 & -i\omega_1 f_1 & \cdots & i\omega_n f_n & -i\omega_n f_n \end{pmatrix}, \quad (f_1, \ldots, f_n) = F, \tag{3.15}$$

(ii) существуют адиабатические инварианты уравнения (3.10)

$$J_k = \frac{< f_k, \dot{x} >^2 + \omega_k^2 < f_k, x >^2}{2\omega_k}, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{3.16}$$

удовлетворяющие оценкам (2.20), (2.21),

(iii) если dA/dt – слабая, то утверждения (i), (ii) имеют место для каждого $m = 1, 2, \ldots$.

Доказательство : Введем величину $\tau = t/\lambda$ и перепишем (3.11) в виде $\dfrac{dy}{d\tau} = \lambda A(\tau) y$, $-\infty < t < \infty$. Корни характеристического уравнения $\det(\lambda A - \mu I_{2n}) = \det(\mu^2 I_n + \lambda^2 S) = 0$ имеют вид $\mu_{2k-1} = i\lambda\omega_k$, $\mu_{2k} = -i\lambda\omega_k$, $k = 1, \ldots, n$. Собственные векторы l_k, соответствующие μ_k, удовлетворяют условию $(\lambda A - \mu_k I_{2n}) l_k = 0$, $k = 1, \ldots, 2n$ или

$$\begin{cases} \mu_k l_{1\,k} + \lambda l_{n+1\,k} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mu_k l_{n\,k} + \lambda l_{2n\,k} = 0, \\ \lambda \sum_{j=1}^n b_{1\,j} l_{j\,k} - \mu_k l_{n+1\,k} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \lambda \sum_{j=1}^n b_{n\,j} l_{j\,k} - \mu_k l_{2n\,k} = 0. \end{cases}$$

Откуда следует, что $(\lambda^2 S + \lambda_k^2 I_n)\,\mathrm{column}(l_{1\,k}, \ldots, l_{n\,k}) = 0$. Поэтому мы можем определить l_k по формуле

$$l_{2k-1} = \mathrm{column}(f_{1\,2k-1}, \ldots, f_{n\,2k-1}, i\omega_k f_{1\,2k-1}, \ldots, i\omega_k f_{n\,2k-1}), \quad l_{2\,k} = \overline{l_{2k-1}}.$$

Следовательно, матрица-функция $T(\tau)$, преобразующая $A(\tau)$ к диагональному виду, имеет вид (3.15). Так как $F(\tau)$ является действительной и ортогональной, то

$$T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} f_1^T & f_1^T/(i\omega_1) \\ f_1^T & f_1^T/(-i\omega_1) \\ \vdots & \vdots \\ f_n^T & f_n^T/(i\omega_n) \\ f_n^T & f_n^T/(-i\omega_n) \end{pmatrix}$$

$$\tau_k = f_k^T \frac{df_k}{d\tau} + \frac{1}{2\omega_k}\frac{d\omega_k}{d\tau} = \frac{1}{2\omega_k}\frac{d\omega_k}{d\tau},$$

где τ_k, $k = 1, \ldots, 2n$ суть диагональные элементы матрицы $T^{-1}dT/dt$. Теперь можно убедиться, что условия Следствия 2 и Определения 1 выполнены. Используя (2.22) и (2.23), получаем (3.16). Утверждения (i), (ii) доказаны. Утверждение (iii) следует из (i), (ii) и Следствия 3 (см. также [3]).

ABSTRACT. Asymptotic representations for solutions of a class of ordinary linear differential equations and systems are used to construct adiabatic invariants and to estimate their changes. The results are applied to the study of Dyrac system, the system of weakly connected linear oscillators, as well as to improve some well-known estimates.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. П. Демидович, Лекции по Математической Теории Устойчивости, Наука, Москва, 1967.
2. Г. Р. Оганесян, "Оценки для функций ошибок асимптотических решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений", Изв. НАН Армении, сер. Математика, том 31, № 1, стр. 9 – 28, 1996.
3. A. Leung, K. Meyer, "Adiabatic invariants for linear Hamiltonian systems", Jour. of Differ. Equations, vol. 17, no. 1, pp. 32–43, 1975.
4. A. Boutet de Monvel-Berthier, G. Nenciu, "On the theory of adiabatic invariants for linear Hamiltonian systems", Comp. Rend. de L'acad. des Sci., Math., vol. 310, ser. 1, no. 12, pp. 807-812, 1990.

2 декабря 1998

Институт математики
Национальной Академии Наук Армении