АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЙ ПОЛУЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В $\mathbb{R}^n$

Г. А. Карапетян, Г. В. Даллакян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 4, 1999

Теоремы аппроксимации решений линейных эллиптических уравнений в $\mathbb{R}^n$ решениями граничных задач в шаре "большого" радиуса представляют значительный интерес. Настоящая работа посвящена изучению аналогичных свойств для полуэллиптических уравнений. Доказывается, что решение полуэллиптического уравнения в $\mathbb{R}^n$ можно получить как предел при $R \to \infty$ решения u_R граничной задачи в некоторых ограниченных областях.

§1. УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Пусть $P(D)$ – линейный дифференциальный оператор вида

$$P(D) = \sum_{(\mu,\alpha)\leq 2} \gamma_\alpha D^\alpha, \tag{1.1}$$

где $\mu = \left(\frac{1}{m_1}, ..., \frac{1}{m_n}\right)$, $m_j \in \mathrm{N}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} ... D_n^{\alpha_n}$, $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, ..., n$ и пусть $P^0(D) = \sum\limits_{(\mu,\alpha)=2} \gamma_\alpha D^\alpha$ – главная часть оператора (1.1).

Определение. Оператор (1.1) называется полуэллиптическим (см. [2]), если существует постоянная $\chi > 0$ такая, что для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$|P^0(\xi)| \geq \chi(|\xi_1|^{2/\mu_1} + ... + |\xi_n|^{2/\mu_n}). \tag{1.2}$$

Для области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через $H^{l\overline{m}}(\Omega)$ ($l \in \mathrm{N}$, $\overline{m} = (m_1, ..., m_n)$) анизотропное соболевское пространство функций с конечной нормой

$$||u||_{\overline{m},l,\Omega} = ||u||_{l,\Omega} = ||u||_\Omega + \sum_{i=1}^{n} ||D_i^{lm_i} u||_\Omega, \tag{1.3}$$

где $||\cdot||_\Omega$ – норма пространства $L_2(\Omega)$.

Замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ по норме (1.3) обозначим через $\overset{\circ}{H}{}^{\overline{m}}(\Omega)$. Положим

$$m_0 = \max_{1\le j\le n} m_j, \quad \mu_0 = 1/m_0, \quad |\mu| = \sum_{j=1}^{n}\mu_j, \quad |x|_\mu = \left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^{2/\mu_j}\right)^{1/2},$$

$$B_{R,\mu} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x|_\mu < R\}, \quad S_{R,\mu} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x|_\mu = R\}, \quad (\mu - \text{сфера}).$$

Пусть $P(D)$ – полуэллиптический оператор вида (1.1), который удовлетворяет условию

$$P(\xi) \neq 0 \quad \text{для всех} \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.4}$$

Известно [3], что такой оператор имеет бесконечно дифференцируемое в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и экспоненциально убывающее на бесконечности фундаментальное решение $E(x)$, производные которого также экспоненциально убывают на бесконечности, т.е. $|D^\alpha E(x)| \le c(\alpha)\, e^{-\gamma|x|}$ при $|x| > 1$, где γ – некоторое положительное число.

Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ – компактное множество и $x_0 \in K$. Тогда для любых мультииндексов α и β справедливо соотношение

$$|D_x^\alpha D_{x_0}^\beta E(x_0 - x)| \le c(\alpha, \beta, K)\, e^{-\gamma_1 |x|_\mu^{\mu_0}}, \quad |x|_\mu \to \infty. \tag{1.5}$$

В $\mathbb{R}^n$ рассмотрим уравнение

$$P(D)\, u = f. \tag{1.6}$$

Лемма 1.1. **Пусть оператор (1.1) удовлетворяет условиям (1.2), (1.4) и $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Тогда уравнение (1.6) имеет одно и только одно решение $u(x)$ в классе $H^{2\overline{m}}(\mathbb{R}^n)$. Если $f(x)$ имеет ограниченный носитель, то это решение имеет вид $u(x) = E(x) * f(x)$ и**

$$|D^\alpha u(x)| \le c(\alpha, f)\, e^{-\gamma_1 |x|_\mu^{\mu_0}}, \quad |x|_\mu \to \infty. \tag{1.7}$$

Доказательство : Достаточно установить оценку (1.7) (см. доказательство Теоремы 1.1 из [4]). Пусть $G = \operatorname{supp} f$ ограничен. Так как E – фундаментальное решение, то в силу (1.5) имеем

$$|D^\alpha u(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha E(x-y)\, f(y)\, dy\right| = \left|\int_G D^\alpha E(x-y)\, f(y)\, dy\right| \le$$

$$\le \int_G |D^\alpha E(x-y)|\, |f(y)|\, dy \le c(\alpha, f)\, e^{-\gamma_1 |x|_\mu^{\mu_0}}, \quad |x|_\mu \to \infty.$$

Положим $L_{2,a}(\mathbb{R}^n) = \{f \in L_2(\mathbb{R}^n); \quad f(x) = 0 \quad \text{для} \quad |x|_\mu > a,\ a > 0\}$.

Рассмотрим краевую задачу

$$P(D)\, u_R(x) = f(x), \quad x \in B_{R,\mu}, \tag{1.8}$$

$$u_R \in \overset{\bullet}{H}{}^{\overline{m}}(B_{R,\mu}). \tag{1.9}$$

Известно [5], что если $f \in L_{2,a}(\mathbb{R}^n)$ и $P(D)$ является полуэллиптическим оператором вида (1.1), то для $R \geq a$ задача (1.8), (1.9) имеет единственное решение $u_R \in \overset{\bullet}{H}{}^{\overline{m}}(B_{R,\mu}) \cap H^{2\overline{m}}(B_{R,\mu})$.

Теорема 1.1. Пусть оператор (1.1) удовлетворяет условиям Леммы 1.1, и пусть u и u_R суть решения, соответственно, уравнения (1.6) и задачи (1.8), (1.9), $f \in L_{2,a}(\mathbb{R}^n)$. Если $\mu_0 > \mu_i/2$ $(i = 1, ..., n)$, то для любого компактного $K \subset \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in N_0^n$ и для достаточно больших R имеет место оценка

$$\max_{x\in K} |D^\tau [u(x) - u_R(x)]| \leq c(K, \tau)\, e^{-\gamma_1 R^{\mu_0}}\, R^M\, \|f\|_{L_{2,a}(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.10}$$

где $M = \max\{2 + |\mu|/2 - \mu_0, |\mu| - \mu_0\}$.

Доказательство : Пусть D^q – одночлен, входящий в оператор $P(D)$, $M(x)$ и $N(x)$ – достаточно гладкие функции. По формуле интегрирования по частям имеем

$$\int\limits_{B_{R,\mu}} [M(x)\, D^q N(x) - N(x)\, \overline{D^q M(x)}]\, dx =$$

$$= \frac{1}{i} \int\limits_{S_{R,\mu}} \sum_{p_1=1}^{q_1} (-1)^{p_1-1} [D_1^{p_1-q_1} D_2^{q_2} ... D_n^{q_n} N(x)]\, [D_1^{p_1-1}\, \overline{M(x)}]\, dx_2 ... dx_n +$$

$$+ \frac{1}{i} \int\limits_{S_{R,\mu}} \sum_{p_2=1}^{q_2} (-1)^{q_1+p_2-1} [D_2^{q_2-p_2} ... D_n^{q_n} N(x)] \times \tag{1.11}$$

$$\times [D_1^{q_1} D_2^{p_2-1}\, \overline{M(x)}]\, dx_1\, dx_3 ... dx_n + ... + \frac{1}{i} \int\limits_{S_{R,\mu}} \sum_{p_n=1}^{q_n} (-1)^{q_1+q_2+ \cdots +q_{n-1}+p_n-1} \times$$

$$\times [D_n^{q_n-p_n} N(x)]\, [D_1^{q_1} ... D_{n-1}^{q_{n-1}} D_n^{p_n-1}\, \overline{M(x)}]\, dx_1 ... dx_{n-1}.$$

Умножая обе части (1.11) на γ_q и суммируя полученные равенства по q такому, что $(\mu, q) \leq 2$, получаем формулу Грина

$$\int\limits_{B_{R,\mu}} [M(x)\, P(D)\, N(x) - N(x)\, P^*(D)\, \overline{M(x)}]\, dx = \int\limits_{S_{R,\mu}} \Phi[M, N]\, dS, \tag{1.12}$$

где $\Phi[M,N]$ – некоторая билинейная кососимметрическая форма, зависящая от $M(x)$, $N(x)$ и их производных до μ-го порядка не выше, чем $2-\mu_0$:

$$\Phi[M,N]=\sum_{(\mu,\alpha)+(\mu,\beta)\le 2-\mu_0} g_{\alpha,\beta}\,[D^\alpha M(x)]\,[D^\beta N(x)],$$

где $g_{\alpha,\beta}$ суть бесконечно дифференцируемые ограниченные функции.

Пусть $\vartheta_R=u-u_R$. Функция ϑ_R является решением задачи

$$P(D)\,\vartheta_R=0 \quad \text{в} \quad B_{R,\mu}, \qquad \vartheta_r-u\in \overset{\circ}{H}{}^{\overline{m}}(B_{R,\mu}).$$

В дальнейшем будет показано, что при $(\mu,\alpha)\le 2-\mu_0$ следы функций $D^\alpha\vartheta_R$ на μ-сфере $S_{R,\mu}$ существуют и принадлежат $L_2(S_{R,\mu})$. Рассмотрим фундаментальное решение $E(x-x_0)$ оператора $P(D)$, где x_0 – внутренняя точка области $B_{R,\mu}$. Так как $E(x-x_0)$ может иметь разрыв в точке $x=x_0$, непосредственно нельзя применить формулу (1.12) в области $B_{R,\mu}$ к функциям ϑ_R и $E(x-x_0)$. Поэтому вырежем из области $B_{R,\mu}$ μ-шар $B_{\varepsilon,\mu}(x_0)\subset B_{R,\mu}$ (радиуса ε и центром в точке x_0) и применим (1.12) к оставшейся области. Если $E(x)$ является фундаментальным решением оператора $P(D)$, то $\overline{E(-x)}$ является фундаментальным решением оператора $P^*(D)=\overline{P(-D)}$. Таким образом, имеем

$$0=\int\limits_{B_{R,\mu}\setminus B_{\varepsilon,\mu}(x_0)}[E(x_0-x)\,P(D)\,\vartheta_R(x)-\vartheta_R(x)\,P(D)^*\,E(x_0-x)]\,dx=$$
$$=\int\limits_{S_{R,\mu}}\Phi\,[\vartheta_R(x),E(x_0-x)]\,dS+\int\limits_{S_{\varepsilon,\mu}(x_0)}\Phi\,[\vartheta_R(x),E(x_0-x)]\,dS.$$

Известно (см. [6]), что в окрестности точки x_0

$$D_x^\beta E(x_0-x)=O\left(\frac{1}{|x_0-x|_\mu^{|\mu|-2+(\mu,\beta)}}\right).$$

Поэтому, в силу теоремы о среднем значении, получаем

$$\int\limits_{S_{\varepsilon,\mu}(x_0)} g_{\alpha,\beta}D^\alpha\vartheta_R(x)\,D_x^\beta E(x_0-x)]\,dS=$$
$$=(D^\alpha\vartheta_R)(x^*)\int\limits_{S_{\varepsilon,\mu}(x_0)} g_{\alpha,\beta}\,D_x^\beta E(x_0-x)]\,dS=$$
$$=c_0\,g_{\alpha,\beta}\,(D^\alpha\vartheta_R)(x^*)\,\frac{\varepsilon^{|\mu|-\mu_0}}{\varepsilon^{|\mu|-2+(\mu,\beta)}}+c_0\,g_{\alpha,\beta}\,(D^\alpha\vartheta_R)(x^*)\,\varepsilon^{|\mu|-\mu_0}\,\sigma(\varepsilon),$$

где $x^*\in S_{\varepsilon,\mu}(x_0)$ и $\sigma(\varepsilon)\to 0$, $\varepsilon\to 0$. Следовательно

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_{\varepsilon,\mu}(x_0)}\Phi\,[\vartheta_R(x),E(x_0-x)]\,dS=\vartheta_R(x_0).$$

Таким образом, получаем интегральное представление для функции ϑ_R :

$$\vartheta_R(x_0) = \sum_{(\mu,\alpha)+(\mu,\beta)\le 2-\mu_0} \int_{S_{R,\mu}} g_{\alpha,\beta}\, D^\alpha \vartheta_R(x)\, D_x^\beta E(x_0 - x)\, dS.$$

Пусть $x_0 \in K$, где $K \subset \mathbb{R}^n$ – компакт. Тогда при достаточно больших значениях R функция ϑ_R является бесконечно дифференцируемой и имеет место оценка

$$\begin{gathered} |D^\tau \vartheta_R(x_0)| \le c' \sum_{(\mu,\alpha)+(\mu,\beta)\le 2-\mu_0} \int_{S_{R,\mu}} |D^\alpha u(x)|\, |D^\tau_{x_0} D^\beta_x E(x_0 - x)|\, dS + \\ + c' \sum_{(\mu,\alpha)+(\mu,\beta)\le 2-\mu_0} \int_{S_{R,\mu}} |D^\alpha u_R(x)|\, |D^\tau_{x_0} D^\beta_x E(x_0 - x)|\, dS \le \\ \le c \sum_{(\mu,\alpha)+(\mu,\beta)\le 2-\mu_0} \Big[\big(\|D^\alpha u\|_{L_2(S_{R,\mu})} + \\ + \|D^\alpha u_R\|_{L_2(S_{R,\mu})} \big)\, \|D^\tau_{x_0} D^\beta_x E(x_0 - x)\|_{L_2(S_{R,\mu})} \Big]. \end{gathered} \tag{1.13}$$

В силу (1.5) и (1.7), для любого $(\mu,\alpha) \le 2 - \mu_0$ имеем

$$\|D^\tau_{x_0} D^\beta_x E(x_0 - x)\|_{L_2(S_{R,\mu})} \le c_1(\tau, K)\, e^{-\gamma_1 R^{\mu_0}}\, R^{(|\mu|-\mu_0)/2}, \tag{1.14}$$

$$\|D^\alpha u\|_{L_2(S_{R,\mu})} \le c_2\, e^{-\gamma_1 R^{\mu_0}}\, R^{(|\mu|-\mu_0)/2}\, \|f\|_{L_{2,a}(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.15}$$

Остается оценить нормы $\|D^\alpha u_R\|_{L_2(S_{R,\mu})}$ при α, удовлетворяющем условию $(\mu,\alpha) \le 2 - \mu_0$. Так как область $B_{1,\mu}$ удовлетворяет условию $\overline{m} = (m_1, \dots, m_n)$ – рога (см. [7]), то функция $\tilde{u}_R \in H^{2\overline{m}}(B_{1,\mu})$, определенная в $B_{1,\mu}$, может быть продолжена на все $\mathbb{R}^n$ (см. [7], §9.8) со свойством

$$\|\tilde{u}_R\|_{H^{2\overline{m}}(\mathbb{R}^n)} \le c_3\, \|\tilde{u}_R\|_{2,B_{1,\mu}} \tag{1.16}$$

(здесь $\tilde{u}_R$ обозначает продолженную функцию). Положим $\mu' = \max\limits_{1\le j\le n} \mu_j$. Используя известные теоремы вложения (см. [7]), нетрудно убедиться, что для всех α таких, что $(\mu,\alpha) \le 2 - \mu_0$, имеет место вложение $D^\alpha H^{2\overline{m}}(\mathbb{R}^n) \subset W_2^{\mu_0/\mu'}(\mathbb{R}^n)$, где W_2^s $(s > 0)$ – изотропное дробное пространство Соболева с нормой

$$\|\vartheta\|_{W_2^s(\mathbb{R}^n)} = \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s\, |F[\vartheta]|^2\, d\xi \right\}^{1/2},$$

выраженной в терминах преобразования Фурье функции ϑ.

Теперь, если $\mu_0 > \mu_i/2$, $(i = 1, \dots, n)$, то $\mu_0/\mu' > 1/2$ и след функции $D^\alpha \tilde{u}_R$ на μ–сфере $S_{1,\mu}$ существует и принадлежит $L_2(S_{1,\mu})$. В этом случае имеем

$\|D^\alpha \tilde{u}_R\|_{L_2(S_{1,\mu})} \le c_3 \|\tilde{u}_R\|_{H^{2m}(\mathbb{R}^n)}$. Следовательно, из (1.16), (1.7), (1.9) и [8] получаем

$$\|D^\alpha \tilde{u}_R\|_{L_2(S_{R,\mu})} \le c_4 \|\tilde{u}_R\|_{2,B_{1,\mu}} R^{(|\mu|-\mu_0)/2} = c_4 \|u_R\|_{2,B_{R,\mu}} R^{2-\mu_0/2} \le \le c_5 R^{2-\mu_0/2} \|f\|_{L_{2,\ast}(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.17}$$

Наконец, из (1.13), (1.14), (1.15), (1.17) получим (1.10). При дополнительных условиях на функцию f получаются более точные оценки для функции $u - u_R$.

Теорема 1.2. **Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ – компакт, $(\mu, \tau) \le 2$ и $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условию**

$$D^\nu f(x) = O\left(g(|x|_\mu)\right) \tag{1.18}$$

при $|x|_\mu \ge R_1$, $(\mu,\nu) \le \mu_0$, где $g(R)$ – монотонно убывающая положительная функция, удовлетворяющая условию $\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(|x|_\mu)\, dx < \infty$. Тогда в условиях Теоремы 1.1 и для достаточно больших R имеет место оценка

$$\sup_K |D^\tau u - D^\tau u_R| \le c(K)\, R^M \left[g(R/2) + e^{-\gamma_1 R^{\mu_0}/2}\right],$$

где $M = \max\{2 + |\mu|/2 - \mu_0, |\mu| - \mu_0\}$.

Доказательство : Достаточно оценить функции $D^\alpha u$; $(\mu,\alpha) \le 2$ (см. доказательство Теоремы 1.1). Пусть $\psi \in C_0^\infty$, $\psi = 1$ для $|x|_\mu \le R_1$ и $\psi = 0$ для $|x|_\mu \ge R_1 + 1$. Решение u имеет вид $u = u_1 + u_2 = E * \psi f + E * (1-\psi) f$.
Из Леммы 1.1 имеем $|D^\alpha u_1| \le c e^{-\gamma_1 |x|_\mu^{\mu_0}}$, $|x|_\mu \to \infty$. Однако $D^\alpha u_2 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} D^\beta E(x-y)\, D^\nu [(1-\psi(y))\, f(y)]\, dy$, где $(\mu,\beta) < 2$, $\beta + \nu = \alpha$. Следовательно, из (1.5) и (1.18) имеем

$$|D^\alpha u_2| \le c \int\limits_{|x-y|_\mu \le \frac{|x|_\mu}{2}} |D^\beta E(x-y)|\, g(y)\, dy + c \int\limits_{|x-y|_\mu > \frac{|x|_\mu}{2}} |D^\beta E(x-y)|\, g(y)\, dy \le c\left[g(|x|_\mu/2) + e^{-\gamma_1 |x|_\mu^{\mu_0}/2}\right].$$

Теорема 1.3. **В условиях Теоремы 1.1 для любого $\mu_j > 0$ $(j = 1, \dots, n)$ и достаточно большого R**

$$\|u - u_R\|_{1,B_{R,\mu}} \le c\, e^{-\gamma_1 R^{\mu_0}} R^{1+(|\mu|-\mu_0)/2} \|f\|_{L_{2,\ast}(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.19}$$

Доказательство : Область $B_{R,\mu}$ удовлетворяет условиям С. В. Успенского [9], [10].

Следствие. Пусть выполнены условия Теоремы 1.1. Тогда $\lim\limits_{R\to\infty} \|u-u_R\|_{1,B_{R,\mu}} = 0$.

§2 УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В $\mathbb{R}^n$ рассмотрим уравнение вида

$$A(x,D,\lambda)\,u = \sum_{\substack{(\mu,\alpha)\le 1\\(\mu,\beta)\le 1}} D^\beta(a_\alpha(x)\,D^\alpha u) \equiv P(D)\,u + \lambda\,Q(x,D)\,u = f, \qquad (2.1)$$

где $P(D)$ – оператор из §1, $Q(x,D)$ – дифференциальный оператор μ-порядка не выше 2 с гладкими коэффициентами, которые равняются нулю при $|x|_\mu > a$, λ – комплексный параметр, $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$.

Ясно, что если $|\lambda|$ достаточно мало, то оператор $A(x,D,\lambda)$ – полуэллиптический (определение см. в [2]). Обозначим через Δ множество всех значений λ, при которых оператор $A(x,D,\lambda)$ полуэллиптичен. Очевидно, что Δ является открытым множеством. Связное подмножество множества Δ, которое содержит точку $\lambda = 0$, обозначим через Δ_0. Если μ-порядок оператора $Q(x,D)$ меньше двух, то Δ_0 совпадает со всей комплексной плоскостью.

Наша цель – исследовать однозначную разрешимость уравнения (2.1) в пространстве $H^{2\overline{m}}(\mathbb{R}^n)$. Допустим, что $u \in H^{2\overline{m}}(\mathbb{R}^n)$ является решением уравнения (2.1), $\lambda \in \Delta$, $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Применив к обеим частям уравнения (2.1) интегральный оператор с ядром $E(x-y)$, где E – фундаментальное решение оператора $P(D)$, уравнение (2.1) сводится к интегральному. Каждое из слагаемых в (2.1) локально принадлежит $L_2(\mathbb{R}^n)$. Так как функция $E(x-y)$ имеет слабую особенность (см. [6]), то

$$\int\limits_{|y|_\mu<a} E(x-y)\,P(D)\,u(y)\,dy + \lambda \int\limits_{|y|_\mu<a} E(x-y)\,Q(y,D)\,u(y)\,dy = \qquad (2.2)$$
$$= \int\limits_{|y|_\mu<a} E(x-y)\,f(y)\,dy.$$

Так как $g = P(0)\,u \in L_2(\mathbb{R}^n)$, то в силу Леммы 1.2, уравнение $P(0) = g$ имеет в классе $H^{2\overline{m}}(\mathbb{R}^n)$ единственное решение, которое можно получить с помощью свертки функций $E(x)$ и $g(x)$. Следовательно, получаем

$$u(x) + \lambda \int\limits_{|y|_\mu<2a} E(x-y)\,Q(y,D)\,u(y)\,dy = \int\limits_{|y|_\mu<a} E(x-y)\,f(y)\,dy. \qquad (2.3)$$

Функции $D_y^\alpha E(x-y)$ при $(\mu,\alpha) < 2$ имеют интегрируемую особенность. Следовательно, второе слагаемое в левой части равенства (2.3) можно проинтегрировать по частям, перебрасывая все производные с $u(y)$ на $E(x-y)$. Пользуясь техникой дифференцирования интеграла со слабой особенностью (см. [11]), можно перебросить и "последние" производные с $u(y)$ на $E(x-y)$. Учитывая также, что коэффициенты оператора $Q(x,D)$ финитны, из (2.3) получаем

$$u(x)+\lambda \int\limits_{|y|_\mu<2a} [\overline{Q^*(y,D_y)}\, E(x-y)]\, u(y)\, dy = \int\limits_{|y|_\mu<a} E(x-y)\, f(y)\, dy, \qquad (2.4)$$

где интеграл слева будет сингулярным. Нетрудно проверить, что сингулярная часть ядра интеграла $\int\limits_{|y|_\mu<2a} [\overline{Q^*(y,D_y)}\, E(x-y)]\, u(y)\, dy$ (если существует) равна $K(x,y) = \overline{Q_0^*(x,D_y)}\, E_\mu(x-y)$. Здесь $\overline{Q_0^*(x,D_y)}$ - те члены оператора, которые содержат одночлены оператора $\overline{Q^*(x,D_y)}$, имеющие μ-порядок равный двум, а $E_\mu(x-y)$ является тем фундаментальным решением μ-однородного полуэллиптического оператора $P^0(D_x)$, производные μ-порядка 2 которого представляют собой μ-однородную функцию порядка $-|\mu|$. Такое фундаментальное решение построено, например, в [11] (см. также [12]). Очевидно, если $|x|_\mu \le 2a$, $(\mu,\alpha) \le 2$, то существует $\varepsilon > 0$, для которого выполняется следующее неравенство $|D^\alpha[E(x)-E_\mu(x)]| < c\,|x|_\mu^{-|\mu|+\varepsilon}$. Оставшаяся часть ядра $K_1(x,y)$ интегрального оператора имеет вид

$$K_1(x,y) = [\overline{Q_0^*(y,D_y)} - Q_0^*(x,D_y)]\, E(x-y) + \overline{Q_0^*(y,D_y)}[E_\mu(x-y) - E(x-y)] + \\ + [\overline{Q^*(y,D_y)} - \overline{Q_0^*(y,D_y)}]\, E_\mu(x-y).$$

Заметим, что при $|y|_\mu < 2a$, $|x|_\mu < 3a$ имеем

$$|K_1(x,y)| \le c\,|x-y|_\mu^{-|\mu|+\varepsilon} \qquad (2.5)$$

(см. [11]), а для $|y|_\mu < 2a$, $|x|_\mu > 3a$ из (1.5) получаем

$$|K_1(x,y)| \le c\, e^{-\gamma_1 |x|_\mu^{|\mu_0|}}. \qquad (2.6)$$

Рассмотрим бесконечно дифференцируемую функцию $\psi(x)$, равную единице при $|x|_\mu < 2a$ и $e^{-|x|_\mu}$ при $|x|_\mu > 3a$. Умножим уравнение (2.4) на $\psi(x)$ и обозначим $u(x)\,\psi(x)$ через $\nu(x)$. Учитывая, что при $|y|_\mu < 2a$ имеем $u(y) = \nu(y)$, получаем

$$\nu(x) + \lambda\,\psi(x) \int\limits_{|y|_\mu<2a} [\overline{Q_0^*(x,D_y)}\, E_\mu(x-y)]\, \nu(y)\, dy + \\ + \lambda \int\limits_{|y|_\mu<2a} \psi(x)\, K_1(x,y)\, \nu(y)\, dy = \psi(x) \int\limits_{|y|_\mu<a} E(x-y)\, f(y)\, dy. \qquad (2.7)$$

В силу оценок (2.5) и (2.6) оператор $T_1(\nu) = \int\limits_{|y|_\mu < 2a} \psi(x)\, K_1(x, y)\, \nu(y)\, dy$ является и непрерывным и компактным в $L_2(\mathbb{R}^n)$. Так как коэффициенты оператора $Q(x, D)$ обращаются в нуль при $|x|_\mu > a$, то функцию $\psi(x)$ во втором слагаемом в левой части (2.7) можно отбросить. Имеем $\overline{Q_0^*(x, D_y)} = Q_0(x, D_y)$, т.е. (2.7) можно переписать в виде

$$\nu(x) + \lambda \int\limits_{|y|_\mu < 2a} [Q_0(x, D_y)\, E_\mu(x - y)]\, \nu(y)\, dy + \lambda T_1\, \nu = \psi(x) \int\limits_{|y|_\mu < a} E(x - y)\, f(y)\, dy. \tag{2.8}$$

Так как производные от $E_\mu(x)$ μ-порядка 2 являются μ-однородными функциями порядка $-|\mu|$ (см. [12]), то при $|y|_\mu > 2a$, $|x|_\mu < a$ имеем $|Q_0(x, D_y)\, E_\mu(x - y)| < c\,|y|_\mu^{-|\mu|}$. Поэтому оператор $T_2\, \nu = \int\limits_{|y|_\mu > 2a} [Q_0(x, D_y)\, E_\mu(x - y)]\, \nu(y)\, dy$ также является и непрерывным и компактным в $L_2(\mathbb{R}^n)$. Итак, если $T = T_1 + T_2$, то уравнение (2.8) имеет вид

$$\nu(x) + \lambda \int\limits_{\mathbb{R}^n} [Q^*(x, D_y)\, E_\mu(x - y)]\, \nu(y)\, dy + \lambda T\, \nu = \psi(x) \int\limits_{|y|_\mu < a} E(x - y)\, f(y)\, dy. \tag{2.9}$$

Окончательно приходим к следующему утверждению.

Лемма 2.1. Если $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$, а $u \in H^{2\overline{m}}(\mathbb{R}^n)$ является решением уравнения (2.1), то функция $\nu(x) = u(x)\, \psi(x)$ принадлежит $L_2(\mathbb{R}^n)$ и удовлетворяет уравнению (2.9).

Справедливо также и обратное утверждение.

Лемма 2.2. Если функция $\nu \in L_2(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет уравнению (2.9), то функция $u(x) = \nu(x)/\psi(x)$ удовлетворяет уравнению (2.1) и принадлежит классу $H^{2\overline{m}}(\mathbb{R}^n)$.

В силу Лемм 2.1, 2.2 и результатов работы [13] приходим к следующей теореме.

Теорема 2.1. При всех $\lambda \in \Delta$ индекс оператора $A(x, D, \lambda)$ равен нулю. При всех $\lambda \in \Delta_0$, за исключением счетного множества $\Delta_1 \subset \Delta_0$, уравнение (2.1) имеет единственное решение в классе $H^{2\overline{m}}(\mathbb{R}^n)$.

Замечание 2.1. В работе [14] построен пример, показывающий, что множество Δ_1 может быть не пустым.

§3. ТЕОРЕМЫ ОБ АППРОКСИМАЦИИ

В $\mathbb{R}^n$ рассмотрим уравнение

$$A(x, D)\, u = f, \tag{3.1}$$

где $A(x, D) \equiv A(x, D, \lambda_0)$ - оператор вида (2.1), $Q = Q(x, D)$ - дифференциальный оператор с финитными гладкими коэффициентами, $\lambda_0 \in \Delta_0 \setminus \Delta_1$ - фиксированное число. Как обычно, функция $W(x, x_0)$ является фундаментальным решением $A(x, D)$ в точке x_0, если $A(x, D)\, W(x, x_0) = \delta(x - x_0)$. Нас будут интересовать фундаментальные решения, которые убывают при $|x|_\mu \to \infty$, причем только для точек x_0 из максимальной открытой области Y, в которой коэффициенты оператора $Q(x, D)$ равны нулю. В этом случае, очевидно $W(x, x_0) = E(x - x_0) + \nu(x, x_0)$, где E - экспоненциально убывающее на бесконечности фундаментальное решение оператора $P = P(D)$, а ν - убывающее решение (при $|x|_\mu \to \infty$) уравнения

$$P(D)\, \nu + \lambda_0\, Q(x, D)\, \nu = -\lambda_0\, Q(x, D)\, E(x - x_0). \tag{3.2}$$

Лемма 3.1. Пусть $x_0 \in Y$. Тогда уравнение (3.2) имеет единственное решение $u \in H^{2\overline{m}}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство : Рассмотрим уравнение

$$(P + \lambda_0\, Q)\, u = f, \tag{3.3}$$

где $f = -\lambda_0\, Q(x, D)\, E(x - x_0)$ - финитная гладкая функция (так как $x_0 \in Y$). Решение уравнения (3.3) будем искать в виде $u = P^{-1}\omega = E * \omega$. Легко проверить, что функция u является решением уравнения (3.3) тогда и только тогда, когда $\omega \in L_2(\mathbb{R}^n)$ является решением уравнения

$$\omega + \lambda_0\, Q\, P^{-1}\, \omega = f. \tag{3.4}$$

Существование и единственность решения $\omega \in L_2(\mathbb{R}^n)$ уравнения (3.4) следует из результатов §2. Поэтому используя Лемму 2.1 получаем утверждение Леммы 3.1.

Замечание 3.1. Из доказательства Леммы 3.1 следует, что при $|x|_\mu \to \infty$ для решения $\nu = \nu(x, x_0)$ уравнения (3.2) имеет место оценка

$$\|\nu\|_{H^{2\overline{m}}(\mathbb{R}^n)} \le c\, e^{-\gamma_1 |x|_\mu^{\kappa_0}}. \tag{3.5}$$

Действительно, согласно неравенству (1.15), при $|x_0|_\mu \to \infty$ имеем $\|Q(x, D)\, E(x - x_0)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \le c\, e^{-\gamma_1 |x_0|_\mu^{\kappa_0}}$. Поскольку для оператора $I + \lambda_0\, Q\, P^{-1}$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$

существует непрерывный обратный и P^{-1} непрерывно отображает $L_2(\mathbb{R}^n)$ в $H^{2\overline{m}}(\mathbb{R}^n)$, то (3.5) следует из формулы

$$\nu(x, x_0) = P^{-1}(I + \lambda_0 Q P^{-1})^{-1} [-\lambda_0 Q(x, D) E(x - x_0)].$$

Замечание 3.2. Из Леммы 1.1 следует, что $x_0 \in K$, где $K \subset Y$ - компакт и справедлива оценка

$$|D_x^\alpha D_{x_0}^\beta \nu(x, x_0)| \leq c(K, \alpha, \beta) e^{-\gamma_1 |x|_\mu^{\mu_0}}, \quad |x|_\mu \to \infty.$$

Пусть $A(x, D)$ формально сопряжен и имеет вещественные коэффициенты, т.е.

$$\overline{A(x, D) u} = A(x, D) \overline{u}. \tag{3.6}$$

Тогда справедливы формулы Грина (см. [15])

$$\int\limits_{B_{R,\mu}} [u A(x, D) \nu - \nu A(x, D) u] \, dx = \sum_{j=0}^{m_0-1} \int\limits_{S_{R,\mu}} [F_j u \Phi_j \nu - \Phi_j u F_j \nu] \, dS,$$

$$u_0(x) = \sum_{j=0}^{m_0-1} \int\limits_{S_{R,\mu}} F_j u \Phi_j W(x, x_0) \, dS - \sum_{j=0}^{m_0-1} \int\limits_{S_{R,\mu}} \Phi_j u F_j W(x, x_0) \, dS.$$

Первая формула справедлива для любых гладких функций u и ν, а вторая верна, если $A(x, D) u = 0$, $|x|_\mu < R$, $x_0 \in Y$.

Здесь F_j и Φ_j суть операторы μ-порядка $\mu_0 j$ и $2 - \mu_0 - \mu_0 j$, соответственно. Вообще говоря, они определяются неоднозначно. Для пары операторов F_j и Φ_j, удовлетворяющих условиям $\overline{F_j u} = F_j \overline{u}$, $\overline{\Phi_j u} = \Phi_j \overline{u}$, $(j = 0, ..., m_0 - 1)$, рассмотрим задачу

$$A(x, D) u_R(x) = f(x), \quad x \in B_{R,\mu}, \tag{3.7}$$

$$\Phi_j u_R - b_j F_j u_R = 0, \quad |x|_\mu = R, \quad j = 0, ..., m_0 - 1, \tag{3.8}$$

где b_j - постоянные, удовлетворяющие условиям

$$\mathrm{Re}\, b_j = 0, \quad \mathrm{Im}\, b_j > 0, \quad j = 0, ..., m_0 - 1, \quad \text{или}$$

$$\mathrm{Re}\, b_j = 0, \quad \mathrm{Im}\, b_j < 0, \quad j = 0, ..., m_0 - 1, \tag{3.9}$$

и граничные условия (3.9) коэрцитивны.

Теорема 3.1. **Пусть** $A(x, D)$ **формально самосопряжен и удовлетворяет условию (3.6), и** $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$. **Тогда уравнение (3.1) имеет в пространстве** $H^{2m}(\mathbb{R}^n)$ **единственное решение. При достаточно больших** R **задача (3.7), (3.8) также имеет единственное решение. При этом, если** $\mu_0 > \mu_i/2$ $(i = 1, ..., n)$, **то для любого компакта** K

$$\sup_{x \in K} |D^\tau [u(x) - u_R(x)]| \leq c(\tau, K)\, e^{-\gamma_1 R^{\mu_0}}\, R^{2+|\mu|/2-\mu_0}.$$

Теорема 3.2. **Пусть выполнены условия Теоремы 3.1 и**

$$D^\nu f(x) = O(h(|x|_\mu)) \quad \text{для} \quad |x|_\mu \geq R_1, \quad (\mu, \nu) \leq \mu_0,$$

где $h(R)$ – **монотонно убывающая положительная функция, удовлетворяющая условию** $\int h(|x|_\mu)\, dx < \infty$. **Тогда для любого** τ, $|x|_\mu < R - 1$ **и** $R \to \infty$ **имеем**

$$|D^\tau [u(x) - u_R(x)]| \leq c(\tau)\, R^M \left[h(R/2) + e^{-\gamma_1 R^{\mu_0}/2}\right] \left[e^{-\gamma_1 |x|_\mu^{\mu_0}} + e^{-\gamma_1 (R-|x|_{\mu_0})^{\mu_0}}\right],$$

где $M = \max\{2 + |\mu|/2 - \mu_0, |\mu| - \mu_0\}$.

Доказательства Теорем 3.1 и 3.2 не отличаются от доказательств Теорем 3 и 4 в [1].

ABSTRACT. Theorems of approximation of solutions of linear elliptic equations in $\mathbb{R}^n$ by the solutions of boundary – value problems in a sphere of "large" radius are well known. The present paper studies similar properties for the semi-elliptic equations. It is proved that for semi-elliptic equations in $\mathbb{R}^n$ the solution can be obtained as a limit as $R \to \infty$ of the solution u_R of a boundary value problem in certain bounded domains.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Шимон, "Аппроксимация решений эллиптического уравнения решениями граничных задач в шаре большого радиуса", Вестник МГУ, Москва, № 3, стр. 12 — 21, 1973.
2. Л. Хермандер, Линейные Дифференциальные Операторы с Частными Производными, Москва, Мир, 1965.
3. В. П. Паламодов, "Об условиях на бесконечности, обеспечивающих корректную разрешимость некоторого класса уравнений вида $P(i\,\partial/\partial x)\, u = f$", ДАН СССР, том 129, № 4, стр. 740 — 744, 1959.
4. Г. А. Карапетян, "Регулярные уравнения с параметром", Изв. АН Армении, сер. Математика, том 25, № 2, стр. 193 — 202, 1990.
5. С. М. Никольский, "Первая краевая задача для одного общего уравнения", ДАН СССР, том 144, № 4, стр. 767 — 769, 1962.
6. В. В. Грушин, "Связь между локальными и глобальными свойствами решений

гипоэллиптических уравнений с постоянными коэффициентами", Матем. Сборник, том 66 (108), № 4, стр. 525 — 550, 1965.

7. О. Б. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, Интегральные Представления Функций и Теоремы Вложения, том 1, 2, Москва, Наука, 1975.
8. Г. Г. Казарян, "Оценка в L_p смешанных производных через дифференциальные многочлены", Труды МИАН им. Стеклова, том 105, стр. 66 — 76, 1969.
9. С. В. Успенский, "О теоремах вложения функций в областях, I", Сиб. Матем. Журнал, том 8, № 3, стр. 650 — 663, 1966.
10. С. В. Успенский, "О следах функций класса $W_p^{l_1,\ldots,l_n}$ Соболева на гладких поверхностях", Сиб. Матем. Журнал, том 13, № 2, стр. 429 — 451, 1972.
11. П. С. Аветисян, "Оценки ядра резольвенты семиэллиптического оператора", Кандидатская Диссертация, Ереван, ЕГУ, 1992.
12. Г. А. Карапетян, "Решение полуэллиптических уравнений в полупространстве", Труды МИАН им. Стеклова, том 170, стр. 119 — 138, 1984.
13. С. Г. Михлин, Многомерные Сингулярные Интегралы и Интегральные Уравнения, Физматгиз, 1962.
14. Б. Р. Вайнберг, "Принципы излучения, предельного поглощения и предельной амплитуды в общей теории уравнений с частными производными", УМН, том 21, № 3(125), стр. 115 — 196, 1962.
15. П. П. Мосолов, "Об одной красвой задаче для симметрических операторов", Вестник МГУ, Москва, № 1, стр. 64 — 69, 1966.

10 июля 1999

Ереванский государственный университет