ЛОКАЛЬНО АСИМПТОТИЧЕСКИ НОРМАЛЬНЫЕ СЕМЕЙСТВА ГАУССОВСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

М. С. Гиновян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 4, 1999

Пусть $\mathbb{P}_{T,\theta}$ – вероятностное распределение наблюдения $\mathbf{X}_T = \{X(1),\ldots, X(T)\}$ вещественнозначного стационарного гауссовского процесса $X(t)$ с нулевым средним и спектральной плотностью $\theta(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi,\pi]$. В статье получены достаточные условия в терминах спектральной плотности, при которых семейство распределений $\{\mathbb{P}_{T,\theta},\ \theta \in \Theta\}$ с параметрическим множеством $\Theta \subset \mathbf{L}_p[-\pi,\pi]$ $(p \geq 2)$ удовлетворяет условию локальной асимптотической нормальности в смысле И. А. Ибрагимова и Р.З. Хасьминского (1991).

§1. ВВЕДЕНИЕ

Понятие локальной асимптотической нормальности (ЛАН) семейств распределений (см., например, [7], [9], [10], [13], [14]) играет важную роль в асимптотической теории оценивания. Ле Кам, Гаек, Ибрагимов, Хасьминский и другие показали (см., например, [9]), что многие важные свойства статистических оценок (характеризация предельных распределений, нижние границы точности оценивания, асимптотическая эффективность и т.д.) вытекают из условия ЛАН. Важность условия ЛАН для задач непараметрической теории оценивания подчеркивали Левит ([12], [13]), Миллар [14], Ибрагимов и Хасьминский [10] и другие. Условие ЛАН для семейств распределений, порожденных стационарным гауссовским процессом со спектральной плотностью, зависящей от конечномерного параметра, было изучено Дэвисом [1], Джапаридзе [2] и Гиновяном [3]. В [10] Ибрагимов и Хасьминский предложили новое определение концепции ЛАН для семейств распределений в случае, когда параметрическое множество является подмножеством бесконечномерного нормированного пространства.

В настоящей статье получены некоторые достаточные условия в терминах спектральной плотности рассматриваемого стационарного гауссовского процесса, при которых семейство распределений $\{\mathbb{P}_{T,\theta}, \theta \in \Theta\}$ удовлетворяет условию ЛАН в смысле Ибрагимова и Хасьминского [10], с бесконечномерным параметрическим множеством Θ.

Пусть наблюдается конечная реализация $\mathbf{X}_T = \{X(1),..., X(T)\}$ вещественнозначного стационарного гауссовского процесса $X(t)$, $t \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, ...\}$ с нулевым средним и спектральной плотностью $\theta(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$. Предположим, что $\theta(\lambda)$ принадлежит заданному классу $\Theta \subset \mathbf{L}_p = \mathbf{L}_p[-\pi, \pi]$ $(p \geq 2)$ спектральных плотностей, обладающих некоторыми условиями гладкости. Распределение процесса $X(t)$ полностью определяется спектральной плотностью и мы рассматриваем $\theta(\lambda)$ как бесконечномерный "параметр", от которого зависит распределение процесса $X(t)$. Пусть $\mathbb{P}_{T,\theta}$ – вероятностное распределение гауссовского вектора $\mathbf{X}_T = \{X(1), ..., X(T)\}$ со спектральной плотностью $\theta(\lambda)$. Следуя И. А. Ибрагимову и Р.З. Хасьминскому (см. [10]), введем следующее определение ЛАН.

Определение 1. Семейство распределений $\{\mathbb{P}_{T,\theta}, \theta \in \Theta\}$ называется **локально асимптотически нормальным** в $\theta_0 \in \Theta$ в направлении $\mathbf{L}_2$ с нормирующими множителями $A_T = A_T(\theta_0)$, если существует линейное многообразие $H_0 \subset \mathbf{L}_2$, с замыканием $\overline{H_0} = \mathbf{L}_2$ и семейство $\{A_T\}$ линейных операторов $A_T : \mathbf{L}_2 \to \mathbf{L}_2$, удовлетворяющих условиям :

1) для любого $h \in H_0$, $||A_T h||_2 \to 0$ при $T \to \infty$;

2) для любого $h \in H_0$ найдется натуральное число $T(h)$ такое, что $\theta_0 + A_T h \in \Theta$ для всех $T > T(h)$;

3) для любого $h \in H_0$ и $T > T(h)$ имеет место представление

$$\ln \frac{d\mathbb{P}_{T,\theta_0+A_T(h)}}{d\mathbb{P}_{T,\theta_0}}(\mathbf{X}_T) = \Delta_T(h, \theta_0) - \frac{1}{2}||h||_2^2 + \phi(T, h, \theta_0), \tag{1}$$

где $\Delta_T(h) = \Delta_T(h, \theta_0)$ – случайная линейная функция на H_0 (т.е. $\Delta_T(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2) = \alpha_1 \Delta_T(h_1) + \alpha_2 \Delta_T(h_2)$ для любых постоянных α_1, α_2 и любых h_1, $h_2 \in H_0$) асимптотически (при $T \to \infty$) $N(0, ||h||_2^2)$ – нормально распределена для любой $h \in H_0$, и $\phi(T, h, \theta_0) \to 0$ при $T \to \infty$ по $\mathbb{P}_{T,\theta_0}$ вероятности.

Заметим, что свойство ЛАН полностью определяется точкой θ_0, пространством $\mathbf{L}_2$ и семейством операторов $\{A_T\}$. Выбор пространства $H_0 = H_0(\theta_0)$ в некоторой степени произволен. Важно только, чтобы его замыкание совпало с $\mathbf{L}_2$, т.е. $\overline{H_0} = \mathbf{L}_2$.

§2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Прежде всего приведем несколько обозначений и определений.

Определение 2. Будем говорить, что неотрицательная 2π–периодическая функция $f(\lambda)$ удовлетворяет условию **Маккенхаупта** (или имеет нули типа Маккенхаупта), если (см. [8])

$$\sup \frac{1}{|J|^2} \int_J f(\lambda)\, d\lambda \int_J \frac{1}{f(\lambda)}\, d\lambda < \infty, \tag{2}$$

где супремум берется по интервалам $J \subset [-\pi, \pi]$ и $|J|$ – длина интервала J.

Определение 3. Для заданного числа $\gamma > 0$ положим $\gamma = r + \alpha$, где $0 < \alpha < 1$, а $r \in \mathbb{N}_0$ – множество неотрицательных целых чисел. Функция $\psi(\lambda) \in \mathbf{L}_p$ $(p > 1)$ принадлежит классу Гельдера $\mathbf{H}_p(\gamma)$, если $\psi(\lambda)$ имеет r–ую производную $\psi^{(r)}(\lambda) \in \mathbf{L}_p$ удовлетворяющую условию $\|\psi^{(r)}(\cdot + u) - \psi^{(r)}(\cdot)\|_p \le C|u|^\alpha$, где $C > 0$ – постоянная.

Класс спектральных плотностей, принадлежаших $\mathbf{H}_p(\beta)$, обозначим через $\Sigma_p(\beta)$.

Определение 4. Будем говорить, что пара функций $(f(\lambda), g(\lambda))$ удовлетворяет условию $(\mathcal{H})$, если $f(\lambda) \in \Sigma_p(\beta_1)$ для $\beta_1 > 0$, $p > 1$ и $g(\lambda) \in \mathbf{H}_q(\beta_2)$ для $\beta_2 > 0$, $q > 1$ с $1/p + 1/q = 1$ и выполняется одно из условий a) – d) :

a) $\beta_1 > 1/p$, $\beta_2 > 1/q$,

b) $\beta_1 \le 1/p$, $\beta_2 \le 1/q$ и $\beta_1 + \beta_2 > 1/2$,

c) $\beta_1 > 1/p$, $1/q - 1/2 < \beta_2 \le 1/q$,

d) $\beta_2 > 1/q$, $1/p - 1/2 < \beta_1 \le 1/p$.

Мы предполагаем, что параметрическое множество Θ является подмножеством пространства $\mathbf{L}_p$ $(p \ge 2)$, состоящего из спектральных плотностей, удовлетворяющих условию Маккенхаупта (2) и принадлежащих классу Гельдера $\mathbf{H}_p(\gamma)$. Определим $H_0 = H_0(\theta)$ как линейное многообразие, состоящее из ограниченных на $[-\pi, \pi]$ функций $h(\lambda)$ таких, что пара $(\theta, h\theta^{-1})$ удовлетворяет условию $(\mathcal{H})$. Легко проверить, что так определенное многообразие H_0 удовлетворяет условию $\overline{H_0} = \mathbf{L}_2$. Определим также $A_T : \mathbf{L}_2 \to \mathbf{L}_2$ по формуле $A_T(h) = [T^{-1/2}\,\theta] \cdot h$, т.е. A_T является оператором умножения на функцию $T^{-1/2}\,\theta(\lambda)$.

Теорема 1. **Пусть Θ, H_0 и A_T определяются как и выше. Тогда семейство распределений $\{\mathbb{P}_{T,\theta}, \theta \in \Theta\}$ удовлетворяет условию ЛАН в любой точке $\theta \in \Theta$ в направлении $\mathbf{L}_2$ с нормирующими множителями**

A_T и

$$\Delta_T(h,\theta) = \frac{T^{1/2}}{4\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{I_T(\lambda) - \theta(\lambda)}{\theta(\lambda)} h(\lambda)\, d\lambda, \tag{3}$$

где

$$I_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi T} \left| \sum_{t=1}^{T} X(t)\, e^{-i\lambda t} \right|^2 \tag{4}$$

– периодограмма процесса $X(t)$.

При более сильном предположении, что параметрический класс Θ состоит из строго положительных и непрерывных спектральных плотностей, тот же результат был анонсирован в работе Ибрагимова и Хасьминского [10].

§3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $X(t)$, $t \in \mathbb{Z}$ – вещественнозначный стационарный гауссовский процесс $X(t)$ с нулевым средним и спектральной плотностью $f(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$. Обозначим через $B_T(f)$ ковариационную матрицу процесса $X(t)$, т.е.

$$B_T(f) = \|r(u-v)\|_{u,v=\overline{1,T}}, \tag{5}$$

где

$$r(u-v) = \mathbb{E}\, X(u)\, X(v) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-i\lambda(u-v)} f(\lambda)\, d\lambda \tag{6}$$

– ковариационная функция процесса $X(t)$. Для $h(\lambda) \in H_0$ положим

$$f_T(\lambda) = f_{T,h}(\lambda) = 0 f(\lambda) \left(1 + T^{-1/2} h(\lambda)\right). \tag{7}$$

Для гауссовских процессов логарифм отношения правдоподобия

$$L_T(\mathbf{X}_T, f, f_T) = \log \frac{d\mathbb{P}_{T,f_T}}{d\mathbb{P}_{T,f}} (\mathbf{X}_T), \quad \text{где} \quad \mathbf{X}_T = \{X(1), ..., X(T)\},$$

допускает следующее представление (см. [11], §3.2) :

$$\begin{aligned} L_T(\mathbf{X}_T, f, f_T) &= \frac{1}{2} \left[\log\det B_T(f) - \log\det B_T(f_T)\right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\mathbf{X}'_T B_T^{-1}(f)\, \mathbf{X}_T - \mathbf{X}'_T B_T^{-1}(f_T)\, \mathbf{X}_T\right]. \end{aligned} \tag{8}$$

Нам будет удобнее иметь дело со спектральными представлениями случайных функций $L_T(\mathbf{X}_T, f, f_T)$ и $\Delta_T(h, f)$, определенных по (8) и (3). Обозначим через $\mathbf{L}_2(f)$ весовое пространство

$$\mathbf{L}_2(f) = \left\{ \varphi(\lambda); \quad \|\varphi\|_f = \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\varphi(\lambda)|^2 f(\lambda)\, d\lambda \right)^{1/2} < \infty \right\}$$

и пусть $H_T(f)$ – пространство тригонометрических многочленов степени не выше T, рассматриваемое как подпространство пространства $\mathbf{L}_2(f)$. Обозначим через $\mathbf{P}_T(f)$ ортогональный проектор в $\mathbf{L}_2(f)$ на подпространство $H_T(f)$. Отметим, что $\mathbf{P}_T(f)$ является интегральным оператором в $\mathbf{L}_2(f)$ с ядром $G_T(f;\lambda,\mu)$:

$$G_T(f;\lambda,\mu)=\sum_{k=1}^{T}\varphi_k(f;\zeta)\overline{\varphi_k(f;z)},\quad z=e^{i\lambda},\quad \zeta=e^{i\mu}, \tag{9}$$

где $\{\varphi_k(f;z),\ k=1,2,...\}$ – система ортогональных многочленов, связанных со спектральной плотностью $f(\lambda)$. Таким образом, $(\varphi_k(f;e^{i\lambda}),\ \varphi_j(f;e^{i\lambda}))_f=\delta_{kj}$, где $(\cdot,\cdot)_f$ – скалярное произведение в $\mathbf{L}_2(f)$, а $\delta_{kj}=1$ для $k=j$ и $\delta_{kj}=0$ – в противном случае (см. [6], [11]). Легко проверить,что $G_T(f;\lambda,\mu)$ является воспроизводящим ядром пространства $H_T(f)$, т.е. $G_T(f;\lambda,\cdot)\in H_T(f)$ и для каждого $\varphi(\lambda)\in H_T(f)$

$$(\varphi(\mu),G_T(f;\lambda,\mu))_f=\varphi(\lambda). \tag{10}$$

Используя (5), (6) и (9), легко проверить, что $L_T(\mathbf{X}_T,f,f_T)$, задаваемое формулой (8), допускает спектральное представление

$$L_T(\mathbf{X}_T,f,f_T)=\frac{1}{2}\left[\log\det B_T(f)-\log\det B_T(f_T)\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[G_T(f,\lambda,\mu)-G_T(f_T,\lambda,\mu)\right]Z^f(d\lambda)\,Z^f(d\mu), \tag{11}$$

где $Z(d\lambda)$ – ортогональная стохастическая мера, участвующая в спектральном представлении процесса $X(t)$ (см. [11], §1.6) :

$$X(t)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{it\lambda}\,Z(d\lambda).$$

Очевидно

$$\mathbb{E}_f\left[Z^f(d\lambda)\,Z^f(d\mu)\right]=\begin{cases}f(\lambda)\,d\lambda, & \text{если}\quad \lambda=\mu,\\ 0, & \text{если}\quad \lambda\neq\mu.\end{cases} \tag{12}$$

Аналогично, для случайной функции $\Delta_T(h,f)$, задаваемой формулой (3), имеем следующее спектральное представление :

$$\begin{aligned}\Delta_T(h,f)=\frac{T^{-1/2}}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}G_T(\lambda,t)\,G_T(t,\mu)\,\frac{h(t)}{f(t)}\,dt\,Z^f(d\lambda)\,Z^f(d\mu)-\\ -\frac{T^{1/2}}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(\lambda)\,d\lambda,\end{aligned} \tag{13}$$

где

$$G_T(\lambda, t) = G_T(1; \lambda, t) = e^{iT(\lambda - t)/2} \cdot \frac{\sin(T(\lambda - t)/2)}{\sin((\lambda - t)/2)}. \tag{14}$$

Лемма 1. Пусть пара функций $(f(\lambda), g(\lambda))$ удовлетворяет условию $(\mathcal{H})$. Тогда

$$\int_{-\pi}^{pi}\int_{-\pi}^{\pi} |G_T(\lambda, t)|^2 g(t) f(\lambda)\, d\lambda\, dt = T \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) g(\lambda)\, d\lambda + o(T^{1/2}) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{15}$$

Доказательство : Используя Теорему 6 из [5] получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |G_T(\lambda, t)|^2 g(t) f(\lambda)\, d\lambda\, dt - T \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) g(\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \begin{cases} O\left(T^{1-(\beta_1+\beta_2)}\right) & \text{для} \quad \beta_1 + \beta_2 < 1, \\ O(\log T) & \text{для} \quad \beta_1 + \beta_2 = 1, \\ O(1) & \text{для} \quad \beta_1 + \beta_2 > 1, \end{cases} \tag{16}$$

где β_1 и β_2 – числа, участвующие в Определении 4.

Из условия $(\mathcal{H})$ вытекает, что $\beta_1 + \beta_2 > 1/2$. Поэтому (15) следует из (16).

Лемма 2 (см. [4]). Пусть пара функций $(f(\lambda), g(\lambda))$ удовлетворяет условию $(\mathcal{H})$. Тогда случайная величина

$$\eta_T = \frac{T^{1/2}}{4\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} I_T(\lambda) g(\lambda)\, d\lambda - \int_{-\pi}^{\pi} \mathbb{E}_f \left[I_T(\lambda) \right] g(\lambda)\, d\lambda \right],$$

где $I_T(\lambda)$ – периодограмма, задаваемая по (4), имеет асимптотически (при $T \to \infty$) нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией σ^2 :

$$\sigma^2 = \frac{1}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(\lambda) g^2(\lambda)\, d\lambda. \tag{17}$$

Доказательство следующей леммы можно найти в [15], стр. 254 – 255.

Лемма 3. Следующие условия эквивалентны :

a) спектральная плотность $f(\lambda)$ удовлетворяет условию Маккенхаупта (2) ;

b) существует положительная постоянная C, удовлетворяющая условию

$$\sup_T \|\mathbf{P}_T(1)\|_f \le C < \infty, \tag{18}$$

где $\mathbf{P}_T(1)$ – ортогональный проектор в $\mathbf{L}_2 = \mathbf{L}_2(1)$ на подпространство $H_T(1)$, а $\|\mathbf{P}_T(1)\|_f$ – операторная норма ортогонального проектора $\mathbf{P}_T(1)$ в пространстве $\mathbf{L}_2(f)$.

§4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Прежде всего заметим, что для всех $h \in H_0$ и достаточно больших T имеем

$$\theta_0 + A_T(h) = \theta_0 + [T^{-1/2} f] \cdot h \in \Theta.$$

Согласно неравенству Гельдера, из условий теоремы следует, что $f(\lambda)\, h(\lambda) \in \mathbf{L}_2$. Поэтому, для всех $h \in H_0$ получаем

$$\|A_T(h)\|_2 = T^{-1/2} \|f\, h\|_2 \to 0 \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$

Следовательно, нам достаточно доказать справедливость следующих двух утверждений (см. Определение 1) :

a) для любого $h \in H_0$ случайная величина $\phi(T, h, f)$ задаваемая формулой

$$\phi(T, f, h) \stackrel{def}{=} L_T(\mathbf{X}_T, f, f_T) - \frac{T^{1/2}}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{I_T(\lambda) - f(\lambda)}{f(\lambda)} h(\lambda)\, d\lambda + \frac{1}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h^2(\lambda)\, d\lambda, \quad (19)$$

стремится к 0 при $T \to \infty$ по $\mathbb{P}_{T,f}$- вероятности ;

b) для любого $h \in H_0$ случайная величина $\Delta_T(h, \theta)$, определенная по формуле (3), имеет асимптоточески (при $T \to \infty$) нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2 = \|h\|_2^2$.

В силу неравенства Чебышева для доказательства а) достаточно показать, что математическое ожидание и дисперсия случайной величины $\phi(T, h, f)$ стремятся к 0 при $T \to \infty$, т.е.

$$\mathbb{E}_f\, [\phi(T, f, h)] \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad T \longrightarrow \infty \quad (20)$$

$$\mathbb{D}_f\, [\phi(T, f, h)] \to 0 \quad \text{при} \quad T \to \infty. \quad (21)$$

Из (10) и (14) следует, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_T(\lambda, t)\, G_T(t, \mu)\, dt = G_T(\lambda, \mu).$$

Следовательно, используя (3), (12) и (13), из (19) получаем

$$\mathbb{E}_f\, [\phi(T, f, h)] = \left\{ \mathbb{E}_f [L_T(\mathbf{X}_T, f, f_T)] + \frac{1}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h^2(\lambda)\, d\lambda \right\} +$$

$$+ \left\{ \frac{T^{1/2}}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\lambda)\, d\lambda - \frac{T^{-1/2}}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |G_T(\lambda, t)|^2 \frac{h(t)}{f(t)} f(\lambda)\, d\lambda\, dt \right\} \stackrel{def}{=} S_T^{(1)} + S_T^{(2)}. \quad (22)$$

Рассуждая как и при доказательстве Леммы 2 из [3] можно показать, что $S_T^{(1)} \to 0$ при $T \to \infty$. Далее, полагая $\frac{h(t)}{f(t)} = g(t)$ и применяя Лемму 1, получаем $S_T^{(2)} \longrightarrow 0$ при $T \to \infty$. Отсюда и из (22) следует (20). Для доказательства (21) заметим, что из (12) и (19) имеем

$$\mathbb{D}_f[\phi(T,f,h)] = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Big| G_T(f;\lambda,\mu) - G_T(f_T;\lambda,\mu) - \\ - \frac{T^{-1/2}}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_T(\lambda,t)\, G_T(t,\mu)\, \frac{h(t)}{f(t)}\, dt \Big|^2 f(\lambda) f(\mu) d\lambda\, d\mu = \\ = \frac{1}{2} \left\| \mathbf{P}_T(f) - \mathbf{P}_T(f_T)\, \frac{\mathbf{f}}{\mathbf{f}_T}\, \mathbf{P}_T(f) - T^{-1/2}\, \mathbf{P}_T(1)\, \frac{\mathbf{h}}{\mathbf{f}}\, \mathbf{P}_T(1)\, \mathbf{f} \right\|_f^2, \tag{23}$$

где $\mathbf{P}_T(f)$ – интегральный оператор в $\mathbf{L}_2(f)$ с ядром $G_T(f;\lambda,\mu)$, определенным по формуле (9), $G_T(\lambda,\mu) = G_T(1;\lambda,\mu)$, $\mathbf{g}$ обозначает оператор умножения на функцию $g(\lambda)$, а $\|A\|_f$ – норма Гильберта-Шмидта оператора A в пространстве $\mathbf{L}_2(f)$. Используя рассуждения доказательства Теоремы 3 из [3], можно показать, что

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left\| \mathbf{P}_T(f)\, \mathbf{h}\, \mathbf{P}_T(f) - \mathbf{P}_T(1)\, \frac{\mathbf{h}}{\mathbf{f}}\, \mathbf{P}_T(1)\, \mathbf{f} \right\|_f^2 = 0. \tag{24}$$

Следовательно, для доказательства (21) достаточно показать, что

$$\lim_{T\to\infty} \|A_T(f)\|_f^2 = 0, \tag{25}$$

где

$$A_T(f) \stackrel{def}{=} \mathbf{P}_T(f) - \mathbf{P}_T(f_T)\, \frac{\mathbf{f}}{\mathbf{f}_T}\, \mathbf{P}_T(f) - T^{-1/2}\, \mathbf{P}_T(f)\, \mathbf{h}\, \mathbf{P}_T(f). \tag{26}$$

Из равенства

$$\mathbf{P}_T(f) - \mathbf{P}_T(f_T)\, \frac{\mathbf{f}}{\mathbf{f}_T}\, \mathbf{P}_T(f) = \mathbf{P}_T(f_T)\, \frac{T^{-1/2}\mathbf{h}}{1 + T^{-1/2}\mathbf{h}}\, \mathbf{P}_T(f) \tag{27}$$

и из (26) находим

$$\|A_T(f)\|_f^2 = \left\| \mathbf{P}_T(f_T)\, \frac{T^{-1/2}\mathbf{h}}{1 + T^{-1/2}\mathbf{h}}\, \mathbf{P}_T(f) - T^{-1/2}\, \mathbf{P}_T(f)\, \mathbf{h}\, \mathbf{P}_T(f) \right\|_f^2 \le \\ \le \frac{C}{T} \left\| \mathbf{P}_T(f_T)\, \frac{1}{1 + T^{-1/2}\mathbf{h}} - \mathbf{P}_T(f) \right\|_f^2 = \\ = \frac{C}{T} \Big\| \left(\mathbf{P}_T(f_T) - \mathbf{P}_T(1)\, \frac{1}{\mathbf{f}_T}\, \mathbf{P}_T(1)\, \mathbf{f}_T \right) \frac{1}{1 + T^{-1/2}\mathbf{h}} + \\ + \left(\mathbf{P}_T(1)\, \frac{1}{\mathbf{f}}\, \mathbf{P}_T(1)\, \mathbf{f} - \mathbf{P}_T(f) \right) + \left(\mathbf{P}_T(1)\, \frac{1}{\mathbf{f}_T}\, \mathbf{P}_T(1)\, \mathbf{f} - \mathbf{P}_T(1)\, \frac{1}{\mathbf{f}}\, \mathbf{P}_T(1)\, \mathbf{f} \right) \Big\|_f^2 \le$$

$$\le \frac{C}{T}\left\|\mathbf{P}_T(f_T)-\mathbf{P}_T(1)\,\frac{1}{\mathbf{f}_T}\,\mathbf{P}_T(1)\,\mathbf{f}_T\right\|_f^2+\frac{C}{T}\left\|\mathbf{P}_T(f)-\mathbf{P}_T(1)\,\frac{1}{\mathbf{f}}\,\mathbf{P}_T(1)\,\mathbf{f}\right\|_f^2+ \\ +\frac{C}{T}\left\|\mathbf{P}_T(1)\left(\frac{1}{\mathbf{f}}-\frac{1}{\mathbf{f}_T}\right)\mathbf{P}_T(1)\right\|_f^2. \tag{28}$$

Используя аргументы доказательства Теоремы 3 из [3], можно показать, что при условии $(\mathcal{H})$ первое и второе слагаемые в последнем выражении (28) имеют порядок $o\left(T^{1/2}\right)$ при $T\to\infty$. Следовательно, для завершения доказательства (25) нам остается показать, что

$$\frac{1}{T}\left\|\mathbf{P}_T(1)\left(\frac{1}{\mathbf{f}}-\frac{1}{\mathbf{f}_T}\right)\mathbf{P}_T(1)\,\mathbf{f}\right\|_f^2\longrightarrow 0\quad\text{при}\quad T\to\infty. \tag{29}$$

Используя (7) получим

$$\frac{1}{T}\left\|\mathbf{P}_T(1)\left(\frac{1}{\mathbf{f}}-\frac{1}{\mathbf{f}_T}\right)\mathbf{P}_T(1)\,\mathbf{f}\right\|_f^2=\frac{1}{T}\left\|\mathbf{P}_T(1)\,\frac{T^{-1/2}\mathbf{h}}{1+T^{-1/2}\mathbf{h}}\,\frac{1}{\mathbf{f}}\,\mathbf{P}_T(1)\,f\right\|_f^2\le \\ \le\frac{C}{T}\cdot\sup_T\|\mathbf{P}_T(1)\|_f^2\cdot\sup_T\|\mathbf{P}_T(1)\|_{1/f}^2. \tag{30}$$

Отметим, что вместе с $f(\lambda)$ функция $1/f(\lambda)$ также удовлетворяет условию Маккенхаупта (2). Поэтому используя Лемму 3 получаем

$$\sup_T\|\mathbf{P}_T(1)\|_f<\infty\quad\text{и}\quad\sup_T\|\mathbf{P}_T(1)\|_{1/f}<\infty$$

Следовательно, последнее выражение в (30) стремится к нулю при $T\to\infty$. Таким образом, (29) доказано. Комбинируя (26), (28) и (29) получаем (25). Наконец, применяя неравенство Чебышева и учитывая (20) и (21), мы завершаем доказательство утверждения a).

Для доказательства утверждения b) положим $g(\lambda)=\dfrac{h(\lambda)}{\theta(\lambda)}$ и представим случайную величину $\Delta_T(h,\theta)$, определенную по формуле, (3) в виде

$$\Delta_T(h,\theta)=\frac{T^{1/2}}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[I_T(\lambda)-\theta(\lambda)\right]g(\lambda)\,d\lambda\overset{def}{=}\eta_T(h,\theta)+M_T, \tag{31}$$

где

$$\eta_T(h,\theta)=\frac{T^{1/2}}{4\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}I_T(\lambda)\,g(\lambda)\,d\lambda-\int_{-\pi}^{\pi}\mathbb{E}_f\left[I_T(\lambda)\right]g(\lambda)\,d\lambda\right], \tag{32}$$

$$M_T=\frac{T^{1/2}}{4\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\mathbb{E}_f\left[I_T(\lambda)\right]g(\lambda)\,d\lambda-\int_{-\pi}^{\pi}f(\lambda)\,g(\lambda)\,d\lambda\right]. \tag{33}$$

Принимая во внимание (4), (12) и (14), из (33) получаем

$$M_T = \frac{T^{-1/2}}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |G_T(\lambda,\mu)|^2\, g(\lambda)\, f(\mu)\, d\lambda\, d\mu - T^{1/2}\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)\, g(\lambda)\, d\lambda.$$

Используя Лемму 1 находим, что $M_T \to 0$ при $T \to \infty$. Следовательно, при $T \to \infty$ случайные величины $\Delta_T(h,\theta)$ и $\eta_T(h,\theta)$ имеют одинаковые асимптотические распределения. Используя Лемму 2 получаем, что случайная величина $\Delta_T(h,\theta)$ имеет асимптотически нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией

$$\sigma^2 = \frac{1}{8\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(\lambda)\, g^2(\lambda)\, d\lambda = \frac{1}{8\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h^2(\lambda)\, d\lambda.$$

Этим завершается доказательство утверждения b). Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Рассуждая как и в доказательстве Теоремы 1, можно показать, что семейство распределений $\{\mathbb{P}_{T,\theta},\ \theta \in \Theta\}$ локально асимптотически нормально также и в направлении весового пространства $\mathbf{L}_2(f^2;\ [-\pi,\pi])$ (см. [10], [14]).

Замечание 2. Во многих задачах статистического оценивания важную роль играет равномерная версия ЛАН (см., например, [9]). Используя идею доказательства Теоремы 1, можно показать, что семейство распределений $\{\mathbb{P}_{T,\theta},\ \theta \in \Theta\}$ равномерно асимптотически нормально в каждом компакте $K \subset \Theta$ с нормирующими множителями $A_T(h) = [T^{-1/2}\theta]\cdot h$, причем $\Delta(h,\theta)$ определяется по формуле (3).

ABSTRACT. Let $\mathbb{P}_{T,\theta}$ be the probability distribution of an observation $\mathbf{X}_T = \{X(1),...,X(T)\}$ of a real-valued stationary Gaussian process $X(t)$ with zero mean and spectral density $\theta(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi,\pi]$. The paper derives sufficient conditions in terms of spectral density under which the family of distributions $\{\mathbb{P}_{T,\theta},\ \theta \in \Theta\}$ with a parametric set $\Theta \subset \mathbf{L}_p[-\pi,\pi]$ $(p \geq 2)$ satisfies the local asymptotic normality condition in the sense of I. A. Ibragimov and R. Z. Khas'minskii (1991).

ЛИТЕРАТУРА

1. B. R. Davies, "Asymptotic inference in stationary time-series", Adv. Appl. Probab., vol. 5, pp. 469 — 497, 1973.
2. K. O. Dzhaparidze, Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Spectral Analysis of Stationary Time Series, Springer-Verlag, New York, 1986.
3. М. С. Гиновян, "Локальная асимптотическая нормальность семейств гауссовских распределений", Записки Научных Семинаров ЛОМИ, том 136, стр. 13 — 27, 1984.
4. M. S. Ginovian, "On Toeplitz type quadratic functionals in Gaussian stationary

process," Probability Theory and Related Fields, vol. 100, pp. 395 — 406, 1994.
5. М. С. Гиновян, "Асимптотические свойства спектральных оценок стационарных гауссовских процессов", Изв. АН Армении, Математика, том 30, № 1, стр. 3 — 20, 1995.
6. U. Grenander and G. Szegö, Toeplitz Forms and their Applications, Berkeley and Los Angeles, University of California Press, 1958.
7. R. Z. Has'minskii and I. A. Ibragimov, "Asymptotically efficient nonparametric estimation of functionals of spectral density function", Probab. Theory Relat. Fields, vol. 73, pp. 447 — 461, 1986.
8. R. A. Hunt, B. Muckenhoupt and R. L. Wheeden, "Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform", Trans. of the AMS, vol. 176, pp. 227 — 251, 1973.
9. I. A. Ibragimov, R. Z. Khas'minskii, Statistical Estimation : Asymptotic Theory, Berlin– Heidelberg–New York, Springer, 1981.
10. I. A. Ibragimov, R. Z. Khas'minskii, "Asymptotically normal families of distributions and efficient estimation", The Annals of Statistics, vol. 19, no. 4, pp. 1681 — 1724, 1991.
11. И. А. Ибрагимов, Ю. А. Розанов, Гауссовские Стохастические Процессы, Москва, Наука, 1970.
12. B. Ya. Levit, "On optimality of some statistical estimates", Proc. Prague Symp. Asymptotic. Statistics, Vol. II, pp. 215 — 238, 1974.
13. Б. Я. Левит, "Бесконечномерные информационные неравенства", Теория вероятн. и ее примен., том. 23, вып. 2, стр. 371 — 377, 1978.
14. P. W. Millar, "Non-Parametric Applications of an Infinite Dimensional Convolution Theorem", Z. Wahrshchein. and verw. Geb.,vol. 68, pp. 545 — 556, 1985.
15. Н. К. Никольский, Лекции об Операторе Сдвига, Москва, Наука, 1980.

2 апреля 1999

Институт математики
Национальной Академии Наук Армении
E-mail : mamgin@instmath.sci.am