ОБОБЩЕННАЯ КВАЗИАНАЛИТИЧНОСТЬ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Г. В. Бадалян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 4, 1999

В работе проводится сравнительный анализ трех классов бесконечно дифференцируемых функций и исследуется задача обобщенной квазианалитичности для одного из этих классов.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Начнем с определений трех классов бесконечно дифференцируемых функций

Определение 1. Пусть $\mathcal{M} = \{M_n\}$ –последовательность неотрицательных чисел и $\rho > 1$. Функция $\varphi \in \mathbf{C}^1(0,\infty)$ принадлежит классу $C(\mathcal{M}, L_\rho, (0,\infty))$, если существуют последовательные дробные производные по Вейлю

$$L_\rho^0\varphi(x) = \varphi(x), \quad L_\rho^1\varphi(x) = \frac{d}{dx}J\varphi(x), \quad L_\rho^n\varphi(x) = \frac{d}{dx}JL_\rho^{n-1}\varphi(x), \quad n = 2, 3, ..., \tag{1}$$

где $J\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^\infty (t-x)^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt$, $\frac{1}{\rho} = 1-\alpha$, $0 < \alpha < 1$, удовлетворяющие условиям

$$|JL_\rho^n\varphi(x)| \le ch^n M_n, \quad x \in (0,\infty), \quad n = 0, 1, ..., \tag{2}$$

$$\lim_{x\to 0+} JL_\rho^n\varphi(x) = JL_\rho^n\varphi(0+), \quad \lim_{x\to\infty} JL_\rho^n\varphi(x) = 0, \tag{3}$$

$$L_\rho^n\varphi(x) = O(x^\Delta),\ x\to\infty,\ L_\rho^n\varphi(x) = O(x^{-\delta}),\ x\to 0,\ 0\le\Delta<1,\ 0\le\delta\le\alpha, \tag{4}$$

где $c, h > 0$ зависят от φ.

Ставится задача нахождения условия пустоты класса функций $C(\mathcal{M}, L_\rho, (0,\infty))$ при дополнительном условии (см. [1]) $J\varphi(0+) = JL_\rho^\lambda\varphi(0+) = 0$, $\lambda \in \{\lambda_\nu\} \subset \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ – множество натуральных чисел. Аналогичные задачи решены для следующих двух классов функций.

Определение 2. [2] Функция $\psi(u)$ принадлежит классу $C_\delta(\mathcal{M}, \alpha)$, $\alpha > 0$, $1 < \delta < 2$, $M_n \ge M_{n-1}$ при $n > n_0 > 0$, если она аналитична в угле $U(\alpha) =$

$\{u : |\arg u| < \frac{\pi}{2}\alpha\}$, а в замкнутом угле $\overline{U}(\alpha) = \{|\arg u| \le \frac{\pi}{2}\alpha\}$ удовлетворяет неравенству

$$|\psi^{(n)}(u)| \le ch^n(1+|u|^\delta)M_n, \quad \delta \in (1,2), \quad n = 0,1,..., \tag{5}$$

где постоянные $c, h > 0$ зависят только от ψ.

Определение 3. [3] Функция $\psi(u)$ принадлежит классу $JC(\mathcal{M},\alpha)$, $\alpha > 0$, если она аналитична и ограничена в угле $U(\alpha)$, и для любого луча $l(\theta) = \{u : 0 < |u| < \infty, \arg u = \theta\}$ принадлежащего замкнутому углу $\overline{U}(\alpha)$, имеем

$$\int_{l(\theta)} |\psi^{(n)}(u)|\,du \le ch^n M_n, \quad \psi^{(n)}(u) = O(1), \quad u \to \infty, \tag{6}$$

где постоянные $c, h > 0$ зависят только от ψ.

§1. СРАВНЕНИЕ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим функцию

$$P_n(u,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\Gamma(\xi+n)u^{-\xi-n}t^{(\xi+n)/\rho}}{\Gamma(1+(\xi+n)/\rho)Q(\xi)}\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \frac{\Gamma(\xi)u^{-\xi}t^{\xi/\rho}}{\Gamma(1+\xi/\rho)Q(\xi-n)}\,d\xi, \quad \rho > 1, \tag{7}$$

где $-n < \sigma < 1$, $0 < \sigma' < n+1$, $u, t \in (0,\infty)$ и

$$Q(\xi) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\xi}{a_\nu}\right), \quad 1 = a_1 < a_2 < ..., \quad \sum \frac{1}{a_\nu} < \infty. \tag{8}$$

Теорема 1. Для функции (7) справедливы следующие утверждения :

1) **при** $0 < \sigma' < n+1$ **функция** $P_n(u,t)$ **не зависит от** σ';

2) **функция** $P_n(u,t)$ **аналитична относительно** u **в угле** $U(1-1/\rho)$, **и интегралы (7) существуют в** $\overline{U}(1-1/\rho)$;

3) **при** $u \in \overline{U}(1-1/\rho)$, $u \ne 0$

$$P_n(u,t) = O(u^{-\sigma'}), \quad u \to \infty, \quad P_n(u,t) = O(1), \quad u \to 0,$$

$$P_n(u,t) = O(1), \quad t \to \infty, \quad P_n(u,t) = o(1), \quad t \to 0. \tag{9}$$

Доказательство : При $\xi = \sigma' + iy$ имеем

$$\frac{1}{|Q(\xi-n)|}\left|\frac{\Gamma(\xi)}{\Gamma(1+\xi/\rho)}\right| = \frac{\rho}{|\xi Q(\xi-n)|}\left|\frac{\Gamma(\xi)}{\Gamma(\xi/\rho)}\right| \le$$

$$\leq \frac{c^{\sigma'}}{\sigma'} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{\sigma'}{\rho\nu}\right) e^{-\sigma'/(\rho\nu)}}{\left(1+\frac{\sigma'}{\nu}\right) e^{-\sigma'/\nu}} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1+\frac{y^2}{(\rho\nu+\sigma')^2}}{1+\frac{y^2}{(\nu+\sigma')^2}} \right)^{1/2} \frac{1}{|Q(\sigma'+iy-n)|}.$$

Используя хорошо известные свойства эйлеровской гамма-функции в комплексной плоскости, легко проверить, что

$$\frac{1}{|Q(\xi-n)|} \left| \frac{\Gamma(\xi)}{\Gamma(1+\xi/\rho)} \right| \leq c_1(\sigma',\mu) \frac{ch\left(\frac{\pi|y|}{2\rho}\right)}{ch\left(\frac{\pi}{2}|y|\right)} \frac{1}{(1+y^2)^{\mu}}, \tag{10}$$

где μ достаточно велико. Отметим, что оценки этого типа могут быть получены не только для $0 < \sigma' < n+1$, но и для каждого $\sigma' < 0$, удовлетворяющего $\sigma' \neq -k$, $k = 0, 1, \dots$.

Полученная оценка позволяет перемещать прямую интегрирования в (7) в пределах $0 < \sigma' < n+1$, если подынтегральная функция в (7) не имеет особых точек в полосе $0 <$ Re $\xi < n+1$, т.е. $P_n(u,t)$ не зависит от σ'.

Далее, оценка (10) показывает, что функция $P_n(u,t)$ $[\mu]-1$ раз дифференцируема в $\overline{U}(1-1/\rho)$. Следовательно, в силу произвольности $\mu > 0$, функция $P_n(u,t)$ аналитична в $U(1-1/\rho)$ и бесконечно дифференцируема в $\overline{U}(1-1/\rho)$, .

Если мы сдвинем прямую интегрирования (7) влево, перешагнув через особые точки подынтегральной функции, то результат остается в силе, если выделить вычеты подынтегральной функции относительно соответствующих особых точек. Первое и четвертое соотношения в (9) относятся к случаю $0 < \sigma' < n+1$, а второе и третье относятся к переносу прямой интегрирования в (7) в позицию между $\xi = 0$ и $\xi = -1$. В последнем случае

$$P(0,t) = Res_{\xi=0} \frac{\Gamma(\xi) u^{-\xi} t^{\xi/\rho}}{\Gamma(1+\xi/\rho)} = \lim_{\xi \to 0} u^{-\xi} t^{\xi/\rho} \frac{\Gamma(\xi+1)}{\Gamma(1+\xi/\rho)} = 1.$$

Этим завершается доказательство Теоремы 1.

Теорема 2. **Для каждого** $0 \not\equiv \varphi \in C(\mathcal{M}, L_\rho, (0,\infty))$ **функция**

$$0 \not\equiv \psi(u) = \int_0^\infty P(u,t) L_\rho^1 \varphi(t)\, dt, \quad P(u,t) = P_0(u,t) \tag{11}$$

принадлежит классу $C_\delta(\mathcal{M}', \alpha)$, **где** $\delta \in (1,2)$, $\mathcal{M}' = \{M_n' = M_{n+1}\}$ **и**

$$\psi(0) = -J\varphi(0), \quad \psi^{(n)}(0) = -J L_\rho^n \varphi(0) \frac{1}{Q(-n)}, \quad n = 1, 2, \dots \tag{12}$$

Доказательство : Рассмотрим преобразование

$$J_n(u) = \int_0^\infty P_n(u,t) L_\rho^{n+1} \varphi(t)\, dt, \quad n = 0, 1, \dots \tag{13}$$

Существование интегралов в (13) следует из суммируемости функции $L_\rho^n\varphi(x)$ на $(0,\infty)$, условий (2) и следующего представления :

$$P_n(u,t)=\sum_{\nu=0}^{k}c_\nu t^{-\nu/\rho}+O(t^{-k/\rho}),\quad t\to\infty,$$

где $k>0$ – произвольное целое число. Интегрируя по частям в (13), получим

$$J_n(u)=P_n(u,t)JL_\rho^n\varphi(t)\Big|_{t=0}^{\infty}-\int_0^\infty \widetilde{P}_n(u,t)JL_\rho^n\varphi(t)\,dt, \tag{13'}$$

где

$$\widetilde{P}_n(u,t)=\frac{\partial P_n(u,t)}{\partial t}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\Gamma(\xi+n)\frac{\xi+n}{\rho}u^{-\xi-n}t^{(\xi+n)/\rho-1}}{\Gamma(1+(\xi+n)/\rho)Q(\xi)}\,d\xi. \tag{14}$$

Так как подынтегральная функция (14) не имеет особенностей в полосе $-(n+1)<\operatorname{Re}\xi=\sigma<1$, то в случае $1<l<1+1/\rho$ получим

$$\widetilde{P}_n(u,t)=O(t^{-l}),\quad \text{при } t\to\infty. \tag{14'}$$

Функция $JL_\rho^n\varphi(x)$ равномерно ограничена и удовлетворяет условию (3). Поэтому, в силу Теоремы 1 первый член в правой части (13′) обращается в нуль. Следовательно

$$\begin{aligned}J_n(u)&=-\int_0^\infty\frac{\widetilde{P}_n(u,t)}{\Gamma(\alpha)}\int_t^\infty(\tau-t)^{\alpha-1}L_\rho^n\varphi(\tau)\,d\tau\,dt=\\&=-\int_0^\infty L_\rho^n\varphi(\tau)\,d\tau\int_0^\tau\frac{\widetilde{P}_n(u,t)}{\Gamma(\alpha)}(\tau-t)^{\alpha-1}\,dt.\end{aligned} \tag{13''}$$

Для того, чтобы обосновать изменение порядка интегрирования в (13″), рассмотрим функцию

$$g(t)=\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}, & \text{для } t>0,\\ 0, & \text{для } t<0.\end{cases}$$

Для каждого $A>0$ имеем $-J_n(u)=\int_0^A\widetilde{P}_n(u,t)\,dt\int_0^\infty g(\tau-t)L_\rho^n\varphi(\tau)\,d\tau+Y(u)$, где $Y(u)=\int_A^\infty\widetilde{P}_n(u,t)\,dt\int_0^\infty g(\tau-t)L_\rho^n\varphi(\tau)\,d\tau$. В силу (2), (4) и (14′), при $A\to\infty$ имеем $Y(u)=$

$$=\int_A^\infty\widetilde{P}_n(u,t)\,dt\int_t^\infty(\tau-t)^{\alpha-1}L_\rho^n\varphi(\tau)\,d\tau=\Gamma(\alpha)\int_A^\infty\widetilde{P}_n(u,t)JL_\rho^n\varphi(t)\,dt=o(1).$$

Следовательно

$$J_n(u)=\int_0^A\widetilde{P}_n(u,t)\,dt\int_0^B g(\tau-t)L_\rho^n\varphi(\tau)\,d\tau+$$

$$+\int_0^A \widetilde{P}_n(u,t)\,dt\int_B^\infty g(\tau-t)L_\rho^n\varphi(\tau)\,d\tau+o(1),\quad \text{при } A\to\infty,\quad B=A+1.$$

Для $t\in(0,A)$ и $B<\xi<\infty$ получаем

$$M_1(B,t)=\int_B^\infty g(\tau-t)L_\rho^n\varphi(\tau)\,d\tau=\int_B^\infty(\tau-t)^{\alpha-1}L_\rho^n\varphi(\tau)\,d\tau=$$

$$=(B-t)^{\alpha-1}\int_B^\xi L_\rho^n\varphi(\tau)\,d\tau=(B-t)^{\alpha-1}[JL_\rho^{n-1}\varphi(\xi)-JL_\rho^{n-1}\varphi(B)]=o(1),\quad A\to\infty.$$

Из (14′) находим

$$J_n(u)=\int_0^A \widetilde{P}_n(u,t)\,dt\int_0^B g(\tau-t)L_\rho^n\varphi(\tau)\,d\tau+o(1),\quad A\to\infty,\quad B=A+1.$$

Применение теоремы Фубини дает

$$J_n(u)=\int_0^B L_\rho^n\varphi(\tau)\,d\tau\int_0^B \widetilde{P}_n(u,t)g(\tau-t)\,dt-M_2(A,B)+o(1),\quad A\to\infty,$$

где $M_2(A,B)=\int_0^B L_\rho^n\varphi(\tau)\,d\tau\int_A^B \widetilde{P}_n(u,t)g(\tau-t)\,dt$. Так как $g(\tau-t)=0$ при $\tau<A$ и $t\in[A,B]$, то имеем $M_2(A,B)=\int_A^B L_\rho^n\varphi(\tau)\,d\tau\int_A^B \widetilde{P}_n(u,t)g(\tau-t)\,dt$. С другой стороны

$$L_\rho^n\varphi(\tau)=O(B^\Delta),\quad \widetilde{P}_n(u,t)=O(A^{-1-\sigma'}),\quad \int_A^B|g(\tau-t)|\,dt<c,\quad 0<\sigma'<\rho^{-1},$$

т.е. $M_2(A,B)=o(1)$, при $A\to\infty$. Следовательно

$$J_n(u)=\int_0^B L_\rho^n\varphi(\tau)\,d\tau\int_0^\tau \widetilde{P}_n(u,t)\frac{(\tau-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,dt+o(1),\quad B\to\infty,$$

откуда следует (13″). Возвращаясь к доказательству Теоремы 2, вычислим интеграл

$$A_n(\tau)=\int_0^\tau \widetilde{P}_n(u,t)\frac{(\tau-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,dt.$$

Имеем

$$A_n(\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\Gamma(\xi+n)u^{-\xi-n}}{\Gamma((\xi+n)/\rho)Q(\xi)}B_n(\tau,\xi)\,d\xi, \tag{15}$$

где

$$B_n(\tau,\xi)=\int_0^\tau\frac{t^{(\xi+n)/\rho-1}(\tau-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,dt=\frac{\tau^{(\xi+n-1)/\rho}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 x^{(\xi+n)/\rho-1}(1-x)^{\alpha-1}\,dx=$$

$$=\tau^{(\xi+n-1)/\rho}\frac{\Gamma((\xi+n)/\rho)}{\Gamma(1+(\xi+n-1)/\rho)}, \tag{16}$$

поскольку $\alpha+1/\rho=1$ и $\operatorname{Re}(\xi+n)>0$. Согласно (15), (16) и (13″), при $-n<\sigma<1$ получим

$$J_n(u)=-\int_0^\infty L_\rho^n\varphi(\tau)\,d\tau\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\Gamma(\xi+n)u^{-\xi-n}}{\Gamma(1+(\xi+n-1)/\rho)Q(\xi)}\tau^{(\xi+n-1)/\rho}\,d\xi. \tag{17}$$

С другой стороны, в силу (13) при $-n+1<\sigma<1$ имеем

$$J_{n-1}(u)=\int_0^\infty L_\rho^n\varphi(t)\,dt\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\Gamma(\xi+n-1)u^{-\xi-n+1}}{\Gamma(1+(\xi+n-1)/\rho)Q(\xi)}t^{(\xi+n-1)/\rho}\,d\xi.$$

Следовательно

$$J'_{n-1}(u)=-\int_0^\infty L_\rho^n\varphi(t)\,dt\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\Gamma(\xi+n)u^{-\xi-n}}{\Gamma(1+(\xi+n-1)/\rho)Q(\xi)}t^{(\xi+n-1)/\rho}\,d\xi. \tag{18}$$

Сравнение (17) и (18) показывает, что $J'_{n-1}(u)=J_n(u)$. Поэтому

$$J_0^{(n)}(u)=J_n(u),\quad n=0,1,\ldots \tag{19}$$

Из (11) и $P(0,t)=1$ следует, что

$$\psi(0)=J_0(0)=\int_0^\infty L_\rho^1\varphi(t)\,dt=J\varphi(t)\Big|_{t\to 0}^{t\to\infty}=-J\varphi(0+).$$

Из (19) и (11) имеем

$$\psi^{(n)}(u)=J_n(u)=\int_0^\infty P_n(u,t)L_\rho^{n+1}\varphi(t)\,dt,\quad n=0,1,\ldots \tag{20}$$

Используя

$$P_n(0,t)=Res_{\xi=0}\frac{\Gamma(\xi)u^{-\xi}t^{\xi/\rho}}{\Gamma(1+\xi/\rho)Q(\xi-n)}=\lim_{\xi\to 0}u^{-\xi}t^{\xi/\rho}\frac{\xi\Gamma(\xi)}{\Gamma(1+\xi/\rho)Q(\xi-n)}=\frac{1}{Q(-n)},$$

из (20) получаем

$$\psi^{(n)}(0)=-JL_\rho^n\varphi(0+)\frac{1}{Q(-n)},\quad n=1,2,\ldots \tag{21}$$

Для завершения доказательства Теоремы 2 осталось показать, что функция $\psi(u)$, определенная по (11), принадлежит классу $C_\delta(\mathcal{M},\alpha)$. Для этого нам нужны оценки, аналогичные оценке (5). Интегрирование по частям в (20) дает

$$\psi^{(n)}(u)=-\int_0^\infty JL_\rho^n\varphi(t)\,dt\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\Gamma(\xi)u^{-\xi}}{\Gamma(1+\xi/\rho)Q(\xi-n)}\frac{\xi}{\rho}t^{\xi/\rho-1}\,d\xi.$$

Отсюда получаем

$$\int_0^u \psi^{(n)}(u')\,du' = \psi^{(n-1)}(u) - \psi^{(n-1)}(0) =$$

$$= -\int_0^\infty \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\Gamma(\xi)t^{\xi/\rho-1}}{\Gamma(\xi/\rho)Q(\xi-n)(1-\xi)} x^{1-\xi}\Big|_{x=0}^{u} d\xi\, JL_\rho^n\varphi(t)\,dt, \quad -1<\sigma<1.$$

Следовательно

$$\psi^{(n-1)}(u) = \psi^{(n-1)}(0) + \int_0^\infty P_n^*(u,t)JL_\rho^n\varphi(t)\,dt, \tag{22}$$

где

$$P_n^*(u,t) = \int_0^\infty \widetilde{P}_n(u',t)\,du' = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\Gamma(\xi)u^{1-\xi}t^{\xi/\rho-1}}{\Gamma(\xi/\rho)Q(\xi-n)(1-\xi)}d\xi, \quad -1<\sigma<1.$$

Функция в последнем интеграле не имеет особых точек в полосе $-1<\sigma<1$, и оценка подынтегрального выражения, полученная из (10), позволяет перемещать прямую интегрирования в этой полосе. Таким образом, для $t\to 0$ и $t\to\infty$ функция $P_n^*(u,t)$ имеет порядок роста $t^{-1+\delta/\rho}$ и $t^{-1-\delta/\rho}$, соответственно, где $0<\delta<1$. Действительно, если $\sigma = \operatorname{Re}\xi = \pm\delta$, то

$$|u^{1-\xi}t^{\xi/\rho-1}| \le |u|^{\mp\delta+1}e^{|y|\cdot|\arg u|}t^{\pm\delta-1}, \quad u\in\overline{U}(\alpha), \quad \xi=\sigma+iy.$$

В силу (21) и (22) получаем

$$|\psi^{(n-1)}(u)| \le |JL_\rho^{n-1}\varphi(0+)|\frac{1}{Q(-n+1)} + \max_{t\in(0,\infty)}|JL_\rho^n\varphi(t)|\int_0^\infty |P_n^*(u,t)|\,dt.$$

Используя (10) для оценки подынтегрального выражения при $-1<\sigma<1$ и $0<\delta<1$, находим

$$|\psi^{(n-1)}(u)| \le c_0c_*^n(|u|+1)^{\delta+1}\left(M_{n-1} + M_n\int_0^1 t^{-1+\delta/\rho}dt + M_n\int_1^\infty t^{-1-\delta/\rho}dt\right),$$

т.е. $\psi\in C_{\delta+1}(\mathcal{M}',\alpha)$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Для каждого $0\not\equiv\psi\in JC(\mathcal{M},\alpha)$, где $\alpha\in(0,1)$, $\mathcal{M}=\{M_n\}$, $M_n\ge M_{n-1}$ существует функция $0\not\equiv\varphi\in C(\mathcal{M}'',L_{\rho_1}(0,\infty))$, где $\rho=\frac{1}{1-\alpha}$, $\mathcal{M}''=\{M_n''=M_{n+2}\}$ такая, что

$$\psi(0)\kappa = J\varphi(0+), \quad \psi^{(n)}(0)\kappa^{n+1} = JL_\rho^n\varphi(0+), \quad \kappa=e^{i\pi\alpha}, \quad n=1,2,\ldots \tag{23}$$

Доказательство : Пусть $f_n(z)$ – аналитическое продолжение функции (см. (6))

$$f_{n,\theta}(z) = \int_{l(\theta)} \exp(-z^{1/\rho}u)\psi^{(n)}(u)\,du, \quad \theta\in\left[-\frac{\pi}{2}\alpha,\frac{\pi}{2}\alpha\right], \quad n=0,1,\ldots \tag{24}$$

Функции $f_n(z)$ аналитичны в $U(1) = \{z : |\arg z| < \frac{\pi}{2}\}$ и в $\overline{U}(1)$ удовлетворяют неравенствам

$$|f_n(z)| \leq cc_1^n M_n, \quad \operatorname{Re} z \geq 0, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{25}$$

Вначале рассмотрим функцию $F_\theta(z) = f_{n,\theta}(z)$. Очевидно, что интеграл в (24) существует при $\arg(z^{1/\rho}u) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, т.е.

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{1}{\rho} \arg z + \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}\alpha, \frac{\pi}{2}\alpha\right]$ разделим на конечное число подотрезков

$$-\frac{\pi}{2}\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_s = \frac{\pi}{2}\alpha,$$

так, что $F_{\theta_k}(z)$ и $F_{\theta_{k+1}}(z)$ имеют общую подобласть аналитичности. Легко видеть, что $F_{\theta_{k+1}}(z)$ является аналитическим продолжением функции $F_{\theta_k}(z)$. Действительно, пусть $C(R) = l(\theta_k, R) \cup C'(R) \cup l(\theta_{k+1}, R)$, где $l(\theta_k, R) = \{u = re^{i\theta_k} : 0 < r < R\}$, $C'(R) = C(\{u = Re^{i\theta} : \theta_k < \theta < \theta_{k+1}\})$. Очевидно, что

$$Y(z) = \int_{C(R)} \exp(-z^{1/\rho}u)\psi^{(n)}(u)\, du = 0.$$

Полагая $R \to \infty$, получим $F_{\theta_k}(z) = F_{\theta_{k+1}}(z)$, поскольку интеграл по $C'(R)$ сходится к нулю при $R \to \infty$. Следовательно, для $-\frac{\pi}{2} - \theta_k \leq \frac{1}{\rho} \arg z \leq \frac{\pi}{2} - \theta_k$ существует функция $f_n(z) = f_{n,\theta}(z)$, удовлетворяющая (25) в $\operatorname{Re} z \geq 0$ и аналитичная в области, ограниченной прямыми

$$-\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\rho} \arg z + \theta_0 = \frac{1}{\rho} \arg z - \frac{\pi}{2}\alpha \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\rho} \arg z + \theta_s = \frac{1}{\rho} \arg z + \frac{\pi}{2}\alpha,$$

т.е. в области $U(1)$.

Теперь покажем, что $f_n(z)$ порождают искомую функцию $\varphi \in C(\mathcal{M}'', L_{\rho_1}(0, \infty))$. Для этого докажем следующую лемму.

Лемма 1. Пусть функции $f_n(z)$, определенные по формуле (24), аналитичны в $U(1)$. Тогда справедливы следующие утверждения :

$$|f_n(z)| \leq cc_1^n M_n, \quad z \in \overline{U}(1), \tag{26}$$

$$f_n(z) = \frac{a_n}{z^{1/\rho}} + \frac{f_{n+1}(z)}{z^{1/\rho}}, \quad a_n = \psi^{(n)}(0), \tag{27}$$

$$|f_n(z)| \leq cc_0^n M_{n+1}|z|^{-1/\rho}, \quad z \in \overline{U}(1), \quad |z| > \delta > 0. \tag{28}$$

Доказательство : Из (24) имеем

$$|f_{n,\theta}(z)| \le \int_0^\infty |\psi^{(n)}(re^{i\theta})|\, d\theta \le cc_1^n M_n.$$

Поэтому

$$\left|\frac{1}{\rho}\arg z + \theta\right| \le \frac{\pi}{2} \quad \text{или} \quad -\frac{\pi}{2} - \theta \le \arg z^{1/\rho} \le \frac{\pi}{2} - \theta.$$

Следовательно, функция $f_n(z)$ удовлетворяет (26) в области $\overline{U}(1)$. Интегрируя по частям в (24), получаем

$$f_{n,\theta}(z) = \frac{a_n}{z^{1/\rho}} + \frac{1}{z^{1/\rho}}\int_{l(\theta)} \exp(-z^{1/\rho}u)\psi^{(n+1)}(u)\, du, \quad |\arg(z^{1/\rho}e^{i\theta})| \le \frac{\pi}{2},$$

откуда следует (27).

Так как согласно предположению $M_{n+1} \ge M_n$, то неравенство (28) следует из (27). Лемма 1 доказана.

Перейдем к доказательству Теоремы 3. Для того, чтобы доказать равенства (23), рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{xz} f(z)\, dz, \quad x \in (0,\infty). \tag{29}$$

Имеем $J\varphi(x) =$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lim_{A\to\infty}\int_x^A (t-x)^{\alpha-1}\varphi(t)\, dt = \lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} f(z)\, dz \int_x^A e^{zt}\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} f(z)\, dz \int_x^\infty e^{zt}\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, dt. \tag{30}$$

Для того, чтобы убедиться в законности изменения порядков интегрирования и предельного перехода, заметим, что согласно (27) имеем

$$f_0(z) = \frac{a_0}{z^{1/\rho}} + \frac{f_1(z)}{z^{1/\rho}} = \sum_{\nu=0}^{k-1}\frac{a_\nu}{z^{(\nu+1)/\rho}} + \frac{f_k(z)}{z^{k/\rho}}. \tag{31}$$

Интеграл в (29) можно разбить на сумму трех интегралов по $l_{-1} = (-i\infty, -i)$, $l_0 = (-i, i)$ и $l_1 = (i, i\infty)$. Отметим, что для $a_\nu e^{zt} z^{-(\nu+1)/\rho}$ прямые интегрирования l^{-1} и l_1 можно заменить на лучи, исходящие из точек $-i$ и i под углами $\pm\frac{\pi}{2}\beta$, $1 < \beta < 2$. Полученные интегралы сходятся абсолютно и равномерно при $t > x > 0$.

Интегралы по $l_{\pm 1}$, содержащие $f_k(z)e^{zt}z^{-k/\rho}$, сходятся абсолютно и равномерно при $k/\rho > 1$. Интеграл по l_0 остается без изменения. Это доказывает (30). Из (30), для $z = iy$, $y \ne 0$, $x \in (0,\infty)$ и $\kappa = e^{i\pi\alpha}$ получим (см. [5], стр. 117, 290)

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^\infty e^{zt}(t-x)^{\alpha-1}dt = \frac{e^{iyx}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{iyt}t^{\alpha-1}dt = e^{iyx}\frac{\kappa}{(iy)^\alpha} = \left.\frac{\kappa e^{zx}}{z^\alpha}\right|_{z=iy}. \tag{32}$$

Из соотношений (30) и (32) следует

$$J\varphi(x) = \kappa\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} f(z)\frac{e^{zx}}{z^\alpha}\,dz = \kappa\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f(z)\frac{e^{zx}}{z^\alpha}\,dz, \quad \sigma > 0. \tag{33}$$

Тогда используя (31) и (32), соотношение (33) можно переписать в виде

$$J\varphi(x) = \kappa a_0\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{zx}}{z}\,dz + \kappa\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{zx}}{z}f_1(z)\,dz =$$

$$= \kappa a_0 + \kappa\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{zx}}{z}f_1(z)\,dz, \quad \sigma, x > 0. \tag{34}$$

Так как $f_1(z) = O(z^{-1/\rho})$ для $z \to \infty$, $\operatorname{Re} z > 0$, то переходя к пределу в (34) при $x \to 0+$, получаем $J\varphi(0+) = a_0\kappa = \psi(0)\kappa$ (последний интеграл в (34) обращается в нуль при $x \to 0+$). Следовательно, из (34) имеем

$$L^1_\rho\varphi(x) = \kappa\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{ze^{zx}}{z}f_1(z)\,dz = \kappa\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{zx}f_1(z)\,dz. \tag{35}$$

Применив к (35) дробное интегрирование по Вейлю с последующим дифференцированием, получим

$$JL^1_\rho\varphi(x) = \kappa^2\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{zx}}{z^\alpha}f_1(z)\,dz = \kappa^2\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{zx}}{z^\alpha}f_1(z)\,dz, \quad \sigma > 0.$$

Так как $f_1(z) = \frac{a_1}{z^{1/\rho}} + \frac{f_2(z)}{z^{1/\rho}}$, $a_1 = \psi'(0)$, то

$$JL^1_\rho\varphi(x) = \kappa^2 a_1 + \kappa^2\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{zx}}{z}f_2(z)\,dz, \quad \sigma, x > 0. \tag{36}$$

Отсюда получаем $JL^1_\rho\varphi(0) = a_1\kappa^2 = \psi'(0)\kappa^2$ и

$$L^2_\rho\varphi(x) = \kappa^2\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{zx}f_2(z)\,dz.$$

Продолжая этот процесс, получим

$$JL^n_\rho\varphi(x) = \kappa^{n+1}\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{zx}}{z^\alpha}f_n(z)\,dz = \kappa^{n+1}a_n + \kappa^{n+1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{zx}}{z}f_{n+1}(z)\,dz, \tag{37}$$

где

$$L^n_\rho\varphi(x) = \kappa^n\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{zx}f_n(z)\,dz, \quad \sigma, x > 0,$$

и $JL^n_\rho\varphi(0+) = a_n\kappa^{n+1}$, $a_n = \psi^{(n)}(0)$.

Теперь покажем, что $\varphi \in C(\mathcal{M}'', L_{\rho_1}(0,\infty))$. Начнем с оценки $|JL^n_\rho\varphi(x)|$. Для $0 < x \le 1$ нужная оценка (2) получается из (27) и (37). Для $x > 1$ имеем

$$JL^n_\rho\varphi(x) = \kappa^{n+1}[Y_n(x) + Y_n^-(x) + Y_n^+(x)], \tag{38}$$

где $Y_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i}^{i} \frac{e^{zx}}{z^\alpha} f_n(z)\,dz$,

$$Y_n^-(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{-i} \frac{e^{zx}}{z^\alpha} f_n(z)\,dz, \quad Y_n^+(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{i}^{i\infty} \frac{e^{zx}}{z^\alpha} f_n(z)\,dz.$$

Из (26) получаем

$$|Y_n(x)| \le \frac{cc_1^n M_n}{2\pi}\int_{-1}^{1} \frac{dy}{|y|^\alpha} \le c' c_1^n M_n.$$

Для оценки $|Y_n^-(x) + Y_n^+(x)|$ мы опять воспользуемся равенством (27) :

$$f_n(z) = \frac{a_n}{z^{1/\rho}} + \frac{a_{n+1}}{z^{2/\rho}} + \frac{f_{n+2}(z)}{z^{2/\rho}}. \tag{39}$$

Имеем

$$Y_n^-(x) + Y_n^+(x) = a_n \frac{1}{2\pi i}\int_{l^+\cup l^-} \frac{e^{zx}}{z}\,dz + a_{n+1}\frac{1}{2\pi i}\int_{l^+\cup l^-} \frac{e^{zx}}{z^{1+1/\rho}}\,dz + Q_{n+1}(x),$$

где $l^+ = (i, i\infty)$, $l^- = (-i\infty, -i)$ и

$$Q_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{l^+\cup l^-} \frac{e^{zx}}{z^{1+1/\rho}} f_{n+1}(z)\,dz.$$

Поэтому

$$Y_n^-(x) + Y_n^+(x) = \frac{a_n}{2\pi}\int_1^\infty \frac{e^{iyx} - e^{-iyx}}{y}\,dy + P_{n+1}(x) + Q_{n+1}(x), \tag{40}$$

где

$$P_n(x) = \frac{a_n}{2\pi i}\int_i^{i\infty} \frac{e^{zx} - e^{-zx}e^{-i\pi/\rho}}{z^{1+1/\rho}}\,dz.$$

Функции P_n и Q_n удовлетворяют неравенствам

$$|P_n(x)| \le \frac{|a_n|}{\pi}\int_1^\infty \frac{dy}{y^{1+1/\rho}} \le cc_1^n M_n,$$

$$|Q_n(x)| \le \max_{z\in l^+\cup l^-} |f_{n+1}(z)| \frac{1}{\pi}\int_{l^+\cup l^-} \left|\frac{dz}{z^{1+1/\rho}}\right| \le cc_1^{n+1} M_{n+1}.$$

Заметив наконец, что

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_1^\infty \frac{e^{iyx} - e^{-iyx}}{y}\,dy\right| = \frac{1}{\pi}\left|\int_1^\infty \frac{\sin xy}{y}\,dy\right| = \frac{1}{\pi}\left|\int_x^\infty \frac{\sin y}{y}\,dy\right| \le c_2,$$

получаем

$$|Y_n^-(x) + Y_n^+(x)| \le c_0' c_1^{n+2}(M_n + M_{n+1} + M_{n+2}). \tag{41}$$

Комбинируя (38) и (41), находим $|JL_\rho^n\varphi(x)| \le c_0 c_1^{n+2} M_{n+2}$. Теперь покажем, что

$$\lim_{x\to\infty} JL_\rho^n\varphi(x) = 0, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{42}$$

Из (37) находим

$$JL_\rho^n\varphi(x) = \kappa^{n+1}\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{e^{zx}}{z^\alpha}f_n(z)\,dz, \quad |f_n(z)| \le cc_1^n M_n, \quad \operatorname{Re} z \ge 0.$$

Так как функция $(iy)^{-\alpha}f_n(iy)$, $0<\alpha<1$ абсолютно интегрируема на $[-A,A]$, то применима известная лемма Римана. Поэтому для каждого $A\in(0,\infty)$ имеем

$$\lim_{x\to\infty}\int_{-iA}^{iA}\frac{e^{zx}}{z^\alpha}f_n(z)\,dz = \lim_{x\to\infty}\int_{-A}^{A}\frac{e^{ixy}}{(iy)^\alpha}f_n(iy)\,dy = 0.$$

Для оценки интегралов

$$J_{\pm1} = \int_{l^\pm(A)}\frac{e^{zx}}{z^\alpha}f_n(z)\,dz, \quad l^+(A) = (iA, i\infty), \quad l^-(A) = (-i\infty, -iA),$$

будем использовать равенство, которое вытекает из соотношения (27) :

$$f_n(z) = \frac{a_n}{z^{1/\rho}} + \frac{a_{n+1}}{z^{2/\rho}} + \dots + \frac{a_{n+k}}{z^{k/\rho}} + \frac{f_{n+k}(z)}{z^{k/\rho}}. \tag{43}$$

Для каждого $\varepsilon>0$ и $A>A_0(\varepsilon)>0$ имеем

$$\left|\int_{l^\pm(A)}\frac{e^{zx}}{z^{\alpha+\nu/\rho}}\,dz\right| < \varepsilon, \quad \nu=1,2,\dots \quad \int_{l^\pm(A)}\left|\frac{e^{zx}}{z^{\alpha+\nu/\rho}}f_{n+k}(z)\,dz\right| < \varepsilon, \quad k\ge 2. \tag{44}$$

Отсюда и из (40) и (41) получаем (42).

Теперь проверим условия (3) для класса функций $C(\mathcal{M}'', L_\rho, (0,\infty))$. Для достаточно малых значений x из (37), используя (43) при $k/\rho > 1$ и формулу Ханкеля, получаем

$$L_\rho^n\varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{k}\frac{a_{n+\nu}}{\Gamma(\nu/\rho)}x^{\nu/\rho-1} + \kappa^n\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{zx}}{z^{k/\rho}}f_{n+k}(z)\,dz, \quad \sigma>0, \quad n=0,1,\dots$$

Поэтому $L_\rho^n\varphi(x) = O(x^{-\alpha})$ при $x\to 0+$, $0<\alpha<1$.

Для достаточно больших значений x используем второе равенство в (37), где интеграл берется по $(-i\infty, i\infty)$. Этот интеграл представляется в виде суммы трех интегралов J_{-1}, J_0 и J_{+1} по промежуткам $(-i\infty,-iA)$, $(-iA,iA)$ и $(iA,i\infty)$, $A>0$, соответственно. Преобразуем интегралы J_{-1} и J_{+1} согласно (43) при $\frac{k-1}{\rho} \le 1 < \frac{k}{\rho}$, а интеграл J_0 оставляем без изменения. В результате получаем сумму интегралов вида (44) (без z^α в знаменателях), каждый из которых стремится к нулю при $x\to\infty$ и $A>A_0>0$. Следовательно, $L_\rho^n\varphi(x) = O(1)$ при $x\to\infty$. Теорема 3 доказана.

§2. ОБОБЩЕННАЯ КВАЗИАНАЛИТИЧНОСТЬ ДЛЯ КЛАССА $C(\mathcal{M}, L_\rho, (0,\infty))$

Цель этого параграфа – получить необходимые и достаточные условия единственности для класса функций $C(\mathcal{M}, L_\rho, (0,\infty))$ при дополнительном предположении

$$J\varphi(0+) = JL_\rho^\lambda \varphi(0+) = 0, \quad \lambda \in \{\lambda_\nu\} \subset \mathcal{N}, \quad \varphi \in C(\mathcal{M}, L_\rho, (0,\infty)).$$

Определение 4. Последовательность $\{\mu_\nu\} \subset \mathcal{N}$ удовлетворяет условию $A(\mu)$, если имеет место асимптотическое соотношение

$$\psi(r) \equiv 2 \sum_{\mu_\nu \leq r} \frac{1}{\mu_\nu} = \mu \ln r + O(1), \quad r \to \infty.$$

Определение 5. Последовательность $\{\mu_\nu\} \subset \mathcal{N}$ удовлетворяет условию $B(\mu)$, если имеет место асимптотическое соотношение

$$\ln \Lambda(y, \{\mu_\nu\}) = \frac{\pi}{4}\mu|y| + O(\ln|y|), \quad y \to \infty,$$

где

$$\Lambda(y, \{\mu_\nu\}) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{y^2}{\mu_\nu^2}\right)^{1/2}, \quad y \in (-\infty, \infty).$$

Определение 6. Последовательность $\{\mu_\nu\} \subset \mathcal{N} \setminus \{\lambda_\nu\}$ удовлетворяет условию $AB(\beta/\kappa)$, $\kappa > 1$, $\beta/\kappa < 2$, если она удовлетворяет условиям $A(\beta/\kappa)$ и $B(\beta/\kappa)$, и для $1 < \beta < 2$ существует подпоследовательность $\{n_\nu\} \subset \{\lambda_\nu\}$, удовлетворяющая условиям $A(2-\beta)$ и $B(2-\beta)$ (см. [3], Теорема 2.1).

Рассуждая как и при доказательстве основного результата работы [2], с δ вместо $n\theta$, приходим к следующему утверждению.

Теорема 4. Пусть последовательность $\{\mu_\nu\} = \mathcal{N} \setminus \{\lambda_\nu\}$ удовлетворяет условию $A(\beta/\kappa)$, $\kappa > 1$, $\beta/\kappa < 2$, $\beta = \alpha + 1$. Для того, чтобы лишь тождественно равная нулю функция удовлетворяла бы условиям $\psi \in C_\delta(\mathcal{M}, \alpha)$, $0 < \alpha < 1$, $\psi(0) = \psi^{(\lambda_\nu)}(0) = 0$, $\nu = 1, 2 \ldots$ достаточно выполнения следующего условия :

$$\int_0^\infty \frac{1}{r^2} \ln M(r)\, dr = \infty, \tag{45}$$

где $M(r) = \sup_{x \geq 0} \frac{1}{m(x)} r^{\beta(1-\frac{1}{\kappa})x}$, $m(x) = M_n$ для $x \in [n, n+1)$.

Следующий результат является следствием Теоремы 2.3 из [3].

Теорема 5. Пусть последовательность $\{\mu_\nu\} = \mathcal{N} \setminus \{\lambda_\nu\}$ удовлетворяет условию $AB(\beta/\kappa)$, $\kappa > 1$, $\beta/\kappa < 2$, $\beta = \alpha + 1$. Тогда (45) является необходимым условием для того, чтобы единственной функцией, удовлетворяющей условиям $\psi \in JC(\mathcal{M}, \alpha)$, $0 < \alpha < 1$, $\psi(0) = \psi^{(\lambda_\nu)}(0) = 0$, была бы тождественный нуль.

Используя Теоремы 2 – 5, получаем следующий результат.

Теорема 6. Если последовательность $\{\mu_\nu\} = \mathcal{N} \setminus \{\lambda_\nu\}$ удовлетворяет условию $A(\beta/\kappa)$, $\kappa > 1$, $\beta/\kappa < 2$, и выполнено условие (45), то единственной функцией $\psi \in C(\mathcal{M}, L_\rho, (0, \infty))$, удовлетворяющей условию

$$J\varphi(0+) = JL_\rho^\lambda \varphi(0+) = 0, \quad \lambda \in \{\lambda_\nu\} \subset \mathcal{N}, \tag{46}$$

есть тождественный нуль. Обратно, если единственной функцией из класса $C(\mathcal{M}, L_\rho, (0, \infty))$, удовлетворяющей (46), является тождественный нуль, то имеет место условие (45).

Доказательство : Достаточность. Согласно Теореме 4, из условий $\psi \in C_\delta(\mathcal{M}', \alpha)$, $\mathcal{M}' = \{M'_n = M_{n+1}\}$, $\psi(0) = \psi^{(\lambda_\nu)}(0) = 0$, $\nu = 1, 2...$, где последовательность $\{\mu_\nu\} = \mathcal{N} \setminus \{\lambda_\nu\}$ удовлетворяет $A(\beta/\kappa)$, $\kappa > 1$, $\beta/\kappa < 2$, $\beta = \alpha + 1$, и (45) следует, что $\psi \equiv 0$. Из Теоремы 2, только тождественно равная нулю функция $\psi \in C(\mathcal{M}, L_\rho, (0, \infty))$ удовлетворяет (46). Действительно, из (45) получаем

$$\psi(u) = \int_0^\infty P(u, t) L_\rho^1 \varphi(t)\, dt \equiv 0, \quad \psi \in C_\delta(\mathcal{M}', \alpha).$$

С другой стороны (см. [4]), последнее преобразование однозначно обратимо. Поэтому $L_\rho^1 \varphi(t) = \dfrac{d}{dt} J\varphi(t) \equiv 0$, $t \in (0, \infty)$. Следовательно, $J\varphi(t) \equiv const$. Так как $J\varphi(0+) = 0$, то получаем $J\varphi(t) \equiv 0$. Покажем, что $\varphi(t) \equiv 0$. Для этого продолжим функции $g(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ и $\varphi(t)$ для $t < 0$, полагая $g(t) = \varphi(t) = 0$. Имеем $\int_x^\infty g(t - x)\varphi(t)\, dt = \int_{-\infty}^\infty g(t - x)\varphi(t)\, dt = 0$, $x > 0$. Подставляя $t = -t'$ и $x = -x'$ в последний интеграл, получим

$$\int_{-\infty}^\infty g_1(x' - t)\varphi(-t)\, dt \equiv 0. \tag{47}$$

Образ $g_1(t)$ относительно двустороннего преобразования Лапласа не обращается в нуль тождественно. Следовательно, согласно (47), образ $\varphi(-t)$ относительно этого преобразования тождественно обращается в нуль в общей области определения. Поэтому $\varphi(-t) \equiv 0$ для $t < 0$. Отсюда получаем $\varphi(t) \equiv 0$ для $t > 0$.

Необходимость. По Теореме 5 условия (45) и $AB(\beta/\kappa)$ являются необходимыми условиями для того, чтобы единственной функцией $\psi \in JC(\mathcal{M}^*, \alpha)$, $\mathcal{M}^* = \{M_{n-2}\}$, удовлетворяющей условиям $\psi(0) = \psi^{(\lambda_\nu)}(0) = 0$, была бы функция тождественно равная нулю. По Теореме 3, условия (45) необходимы для того, чтобы единственной функцией $\varphi \in C(\mathcal{M}, L_{p_1}(0, \infty))$, удовлетворяющей условию (46) с той же самой последовательностью $\{\lambda_\nu\}$, была бы функция, тождественно равная нулю. Из условия (45) следует существование функции $0 \not\equiv \psi \in JC(\mathcal{M}^*, \alpha)$. Согласно Теореме 3, функция $0 \not\equiv \varphi \in C(\mathcal{M}, L_{p_1}(0, \infty))$ также удовлетворяет условию (46). Теорема 6 доказана.

ABSTRACT. The paper carries out comparative analysis of three classes of infinitely differentiable functions and studies the question of generalized quasianalyticity for one of these classes.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. В. Бадалян, "О критерии единственности бесконечно дифференцируемых функций, определяемых моментами их последовательных производных", ДАН СССР, том 259, № 2, стр. 269 – 270, 1981.
2. Г. В. Бадалян, "Теорема об обобщенной квазианалитичности с учетом поведения функций классов в бесконечности", Сбор. мат. науч. сессий к 60-летию Ереванского госуниверс., стр. 22 – 30, 1981.
3. Г. В. Бадалян, "Обобщенная квазианалитичность и критерий единственности для некоторых классов аналитических функций", Изв. АН СССР. Матем., том 38, № 2, 1974.
4. И. И. Хиршман, Д. В. Уиддер, Преобразования Типа Свертки, Москва, 1958.
5. Б. С. Волковысский, Г. Л. Лунц, И. Г. Араманович, Сборник Задач по Теории Функций Комплексного Переменного, Физматгиз, Москва, 1960.

9 декабря 1997

Ереванский государственный университет