

# ЕДИНСТВЕННОСТЬ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Р. Л. Шахбагян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,  
том 34, № 3, 1999

В статье исследуются вопросы единственности слабых решений начально-краевых задач для одного класса эволюционных уравнений четвертого порядка с нерегулярными коэффициентами.

## §1. ВВЕДЕНИЕ

В цилиндре  $Q = (0, T) \times \Omega$ , где  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  – ограниченная область с достаточно гладкой границей  $\Gamma = \partial\Omega$ , рассмотрим линейное уравнение четвертого порядка вида

$$u_t + \Delta^2 u - \Delta u - m(x, t)u = f(x, t). \quad (1)$$

Начальные и граничные условия имеют вид

$$u|_{t=0} = 0, \quad (2)$$

$$u|_{\Gamma} = \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad t > 0, \quad (3)$$

где  $\nu$  – внешняя нормаль к  $\Gamma$ . Целью настоящей статьи является доказательство единственности слабых решений задачи (1) — (3). Ж.-Л. Лионсом в [1] (см. также [2]) был получен аналогичный результат для уравнения второго порядка

$$u_t - \Delta u - m(x, t)u = f(x, t).$$

Этот результат основывался на минимаксном принципе для параболических уравнений. Так как этот принцип не применим к уравнениям высокого порядка, мы предлагаем новый подход.

## §2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть  $H^s(\Omega)$ ,  $s \in \mathbb{Z}_+$  – пространство Соболева с нормой

$$\|u\|_s = \left( \sum_{|\alpha| \leq s} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad (4)$$

где  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+$ ,  $|\alpha| = \sum_{k=1}^n \alpha_k$ ,  $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ .  $\dot{H}^s(\Omega)$  является замыканием в норме пространства  $H^s(\Omega)$  множества бесконечно дифференцируемых функций с ограниченным носителем.  $H^{-s}(\Omega)$  — пространство, дуальное к  $\dot{H}^s(\Omega)$ . Пространство  $L^2(0, T; \dot{H}^s(\Omega))$  является гильбертовым пространством функций  $u(x, t)$  с нормой

$$\|u\|_{L^2(0, T; \dot{H}^s(\Omega))} = \left( \int_0^T \|u(t)\|_{\dot{H}^s(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2}. \quad (5)$$

Далее,  $L^2(0, T; L^\alpha(\Omega))$ ,  $(\alpha \geq 1)$  — пространство функций  $u(x, t)$  с нормой

$$\|u\|_{L^2(0, T; L^\alpha(\Omega))} = \left( \int_0^T \|u(t)\|_{L^\alpha(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2}. \quad (6)$$

Положим  $C^{s,1}(\bar{Q}) = C([0, T]; C^s(\bar{\Omega})) \cap C^1([0, T]; C(\bar{\Omega}))$ .

### §3. ЕДИНСТВЕННОСТЬ СИЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

**Определение 1.** Функция  $u \in L^2(0, T; \dot{H}^2(\Omega))$ ,  $u_t \in L^2(0, T; H^{-2}(\Omega))$ ,  $u(x, 0) = 0$  называется сильным решением задачи (1) — (3), если для любого  $v \in L^2(0, T; \dot{H}^2(\Omega))$  имеет место интегральное тождество

$$\iint_Q (u_t - m(x, t) u) v dx dt + \iint_Q \Delta u \cdot \Delta v dx dt + \iint_Q \nabla u \cdot \nabla v dx dt = \iint_Q f v dx dt, \quad (7)$$

где  $\nabla u = \text{grad } u$ . Мы естественно предполагаем, что  $m u \in L^2(0, T; H^{-2}(\Omega))$ . Для того, чтобы функция  $m u$  принадлежала бы этому пространству, функция  $m(x, t)$  должна удовлетворять некоторому условию, приведенному ниже.

**Предложение 1.** Если  $m \in L^2(0, T; L^3(\Omega))$  и  $f \in L^2(0, T; H^{-2}(\Omega))$ , то для любого сильного решения  $u(x, t)$  задачи (1)–(3) имеет место оценка

$$\|u\|_{L^2(0, T; \dot{H}^2(\Omega))} \leq c \|f\|_{L^2(0, T; H^{-2}(\Omega))} \quad (8)$$

с некоторой константой  $c > 0$ .

**Доказательство :** Пусть  $u(x, t)$  — решение задачи (1) — (3). Умножая обе части уравнения (1) на  $u(x, t)$ , интегрируя по  $\Omega$  и применяя формулу Грина, получим

$$\int_\Omega [(u_t - m(x, t) u) u + |\Delta u|^2 + |\nabla u|^2] dx = \int_\Omega f(x, t) u dx$$

или

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |u(x, t)|^2 dx + \int_\Omega (|\Delta u|^2 + |\nabla u|^2) dx = \int_\Omega m(x, t) u^2 dx + \int_\Omega f u dx. \quad (9)$$

Далее, так как  $u \in L^2(0, T; \dot{H}^2(\Omega))$ , то  $(\int_{\Omega} (|\Delta u|^2 + |\nabla u|^2) dx)^{1/2}$  эквивалентно  $\|u(t)\|_{H^2(\Omega)}$ . Отсюда в частности следует, что существует постоянная  $c_1 > 0$  такая, что

$$\int_{\Omega} (|\Delta u|^2 + |\nabla u|^2) dx \geq c_1 \|u(t)\|_{H^2(\Omega)}^2 \quad (10)$$

(здесь и ниже через  $c_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  обозначаем различные постоянные). Оценим правую часть соотношения (9). Имеем

$$\left| \int_{\Omega} f(x, t) u dx \right| \leq \|f(t)\|_{H^{-2}(\Omega)} \cdot \|u(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq c_2 \|f(t)\|_{H^{-2}(\Omega)}^2 + c_3 \|u(t)\|_{H^2(\Omega)}^2. \quad (11)$$

Из неравенства Гельдера находим

$$\left| \int_{\Omega} m(x, t) u^2 dx \right| \leq \left( \int_{\Omega} |m|^3 dx \right)^{1/3} \left( \int_{\Omega} |u|^3 dx \right)^{2/3} = \|m(t)\|_{L^3(\Omega)} \cdot \|u\|_{L^3(\Omega)}^2. \quad (12)$$

По теореме вложения Соболева получаем непрерывное вложение  $H^s(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ ,  $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{s}{n}$  ( $q > 0$ ). Следовательно, при  $s = 1$ ,  $n = 3$  получаем  $H^1(\Omega) \subset L^6(\Omega)$  с  $\|u\|_{L^6(\Omega)} \leq c \|u\|_{H^1(\Omega)}$ . Отсюда заключаем

$$\|u(t)\|_{L^3(\Omega)} \leq \|u(t)\|_{L^6(\Omega)} \cdot (\text{mes } \Omega)^{1/6} \leq c \|u(t)\|_{H^1(\Omega)}. \quad (13)$$

Согласно хорошо известному интерполяционному неравенству для пространств Соболева (см. [3])  $\|u(t)\|_{H^s(\Omega)} \leq c_4 \|u(t)\|_{H^2(\Omega)}^{s/2} \cdot \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^{1-s/2}$ ,  $0 \leq s \leq 2$  имеем

$$\|u(t)\|_{H^1(\Omega)} \leq c_5 \|u(t)\|_{H^2(\Omega)}^{1/2} \cdot \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}. \quad (14)$$

Из (13) и (14) получаем

$$\|u(t)\|_{L^3(\Omega)}^2 \leq c_6 \|u(t)\|_{H^2(\Omega)} \cdot \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}. \quad (15)$$

Возвращаясь к оценке (12), находим

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} m(x, t) u^2 dx \right| &\leq c_6 \|m\|_{L^3(\Omega)} \cdot \|u(t)\|_{H^2(\Omega)} \cdot \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \\ &\leq \varepsilon \|u(t)\|_{H^2(\Omega)}^2 + c_7 \|m(t)\|_{L^3(\Omega)}^2 \cdot \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Подставляя (10), (11) и (16) в (9) находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + (c_1 - c_3 - \varepsilon) \cdot \|u(t)\|_{H^2(\Omega)}^2 &\leq \\ &\leq c_7 \|m(t)\|_{L^3(\Omega)}^2 \cdot \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + c_2 \cdot \|f(t)\|_{H^{-2}(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Выберем  $c_3$  и  $\epsilon$  из условия  $c_8 = 2(c_1 - c_3 - \epsilon) > 0$  и перепишем последнее неравенство в виде

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + c_8 \cdot \|u\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq c_9 \|m(t)\|_{L^3(\Omega)}^2 \cdot \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + c_{10} \cdot \|f(t)\|_{H^{-2}(\Omega)}^2. \quad (17)$$

Так как  $u(0) = 0$ ,  $m \in L^2(0, T; L^3(\Omega))$  и  $f \in L^2(0, T; H^{-2}(\Omega))$ , то из неравенства Гронуолла получаем

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq c_{10} \cdot \exp \left( c_9 \cdot \int_0^t \|m(\tau)\|_{L^3(\Omega)}^2 d\tau \right) \cdot \int_0^t \|f(\tau)\|_{H^{-2}(\Omega)}^2 \exp(-c_9 \cdot \\ &\cdot \int_0^\tau \|m(\tau_1)\|_{L^3(\Omega)}^2 d\tau_1) d\tau \leq c_{11} \|f\|_{L^2(0, T; H^{-2}(\Omega))}^2. \end{aligned} \quad (18)$$

В частности имеем

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leq c_{11} \|f\|_{L^2(0, T; H^{-2}(\Omega))}. \quad (19)$$

Интегрируя неравенство (17) по  $t \in [0, T]$  и используя (18) получаем

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + c_8 \|u\|_{L^2(0, T; H^2(\Omega))}^2 &\leq \\ &\leq c_9 \int_0^T \|m(t)\|_{L^3(\Omega)}^2 \cdot \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + c_{10} \|f\|_{L^2(0, T; H^{-2}(\Omega))}^2 \leq \\ &\leq c_{12} \|f\|_{L^2(0, T; H^{-2}(\Omega))}^2 \cdot \|m\|_{L^2(0, T; L^3(\Omega))}^2 + c_{10} \|f\|_{L^2(0, T; H^{-2}(\Omega))}^2 \leq \\ &\leq c_{13} \|f\|_{L^2(0, T; H^{-2}(\Omega))}^2. \end{aligned}$$

Следовательно, мы получаем окончательную оценку (8) и доказательство завершено.

**Замечание.** Как было отмечено выше, мы должны показать, что из  $m \in L^2(0, T; L^3(\Omega))$  и  $u \in L^2(0, T; H^2(\Omega))$  следует, что  $mu \in L^2(0, T; H^{-2}(\Omega))$ .

Действительно, так как

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega (m(x, t) u)^{6/5} dx \right| &\leq \left( \int_\Omega |m(x, t)|^3 dx \right)^{2/5} \cdot \left( \int_\Omega |u|^2 dx \right)^{3/5} = \\ &= \|m(t)\|_{L^3(\Omega)}^{6/5} \cdot \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^{6/5}, \end{aligned}$$

то имеем

$$\int_0^T \|(mu)(t)\|_{L^{6/5}(\Omega)}^2 dt \leq \int_0^T \|m(t)\|_{L^3(\Omega)}^2 \cdot \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt. \quad (20)$$

Из неравенства (19) следует, что  $u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ . Поэтому, из (20) получаем

$$\|mu\|_{L^2(0, T; L^{6/5}(\Omega))} \leq \|m\|_{L^2(0, T; L^3(\Omega))} \cdot \|u\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} < \infty.$$

Используя очевидное включение  $L^2(0, T; L^{6/5}(\Omega)) \subset L^2(0, T; H^{-2}(\Omega))$  мы приходим к требуемому результату, что  $mu \in L^2(0, T; H^{-2}(\Omega))$ . Следующая теорема есть следствие Предложения 1.

Теорема 1. В условиях Предложения 1 сильное решение задачи (1) — (3) единственно.

Доказательство : В уравнении (1) полагаем  $f(x, t) = 0$ . Тогда из неравенства (8) следует, что  $u(x, t) = 0$ . Теорема доказана.

#### §4. СЛАБЫЕ РЕШЕНИЯ

Теперь мы докажем единственность слабых решений задачи (1) — (3). Пусть  $u(x, t)$  — сильное решение задачи (1) — (3). Тогда имеет место следующее интегральное тождество :

$$\iint_Q u(-\varphi_t + \Delta^2 \varphi - \Delta \varphi - m(x, t) \varphi) dx dt = \iint_Q f \varphi dx dt \quad (21)$$

для функций  $\varphi \in C^{4,1}(\bar{Q})$ , удовлетворяющих условию

$$\varphi|_{\Sigma} = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \Big|_{\Sigma} = 0. \quad (22)$$

Естественным условием могло бы быть

$$u \in L^1(Q), \quad m u \in L^1(Q), \quad (23)$$

однако, мы используем некоторое более сильное условие

$$u \in L^1(Q), \quad m u \in L^1(0, T; L^2(\Omega)), \quad m \in L^2(0, T; L^\gamma(\Omega)), \quad \gamma > 2. \quad (24)$$

Теорема 2. Пусть выполняются условия (24). Если функция  $u(x, t)$  удовлетворяет интегральному тождеству (21) с  $f = 0$ , то  $u = 0$ . Другими словами, слабое решение единственно.

Прежде чем привести доказательство, поясним основную идею. Пусть  $\varphi(x, t)$  — решение уравнения

$$-\varphi_t + \Delta^2 \varphi - \Delta \varphi - m(x, t) \varphi = h(x, t) \quad (25)$$

удовлетворяющее условиям (22). Если  $u(x, t)$  является слабым решением задачи (1) — (3) с  $f(x, t) = 0$ , то

$$\iint_Q u(x, t) h(x, t) dx dt = 0. \quad (26)$$

Далее, предположим, что для любой функции  $h \in L^\infty(Q)$  существует решение задачи (25), (22). Тогда из (26) следует, что  $u = 0$ , т.е. слабое решение

единственно. Тем не менее, вообще говоря, для  $h \in L^\infty(Q)$  решение  $\varphi$  задачи (25), (22) не принадлежит  $C^{4,1}(\bar{Q})$ . Заметим, что для нас достаточно, чтобы выполнялось бы тождество (26) для любого  $h \in C_0^\infty(Q)$ , которое всюду плотно в  $L^\infty(Q)$ . Как будет доказано ниже, в этом случае  $\varphi \in C^{4,1}(\bar{Q})$ , и  $\varphi$  можно подставить в интегральное тождество (21). Следовательно, задача сводится к аппроксимации решений задачи (25), (22) гладкими решениями. Обозначим через

$$m_k(x, t) = \begin{cases} m(x, t), & \text{если } |m| < k \\ k, & \text{если } m(x, t) > k \\ -k, & \text{если } m(x, t) < -k. \end{cases} \quad (27)$$

Заметим, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m_k(x, t) = m(x, t) \quad \text{п.в.} \quad (28)$$

Функцию  $m_k(x, t)$  можно аппроксимировать последовательностями  $\{m_k^{(j)}\}$  бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем. Следовательно, можно предположить, что в правой части (25) функция  $h(x, t)$  принадлежит  $C_0^\infty(Q)$ . Поэтому соответствующее решение  $\varphi \in C^{4,1}(\bar{Q})$ . Пусть  $\varphi_k(x, t)$  является решением задачи

$$-\frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + \Delta^2 \varphi_k - \Delta \varphi_k - m_k(x, t) \varphi_k = h(x, t), \quad (29)$$

$$\varphi_k|_\Sigma = \frac{\partial \varphi_k}{\partial \nu} \Big|_\Sigma = 0, \quad \varphi_k(x, T) = 0. \quad (30)$$

Если теперь  $u(x, t)$  является слабым решением задачи (1) — (3) с  $f(x, t) = 0$ , то из (21) и (29) получаем

$$\iint_Q u[h(x, t) + (m_k(x, t) - m(x, t)) \varphi_k] dx dt = 0. \quad (31)$$

Положим

$$J_k = \iint_Q u(m_k(x, t) - m(x, t)) \varphi_k dx dt. \quad (32)$$

Тогда (31) можно переписать в виде

$$\iint_Q u h dx dt + J_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (33)$$

Из (26) следует, что задача сводится к доказательству соотношения

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J_k = 0 \quad (34)$$

Доказательство (34) опирается на следующее утверждение. Рассмотрим задачу, которая эквивалентна задаче (29), (30) :

$$\varphi_t + \Delta^2 \varphi - \Delta \varphi - m_k(x, t) \varphi = h(x, t), \quad (35)$$

$$\varphi|_{\Sigma} = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \Big|_{\Sigma} = 0, \quad \varphi(x, 0) = 0. \quad (36)$$

**Предложение 2.** Пусть  $\varphi(x, t)$  — решение задачи (35), (36) и  $h \in L^\infty(Q)$ . Тогда имеет место следующая оценка :

$$\|\varphi\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leq c \|h\|_{L^\infty(Q)}. \quad (37)$$

Прежде чем доказать это утверждение проверим, что из Предложения 2 следует (34). Действительно, пусть  $\varphi_k(x, t)$  — решение задачи (29), (30), которая эквивалентна (35), (36) и  $h \in L^\infty(Q)$ . Тогда согласно (37) имеем

$$|J_k| \leq \int_0^T \|\varphi_k(t)\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|(m_k - m)u\|_{L^2(\Omega)} dt \leq c \|h\|_{L^\infty(Q)} \cdot \|(m_k - m)u\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega))}.$$

Последовательность  $\{(m_k - m)u\}_{k=1}^\infty$  имеет суммируемую мажоранту, так как согласно (24) имеем  $|u(m_k - m)| \leq 2|m u| \in L^1(0, T; L^2(\Omega)) \subset L^1(Q)$ . Следовательно, из (26) и теоремы Лебега получаем  $J_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ .

**Доказательство Предложения 2 :** Пусть  $\varphi(x, t)$  — решение задачи (35), (36). Умножая обе части тождества (35) на  $\varphi$  и интегрируя по  $\Omega$  мы имеем как в (9)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\varphi(x, t)|^2 dx + \int_{\Omega} (|\Delta \varphi|^2 + |\nabla \varphi|^2) dx - \int_{\Omega} m_k(x, t) \varphi^2 dx = \int_{\Omega} h(x, t) \varphi dx. \quad (38)$$

Пусть параметры  $\alpha_1 > 0$ ,  $\alpha_2 > 0$  удовлетворяют условию  $\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\gamma} = 1$ ,  $\gamma > 2$ . Имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} m_k(x, t) \varphi^2 dx \right| &\leq \left( \int_{\Omega} |m_k(x, t)|^\gamma dx \right)^{1/\gamma} \cdot \left( \int_{\Omega} |\varphi(x, t)|^{2\gamma/(\gamma-1)} dx \right)^{(\gamma-1)/\gamma} = \\ &= \|m_k(t)\|_{L^\gamma(\Omega)} \times \\ &\times \left( \int_{\Omega} |\varphi(x, t)|^{(\alpha_1 \alpha_2)/(\alpha_1 + \alpha_2)} \cdot |\varphi(x, t)|^{(\alpha_1 \alpha_2)/(\alpha_1 + \alpha_2)} dx \right)^{(\alpha_1 + \alpha_2)/(\alpha_1 \alpha_2)} \leq \\ &\leq \|m_k(t)\|_{L^\gamma(\Omega)} \|\varphi(t)\|_{L^{\alpha_1}(\Omega)} \cdot \|\varphi(t)\|_{L^{\alpha_2}(\Omega)}. \end{aligned} \quad (39)$$

Полагая  $\alpha_2 = 2$ , имеем  $\alpha_1 = \frac{2\gamma}{\gamma-2}$  и из (39) для любого  $\varepsilon > 0$  получаем

$$\left| \int_{\Omega} m_k(x, t) \varphi^2 dx \right| \leq \varepsilon \|\varphi(t)\|_{L^{2\gamma/(\gamma-2)}}^2 + c(\varepsilon) \|\varphi(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \cdot \|m_k(t)\|_{L^\gamma(\Omega)}^2. \quad (40)$$

Далее, имеем

$$\left| \int_{\Omega} h(x, t) \varphi dx \right| \leq c \cdot \|h(t)\|_{L^{\infty}(\Omega)} \cdot \|\varphi(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\varphi(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + c_1 \|h(t)\|_{L^{\infty}(\Omega)}^2. \quad (41)$$

Согласно теореме вложения Соболева, для  $n = 3$  имеем  $\dot{H}^2(\Omega) \subset C(\Omega)$ , и поэтому

$$\int_{\Omega} (|\Delta \varphi|^2 + |\nabla \varphi|^2) dx \geq c_2 \|\varphi(t)\|_2^2 \geq c_3 \|\varphi(t)\|_{C(\Omega)}^2 \geq c_4 \|\varphi(t)\|_{L^{2\gamma/(\gamma-2)}(\Omega)}^2. \quad (42)$$

Подставляя неравенства (40) — (42) в (38), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\varphi(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + c_3 \|\varphi(t)\|_{L^{2\gamma/(\gamma-2)}(\Omega)}^2 \leq \\ \leq 2 \left( 1 + c(\varepsilon) \|m_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2c_1 \|h(t)\|_{L^{\infty}(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Так как  $m_k \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ ,  $h \in L^{\infty}(Q)$ , аргументы, которые были использованы при доказательстве оценки (19) и неравенства Гронпула приводят к окончательной оценке  $\|\varphi\|_{L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega))} \leq c \|h\|_{L^{\infty}(Q)}$ . Доказательство Предложения 2 завершено.

Вернемся к доказательству Теоремы 2. Оно будет завершено, если мы сможем аппроксимировать решения задачи (25), (22) гладкими решениями. Пусть последовательность функций  $\{m_{kj}\}_{j=1}^{\infty}$ ,  $m_{kj} \in C_0^{\infty}(Q)$  сходится к  $m_k(x, t)$ ,  $k = 1, 2, \dots$

Рассмотрим следующую задачу :

$$-\frac{\partial \varphi_{kj}}{\partial t} + \Delta^2 \varphi_{kj} - \Delta \varphi_{kj} - m_{kj}(x, t) \varphi_{kj} = h(x, t), \quad (25')$$

$$\varphi_{kj}|_{\Sigma} = \frac{\partial \varphi_{kj}}{\partial \nu} \Big|_{\Sigma} = 0, \quad \varphi_{kj}(x, T) = 0. \quad (22')$$

Теперь мы можем предположить, что  $h \in C_0^{\infty}(Q)$  и согласно Предложению 2 получаем  $\|\varphi_{kj}\|_{L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega))} \leq c \|h\|_{L^{\infty}(Q)}$

с  $\varphi_{kj} \in C^{4,1}(\bar{Q})$ , которое можно подставить в интегральное тождество. Соотношение (26) выполняется для любой функции  $h$  из множества, всюду плотного в  $L^{\infty}(Q)$ . Следовательно,  $u(x, t) = 0$  является решением и единственность доказана. Доказательство Теоремы 2 завершено.

**ABSTRACT.** The paper studies the questions of uniqueness of the weak solutions of initial boundary value problems for a class of evolutionary equations of fourth order with nonregular coefficients.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ж. - Л. Лионс, Управление Сингулярными Распределенными Системами, Москва, Наука, 1987.
2. H. Bressis, Communication personnelle, Fevrier, 1982.
3. J. - L. Lions, "Perturbations singulieres dans les problemes aux limites et en controle optimal", Lecture Notes in Mathematics, Springer, 1973.