

ОПИСАНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С РАСПАДАЮЩИМИСЯ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Ф. Э. Мелик-Адамян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 3, 1999

В n -мерном унитарном пространстве C^n рассмотрим линейный оператор J , удовлетворяющий условиям $J^* = -J = J^{-1}$, и квадратично интегрируемую $n \times n$ -матрицу-функцию $W(r)$, принимающую J -унитарные значения. Пусть W_0 – минимальный симметрический оператор в пространстве $L^2(0, l; C^n)$ квадратично интегрируемых n -мерных вектор-функций $x(r)$, $0 < r < l < \infty$, порожденных дифференциальным выражением $W^*(r) J \frac{d}{dr}(W(r)x(r))$. Расширения оператора W_0 , определяемые распадающимися штурмовыми граничными условиями, представляют определенный интерес. В настоящей статье дается описание как множества таких спектральных функций, так и спектральных функций интегральных операторов с однопарным ядром.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа является продолжением работы [1].

1. Сигнатурный оператор J , определенный на $N = C^n$ и удовлетворяющий условиям $J^* = -J = J^{-1}$, может быть представлен в виде $J = iP_+ - iP_-$, где $P_{\pm} = 2^{-1}(I_n \mp iJ)$ ($P_{\pm}^* = P_{\pm} = P_{\pm}^2$; $P_+ + P_- = I_n$). Положим $N_{\pm} = P_{\pm}N$. Для определенности предположим, что $\dim N_+ \geq \dim N_-$ ($N_{\pm} = P_{\pm}N$). Так как $N = N_+ \oplus N_-$ является ортогональным разложением, то операторы, действующие в N , представляются в виде блочных матриц второго порядка.

Рассмотрим квадратично интегрируемую матрицу-функцию $W(r)$ на интервале $(0, l)$ ($l < \infty$) и принимающую J -унитарные значения :

$$W^*(r)JW(r) = J = W(r)JW^*(r), \quad \|W(r)\| \in L^2(0, l).$$

Пусть $AC(0, l; N)$ – класс локально абсолютно-непрерывных функций, определенных на $(0, l)$ со значениями в N . В работе [1] рассмотрен дифференциальный

оператор

$$(Wx)(r) = W^*(r)J \frac{d}{dr}(W(r)x(r)), \quad x \in L^2(0, l; N) \quad (1)$$

действующий на многообразии

$$D(W) = \{x \in L^2(0, l; N) / W(r)x(r) \in AC(0, l; N), Wx \in L^2(0, l; N)\}.$$

Обозначим через $D(W_0)$ сужение оператора W на многообразии $D(W_0) = \{x \in D(W) / \lim_{r \rightarrow 0} x(r) = \lim_{r \rightarrow l} x(r) = 0\}$. Известно (см. [1], Теорема 1), что W_0 является симметричным и $W_0^* = W$. Если существует $\lim W(r)$, при $r \rightarrow 0$ и $r \rightarrow l$, то имеем

$$-i[(Wx, y) - (x, Wy)] = (J \begin{bmatrix} x(l) \\ x(0) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y(l) \\ y(0) \end{bmatrix}),$$

где $J = -i \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_+ - P_- & 0 \\ 0 & P_- - P_+ \end{bmatrix}$.

Следовательно (см. [1]), вопрос описания симметрических, диссипативных и аккумулятивных расширений $W_0 \subset W$ сводится к описанию J -нейтральных и J -дефинитных подпространств в пространстве $\hat{N} = N \oplus N$ с индефинитной метрикой, порожденной оператором J . Такие подпространства задаются с помощью нерастягивающихся "угловых" операторов $K_{\pm} : \hat{N}_{\pm} \rightarrow \hat{N}_{\mp}$, $\hat{N}_{\pm} = \hat{P}_{\pm} \hat{N}$; $\hat{P}_{\pm} = \frac{1}{2}(I_{2n} \pm J)$. Поэтому (см. [1]), рассматриваемые расширения W_K оператора W_0 ($W_0 \subset W_K \subset W$) определяются граничными условиями вида $(P_- x(l) + P_+ x(0)) + K_+ (P_+ x(l) + P_- x(0)) = 0$ или

$$(P_+ x(l) + P_- x(0)) + K_- (P_- x(l) + P_+ x(0)) = 0, \quad (2)$$

где $K_{\pm}$ - нерастягивающий оператор, определенный на всем пространстве $\hat{N}_{\pm}$ ($\hat{N}_{\mp}$). Если K унитарный (т.е. $K^* K = I_n$), то эти условия определяют самосопряженный оператор.

В наших рассмотрениях важную роль играет матрициант $U(r, \lambda)$ дифференциального выражения (1), т.е. матричное решение задачи Коши :

$$W^*(r)J \frac{d}{dr}(W(r)U(r, \lambda)) = \lambda U(r, \lambda); \quad U(r, \lambda) = I_n.$$

Матрициант $U(r, \lambda)$ можно характеризовать как функцию, удовлетворяющую тождеству

$$U^*(r, \mu)J U(r, \lambda) - J = (\lambda - \bar{\mu}) \int_0^r U^*(r, \mu) U(r, \lambda) dr.$$

Отсюда следует, что $U^*(r, \bar{\lambda}) J U(r, \lambda) = J = U(r, \lambda) J U^*(r, \bar{\lambda})$, $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\frac{U^*(r, \lambda) J U(r, \lambda) - J}{\lambda - \bar{\lambda}} > 0; \quad \frac{U(r, \lambda) J U^*(r, \lambda) - J}{\lambda - \bar{\lambda}} > 0, \quad \exists \lambda \neq 0.$$

В разложении $N = N_+ \oplus N_-$ представим матрицант $U(l, \lambda)$ в виде

$$U(l, \lambda) = \begin{bmatrix} U_{11}(l, \lambda) & U_{12}(l, \lambda) \\ U_{21}(l, \lambda) & U_{22}(l, \lambda) \end{bmatrix}.$$

Решение уравнения

$$W^*(r) J \frac{d}{dr}(W(r)x(r)) - \lambda x(r) = f(r), \quad f \in L^2(0, l; N), \quad (3)$$

удовлетворяющее граничному условию (2), имеет [1] вид

$$x(r, \lambda) = (R_\lambda(W_K) f)(r) = \int_0^l R_K(r, s, \lambda) f(s) ds,$$

где ядро $R_K(r, s, \lambda)$ резольвенты $R_\lambda(W_K)$ определяется соотношением

$$R_K(r, s, \lambda) = \frac{1}{2} \begin{cases} U(r, \lambda) (\omega(\lambda) - J) U^*(s, \bar{\lambda}) & \text{при } s < r, \\ U(r, \lambda) (\omega(\lambda) + J) U^*(s, \bar{\lambda}) & \text{при } s > r. \end{cases} \quad (4)$$

Функция $\omega(\lambda) = \omega_K(\lambda)$ определяется дробно-линейным преобразованием

$$\begin{aligned} \omega(\lambda) = \omega_K(\lambda) = & [(P_+ U(l, \lambda) + P_-) + K(P_- U(l, \lambda) + P_+)]^{-1} \times \\ & \times [(P_+ U(l, \lambda) - P_-) J + K(P_- U(l, \lambda) - P_+) J] \end{aligned} \quad (5)$$

и является R -функцией. Вышеописанная конструкция сохраняет смысл, когда нерастягивающие матрицы K заменяются нерастягивающими функциями $K(\lambda)$, которые аналитичны в верхней полуплоскости C_+ .

Пусть $\Omega(C_+)$ – класс R -функций $\omega(\lambda)$, которые являются образами функций $K(\lambda)$ при преобразовании (5). Рассмотрим пространство L преобразований

$$F(\lambda, f) = \int_0^l U^*(r, \bar{\lambda}) f(r) dr, \quad f \in L^2(0, l; N). \quad (6)$$

Оно становится гильбертовым пространством целых вектор-функций $F(\cdot, f)$, если ввести скалярное произведение $(F(\lambda, f), F(\lambda, g))_L \stackrel{\text{def}}{=} (f, g)_{L^2}$.

Выражение (6) является "направляющим функционалом" оператора W_0 . Это означает (см. [2]), что уравнение (3) имеет решение, принадлежащее $D(W_0)$ тогда и только тогда, когда $F(\lambda_0, f) = 0$. Следовательно, $F(\lambda, W_0 f) = \lambda F(\lambda, f)$, $f \in L^2(0, l; N)$. Неубывающая функция $\sigma(\xi)$, $-\infty < \xi < \infty$ называется спектральной функцией W_0 , если пространство L изометрически вкладывается

в $L^2(-\infty, \infty; d\sigma)$. Если это вложение отображает L на все $L^2(-\infty, \infty; d\sigma)$, то $\sigma(\xi)$ называется ортогональной спектральной функцией.

Отметим, что L является пространством Бранжа, т.е. гильбертовым пространством целых вектор-функций с порождающим ядром

$$\Phi(\lambda, \mu) = \int_0^l U^*(r, \bar{\lambda}) U(r, \bar{\mu}) dr = \frac{U^*(l, \bar{\lambda}) J U(l, \bar{\mu}) - J}{\bar{\mu} - \lambda} = \frac{2V(\bar{\lambda}, \bar{\mu})}{\bar{\mu} - \lambda}.$$

Для каждого $F \in L$ и $x \in N$ имеем $(F(\lambda), \Phi(\lambda, \mu))_L = (F(\mu), x)_N$. Отсюда следует, что функции $\Phi(\lambda, \mu_n) x$, где $x \in N$ и μ_n — ограниченная последовательность в C_+ , плотны в L . Следовательно, преобразование, обратное к (6), имеет вид

$$f(r) = \int_{-\infty}^{\infty} U(r, \lambda) d\sigma(\lambda) F(\lambda, f).$$

В самом деле, легко проверить, что

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} U(r, \lambda) d\sigma(\lambda) F(\lambda, f), U(r, \bar{\mu}) x \right)_{L^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} (d\sigma(\lambda) F(\lambda, f), \Phi(\lambda, \mu) x) = \\ &= (F(\lambda, f), \Phi(\lambda, \mu) x)_L = (f(r), U(r, \bar{\mu}) x)_{L^2}. \end{aligned}$$

Следующая теорема описывает множество всех спектральных функций оператора W_0 (см. [1]).

Теорема 1. Множество спектральных функций R -функций $\omega(\lambda) \in \Omega(C_+)$ совпадает с множеством всех спектральных функций оператора W_0 . Если $\omega(\lambda)$ является дробно-линейным преобразованием унитарного углового оператора K , то множество ортогональных спектральных функций есть в точности множество спектральных функций самосопряженных расширений оператора W_0 .

Доказательство этой теоремы основано на равенстве

$$(R_\lambda f, f) = 2^{-1}(\omega(\lambda) F(\lambda, f), F(\bar{\lambda}, f)) + (G_\lambda f, f), \quad (7)$$

где $(G_\lambda f, f)$ — целая вещественная функция. Из этого соотношения следует, что для любого $f \in L^2(0, l; N)$ имеет место

$$(f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} (F(\xi, f), d\sigma(\xi) F(\xi, f)),$$

где $\sigma(\xi)$ — спектральная функция R -функции $\omega(\lambda)$.

Рассмотрим теперь расширения оператора W_0 с распадающимися (штурмовыми) граничными условиями, т.е. граничные условия задаются равенством (2)

в предположении, что K удовлетворяет условию $P_+ K P_+ = P_- K P_- = 0$. В этом случае в разложении $N = N_+ \oplus N_-$ имеем $K = \begin{bmatrix} 0 & K_I \\ K_0 & 0 \end{bmatrix}$. Следовательно, (2) можно записать в виде

$$P_+ x(l) + K_I P_- x(l) = 0; \quad P_- x(0) + K_0 P_+ x(0) = 0, \quad (8)$$

где $K_I : N_- \rightarrow N_+$ и $K_0 : N_+ \rightarrow N_-$ — произвольные нестягивающие операторы. В частности, отсюда следует, что распадающиеся граничные условия определяют самосопряженные расширения в том и только в том случае, когда $\dim N_+ = \dim N_-$ и оба оператора K_0 и K_I унитарны.

Перейдем теперь к описанию спектральных функций оператора W_0 с распадающимися граничными условиями. В этом случае функцию $\omega(\lambda)$ можно представить в виде

$$\omega(\lambda) = \begin{bmatrix} U_{11}(l, \lambda) + K_I U_{21}(l, \lambda) & U_{12}(l, \lambda) + K_I U_{22}(l, \lambda) \\ K_0 & P_- \end{bmatrix}^{-1} \times \\ \times \begin{bmatrix} i(U_{11}(l, \lambda) + K_I U_{21}(l, \lambda)) & -i(U_{12}(l, \lambda) + K_I U_{22}(l, \lambda)) \\ -iK_0 & iP_- \end{bmatrix}.$$

Положим

$$T(\lambda) = [U_{11}(l, \lambda) + K_I U_{21}(l, \lambda)]^{-1} [U_{12}(l, \lambda) + K_I U_{22}(l, \lambda)]. \quad (9)$$

Из свойств матрицанта $U(l, \lambda)$ следует, что для произвольного нестягивающего оператора $K_I : N_- \rightarrow N_+$ это дробно-линейное преобразование хорошо определен и является нестягивающим оператором из N_- в N_+ . Функцию $\omega(\lambda)$ можно записать в виде $\omega(\lambda) = i \begin{bmatrix} P_+ & T(\lambda) \\ K_0 & P_- \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} P_+ & -T(\lambda) \\ -K_0 & P_- \end{bmatrix}$. Из равенства

$$\begin{bmatrix} P_+ & T(\lambda) \\ K_0 & P_- \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (P_+ - T(\lambda)K_0)^{-1} & -T(\lambda)(P_- - K_0 T(\lambda))^{-1} \\ -K_0(P_+ - T(\lambda)K_0)^{-1} & (P_- - K_0 T(\lambda))^{-1} \end{bmatrix}$$

получим

$$\omega(\lambda) = i \begin{bmatrix} (P_+ - T(\lambda)K_0)^{-1}(P_+ + T(\lambda)K_0) & -2T(\lambda)(P_- - K_0 T(\lambda))^{-1} \\ -2K_0(P_+ - T(\lambda)K_0)^{-1} & (P_- - K_0 T(\lambda))^{-1}(P_- + K_0 T(\lambda)) \end{bmatrix}.$$

Положим

$$\begin{aligned} \omega_+(\lambda) &= i(P_+ - T(\lambda)K_0)^{-1}(P_+ + T(\lambda)K_0), \\ \omega_-(\lambda) &= i(P_- - K_0 T(\lambda))^{-1}(P_- + K_0 T(\lambda)). \end{aligned} \quad (10)$$

Ясно, что функции $\omega_{\pm}(\lambda)$ являются R -функциями, действующими в $N_{\pm}$. Следовательно

$$\omega(\lambda) = \begin{bmatrix} \omega_+(\lambda) & -T(\lambda)(iP_- + \omega_-(\lambda)) \\ -K_0(iP_+ + \omega_+(\lambda)) & \omega_-(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Зафиксируем некоторое граничное условие в нуле, задав изометрический оператор $K_0: N_+ \rightarrow N_-$, $K_0 K_0^* = P_-$, $K_0^* K_0 = P_0 = P_+$, и рассмотрим задачу описания спектральных функций симметрического оператора W_{K_0} , определенного формулой (1) на многообразии $D(W_{K_0}) = \{x \in D(W) / P_- x(0) + K_0 P_+ x(0) = 0; x(l) = 0\}$. Имеем $(P_- \pm K_0 T(\lambda)) = K_0(P_+ \pm T(\lambda)K_0)K_0^*$. Тогда, $\omega_-(\lambda) = K_0 \omega_+(\lambda) K_0^*$. С другой стороны

$$-2T(\lambda)(P_- - K_0 T(\lambda))^{-1} = -2(P_+ - T(\lambda)K_0)^{-1}T(\lambda)K_0 K_0^* = (iP_+ - \omega_+(\lambda))K_0^*.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \omega(\lambda) &= \begin{bmatrix} \omega_+(\lambda) & (iP_+ - \omega_+(\lambda))K_0^* \\ -K_0(iP_+ + \omega_+(\lambda)) & K_0 \omega_+(\lambda) K_0^* \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} P_+ \\ -K_0 \end{bmatrix} \omega_+(\lambda) [P_+ - K_0^*] + \begin{bmatrix} 0 & iK_0^* \\ -iK_0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

Для нахождения соответствующего резольвентного ядра рассмотрим следующую $(2n \times n)$ -матрицу-функцию

$$\Phi(r, \lambda) = \begin{bmatrix} \phi_1(r, \lambda) \\ \phi_2(r, \lambda) \end{bmatrix} = U(r, \lambda) \begin{bmatrix} P_+ \\ -K_0 \end{bmatrix}, \quad \Psi(r, \lambda) = \begin{bmatrix} \psi_1(r, \lambda) \\ \psi_2(r, \lambda) \end{bmatrix} = U(r, \lambda) \begin{bmatrix} -iP_+ \\ -iK_0 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

В силу (11) имеем $\omega(\lambda) - J = \left(\begin{bmatrix} P_+ \\ -K_0 \end{bmatrix} \omega_+(\lambda) + \begin{bmatrix} -iP_+ \\ -iK_0 \end{bmatrix} \right) [P_+ - K_0^*]$,

$$\omega(\lambda) + J = \begin{bmatrix} P_+ \\ -K_0 \end{bmatrix} (\omega_+(\lambda) [P_+ - K_0^*] + [iP_+ iK_0^*]).$$

Отсюда следует

$$R_{K_0}(r, s, \lambda) = \frac{1}{2} \begin{cases} U(r, \lambda) \left(\begin{bmatrix} P_+ \\ -K_0 \end{bmatrix} \omega_+(\lambda) + \begin{bmatrix} -iP_+ \\ -iK_0 \end{bmatrix} \right) [P_+ - K_0^*] U^*(s, \bar{\lambda}), & s < r, \\ U(r, \lambda) \begin{bmatrix} P_+ \\ -K_0 \end{bmatrix} (\omega_+(\lambda) [P_+ - K_0^*] + [iP_+ iK_0^*]) U^*(s, \bar{\lambda}), & s > r. \end{cases}$$

Учитывая (12), получим

$$R_K(r, s, \lambda) = \begin{cases} (\Psi(r, \lambda) + \Phi(r, \lambda) \omega_+(\lambda)) \Phi^*(s, \bar{\lambda}) & \text{при } s < r, \\ \Phi(r, \lambda) (\Psi^*(s, \bar{\lambda}) + \omega_+(\lambda) \Phi^*(s, \bar{\lambda})) & \text{при } s > r. \end{cases} \quad (13)$$

Ясно, что при произвольном $x_+ \in N_+$ вектор-функция $\Phi(r, \lambda)x_+$ удовлетворяет граничному условию (8) в точке $r = 0$. Подставляя $T(\lambda)$ из (9) в (10) и учитывая (12), заметим, что $\omega_+(\lambda)$ определяется дробно-линейным преобразованием

$$\omega_+(\lambda) = -(\phi_1(l, \lambda) + K_1 \phi_2(l, \lambda))^{-1} (\psi_1(l, \lambda) + K_1 \psi_2(l, \lambda)). \quad (14)$$

Отсюда следует, что $X(r, \lambda)x_+ = (\Psi(r, \lambda) + \Phi(r, \lambda)\omega_+(\lambda))$ удовлетворяет граничному условию (8) в точке $r = l$. Как показано в [1], множество $\Omega(\lambda)$ матриц $\omega(\lambda)$, $\lambda \in C_+$ образует круг:

$$\frac{2\Im \omega(\lambda)}{\Im \lambda} \geq (\omega^*(\lambda) + J) \int_0^l U^*(r, \lambda) U(r, \lambda) dr (\omega(\lambda) - J).$$

Следовательно, матрица $\omega_+(\lambda)$ заполняет круг $\Omega(\lambda, K_0)$, задаваемый неравенством

$$\frac{2\Im \omega_+(\lambda)}{\Im \lambda} \geq \int_0^l (\Psi(r, \lambda) + \Phi(r, \lambda)\omega_+(\lambda))^* (\Psi(r, \lambda) + \Phi(r, \lambda)\omega_+(\lambda)) dr.$$

Отметим, что если $\dim N_+ = \dim M_-$ и K_0 – унитарный оператор, то окружность $\Omega_0(\lambda, K_0)$ задается равенством

$$\frac{2\Im \omega_+(\lambda)}{\Im \lambda} = \int_0^l (\Psi(r, \lambda) + \Phi(r, \lambda)\omega_+(\lambda))^* (\Psi(r, \lambda) + \Phi(r, \lambda)\omega_+(\lambda)) dr,$$

когда K_l пробегает множество унитарных операторов. Положим

$$A = \Im \lambda \int_0^l \Phi^*(r, \lambda) \Phi(r, \lambda) dr; \quad B = \Im \lambda \int_0^l \Phi^*(r, \lambda) \Psi(r, \lambda) dr;$$

$C = \Im \lambda \int_0^l \Psi^*(r, \lambda) \Psi(r, \lambda) dr$ и вышерассматриваемый круг представим в виде

$$\omega_+^*(\lambda) A \omega_+(\lambda) + \omega_+^*(\lambda) (B - iI_+) + (B^* + iI_+) \omega_+(\lambda) + C \leq 0,$$

или в параметрическом виде $\omega_+(\lambda) = O + R_l Z R_r$, $Z^* Z \leq I_+$, где $O = -A^{-1}(B - iI_+)$, $R_l = A^{-1/2}$ и $R_r = ((B^* + iI_+)A^{-1}(B - iI_+) - C)^{1/2}$.

В силу (11), соотношение (7) в рассматриваемом случае представим в виде

$$(R_\lambda f, f) = 2^{-1}(\omega_+(\lambda) F_1(\lambda, f), F_1(\bar{\lambda}, f)) + \\ + \left(\begin{bmatrix} 0 & iK_0^* \\ -iK_0 & 0 \end{bmatrix} F(\lambda, f), F(\bar{\lambda}, f) \right) + (G_\lambda f, f),$$

где

$$F_1(\lambda, f) = [P_+ - K_0^*] \int_0^l U^*(r, \bar{\lambda}) f(r) dr, \quad f \in L^2(0, l; N). \quad (15)$$

Отсюда следует, что $(f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} (F_1(\xi, f), d\sigma_+(\xi) F_1(\xi, f))$, где $\sigma_+(\xi)$ – спектральная функция R -функции $\omega_+(\lambda)$.

Заметим, что $F_1(\lambda, f)$, определенная выражением (15), является направляющим функционалом для оператора W_{K_0} . В этом легко убедиться, если представить решение $x(r, \lambda)$ уравнения (3), удовлетворяющее условию $x(l, \lambda) = 0$, в виде

$$x(r, \lambda) = U(r, \lambda) J \int_r^l U^*(s, \bar{\lambda}) f(s) ds$$

и заметить, что условие $(P_- + K_0 P_+)x(0, \lambda) = (P_- + K_0 P_+) J \int_r^l U^*(s, \bar{\lambda}) f(s) ds = 0$ равносильно условию $F_1(\lambda, f) = 0$. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 2. Множество спектральных функций оператора W_{K_0} совпадает с множеством спектральных функций $\sigma_+(\xi)$ R -функций $\omega_+(\lambda)$, задаваемых дробно-линейным преобразованием (14), когда $K_1(\lambda)$ пробегает множество всех нерастягивающих функций, аналитических в верхней полуплоскости.

Ортогональные спектральные функции существуют в том и только в том случае, когда $\dim N_+ = \dim N_-$, а фиксированная матрица K_0 унитарна, и определяются постоянными унитарными матрицами K_1 .

2. В этом пункте полученные результаты применим к интегральным операторам S с однопарным ядром (см. [3], [4]) для $f \in L^2(0, l; C^{2n})$

$$S f(r) = \Psi(r) \int_0^r \Phi^*(s) f(s) ds + \Phi(r) \int_r^l \Psi^*(s) f(s) ds,$$

где $\Phi(r)$ и $\Psi(r)$ — квадратично интегрируемые $(2n \times n)$ -матрицы-функции на $(0, l)$. Заметим, что S есть интегральный оператор в $L^2(0, l; C^{2n})$ с ядром

$$S(r, s) = \begin{cases} \Psi(r)\Phi^*(s) & \text{при } s < r, \\ \Phi(r)\Psi^*(s) & \text{при } s > r. \end{cases}$$

В представлении по столбцам $\Phi(r) = \begin{bmatrix} \phi_1(r) \\ \phi_2(r) \end{bmatrix}$, $\Psi(r) = \begin{bmatrix} \psi_1(r) \\ \psi_2(r) \end{bmatrix}$, где $\phi_k(r)$ и $\psi_k(r)$, $k = 1, 2$; $r \in (0, l)$ суть $(n \times n)$ -матрицы.

Предположим, что $(2n \times 2n)$ -матрица $[\Phi(r) \Psi(r)]$ ($r \in (0, l)$) невырождена и непрерывна в точках 0 и l . Тогда можно считать, что соотношение

$$\Phi(r) \Psi^*(r) - \Psi(r) \Phi^*(r) = [\Phi(r) \Psi(r)] \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi^*(r) \\ \Psi^*(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} iI_n & 0 \\ 0 & -iI_n \end{bmatrix}$$

выполняется, так как пару $\Phi(r)$ и $\Psi(r)$ всегда можно заменить на пару $A(r)\Phi(r)$ и $A(r)\Psi(r)$, где $A(r)$ -невырожденная $(2n \times 2n)$ -матрица-функция. Рассмотрим функцию $U(r) = [\Phi(r) \Psi(r)] V$, где $V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I_n & -I_n \\ iI_n & iI_n \end{bmatrix}$. Учитывая, что

$$V^* \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} V = \begin{bmatrix} iI_n & 0 \\ 0 & -iI_n \end{bmatrix},$$

легко убедиться, что $U(r)$ J -унитарна. Не умаляя общности предположим, что $U(0) = I_n$.

Рассмотрим теперь дифференциальное выражение (1), где $W(r) = U^*(r) J$ и соответствующий оператор W_{K_0} . В этом случае $N_+ = N_- = C^n$, так что можно считать $K_0 = I_n$ и рассмотреть оператор W_{I_n} , являющийся сужением оператора W на многообразие $D(W_{I_n}) = \{x \in D(W) / P_- x(0) + P_+ x(0) = 0, \quad x(l) = 0\}$.

Представим матрицант рассматриваемого дифференциального выражения в виде $U(r, \lambda) = [\Phi(r, \lambda) \Psi(r, \lambda)] V$, $\Phi(r, 0) = \Phi(r)$, $\Psi(r, 0) = \Psi(r)$. Отсюда следует, что ядро $R(r, s, \lambda)$ резольвенты произвольного расширения оператора W_{I_n} имеет вид (13).

Покажем, что оператор S является обратным к некоторому самосопряженному расширению $\widetilde{W}_{I_n}$ оператора W_{I_n} . Для этого выберем унитарный оператор K_l , задающий граничное условие в точке $r = l$ и удовлетворяющий $\omega_+(0) = 0$ (см. [10]). Имеем $T(0) = -I_n$. Следовательно, K_l определяется преобразованием, обратным к (14) :

$$\begin{aligned} K_l &= -(U_{11}^*(l, 0) + U_{12}^*(l, 0))^{-1} (U_{21}^*(l, 0) + U_{22}^*(l, 0)) = \\ &= -(U_{11}(l, 0) + U_{12}(l, 0))(U_{21}(l, 0) + U_{22}(l, 0))^{-1} = -\psi_1(l)\psi_2^{-1}(l). \end{aligned}$$

В силу (13) имеем

$$R_K(r, s, 0) = \begin{cases} \Psi(r)\Phi^*(s) & \text{при } s < r, \\ \Phi(r)\Psi^*(s) & \text{при } s > r. \end{cases}$$

Следовательно, $S^{-1} = \widetilde{W}_{I_n}$, где $\widetilde{W}_{I_n}$ — самосопряженное расширение оператора W_{I_n} , определенным граничными операторами $K_0 = I_n$ и $K_l = -\psi_1(l)\psi_2^{-1}(l)$. Тогда $W_{I_n} = \widehat{S}^{-1}$, где $\widehat{S}$ — сужение оператора S на многообразии, определенное условием

$$S f(l) = \Phi(l) \int_0^l \Psi^*(s) f(s) ds = 0$$

или, что то же самое, $\int_0^l \Psi^*(s) f(s) ds = 0$. Мы доказали следующую теорему.

Теорема 3. Произвольное самосопряженное или аккумулятивное расширение оператора $\widehat{S}$ определяется ядром

$$S(r, s) = \begin{cases} (\Psi(r) + \Phi(r)\omega_+(0))\Phi^*(s) & \text{при } s < r, \\ \Phi(r)(\Psi^*(s) + \omega_+(0)\Phi^*(s)) & \text{при } s > r, \end{cases}$$

где $\omega_+(\lambda)$ определяется по формуле (14) с унитарным или нестягивающим оператором K_l . Ядро фредгольмовой резольвенты оператора $\widehat{S}$ совпадает с ядром $R_K(r, s, \lambda)$ в представлении (13).

Таким образом, применяя Теорему 2, можно описать спектральные функции оператора $\widehat{S}$.

ABSTRACT. In n -dimensional unitary space C^n we consider a linear operator J satisfying $J^* = -J = J^{-1}$ and a square integrable $n \times n$ matrix function $W(r)$ taking J -unitary values. Let W_0 be a minimal symmetrical operator in the space $L^2(0, l; C^n)$ of square integrable n -dimensional vector-functions $x(r)$, $0 < r < l < \infty$ generated by differential expression $W^*(r) J \frac{d}{dr}(W(r)x(r))$. Extensions of W_0 determined by decaying Sturm boundary conditions are of special interest. In this paper we describe a set of such spectral functions and apply them for description of spectral functions of integral operators with single-pair kernels.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ф. Э. Мелик-Адамян, "Описание спектральных функций одного класса дифференциальных операторов", Изв. АН Армении, Математика, том 34, № 2, стр. 54–74, 1999.
2. М. Г. Крейн, "Про ермітові оператори з напрямними функціоналами", Сб. Трудов АН УРСР, том 10, стр. 83 — 106, 1948.
3. Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Крейн, Оспиляционные Матрицы и Ядра и Малые Колебания Механических Систем, ГИТТЛ, М.—Л., 1950.
4. В. А. Яврян, "К спектральной теории однопарных интегральных операторов", Изв. АН Армении, Математика, том 22, № 1, стр. 75 — 93, 1987.

25 января 1999

Ереванский государственный университет