ПРИМАРНЫЕ ИДЕАЛЫ АЛГЕБР ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

С. А. Григорян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 3, 1999

В статье изучаются алгебры обобщенных аналитических (по Аренс-Зингеру) функций. Существенно, что они являются равномерными алгебрами на компактных абелевых группах, порожденных полугруппой характеров, определяющих полный архимедовый порядок на дуальной группе. Примеры : алгебра всех непрерывных функций на единичной окружности, имеющих непрерывное аналитическое продолжение на единичный диск в комплексной плоскости и алгебра всех непрерывных почти-периодических функций на действительной оси, допускающих непрерывное аналитическое почти-периодическое продолжение на верхнюю полуплоскость. Статья описывает примарные идеалы таких алгебр и в явном виде представляет меры, ортогональные алгебрам обобщенных аналитических функций.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть Γ – аддитивная подгруппа действительных чисел $\mathbb{R}$ с дискретной топологией. Пусть G – группа характеров группы Γ. По теореме двойственности Понтрягина группа G компактна и группа ее характеров изоморфна Γ. Для $a \in \Gamma$ пусть $\alpha(a) = \chi^a(\alpha)$, $\alpha \in G$ – соответствующий характер. Обозначим через σ нормированную меру Хаара группы G. Каждая функция $f \in L^1(G, \sigma)$ представляется в виде формального ряда Фурье $f(\alpha) \approx \sum\limits_{a \in \Gamma} c_a^f \chi^a(\alpha)$ с коэффициентами Фурье $c_a^f = \int_G f(\alpha) \overline{\chi}^a(\alpha)\, d\sigma(\alpha)$.

Множество $\mathrm{Sp}(f)$ тех $a \in \Gamma$, для которых $c_a^f \neq 0$, называется **спектром функции** f. Функция $f \in L^1(G, \sigma)$ называется **обобщенной аналитической функцией**, если $\mathrm{Sp}(f)$ содержится в $\Gamma_+ = \{a \in \Gamma : a \geq 0\}$. Пусть A – алгебра всех непрерывных обобщенных аналитических функций. Заметим, что A является равномерной алгеброй относительно нормы $\|f\| = \sup_{\alpha \in G} |f(\alpha)|$, $f \in A$.

Проблема описания идеалов алгебры A является одной из самых старых задач теории обобщенных аналитических функций. Она полностью решена в случае, когда группа Γ изоморфна группе целых чисел $\mathbf{Z}$, т.е. когда A является диск-алгеброй (см. [1]). В этой статье описываются все примарные идеалы алгебры A в случае, когда группа Γ не изоморфна $\mathbf{Z}$.

Статья состоит из 6 параграфов. В §1 приводится перечень необходимых понятий и свойств обобщенных аналитических функций. В §2 исследуются меры, ортогональные максимальному идеалу алгебры A, порожденному характерами χ^a, $a > 0$. Основные результаты статьи содержатся в §3–§5, где дается описание примарных идеалов алгебры A. Одному из примеров применения результатов статьи посвящен §6.

§1. ОБОБЩЕННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

В этом параграфе приведем те сведения из теории обобщенных функций, которыми будем пользоваться в этой работе. Доказательства встречающихся здесь утверждений можно найти в [2] — [5].

Пусть Δ – пространство максимальных идеалов алгебры A. Известно, что Δ получается из декартова произведения $G \times [0,1]$ путем отождествления в точку слоя $G \times \{0\}$. В дальнейшем знак $*$ будет обозначать эту точку. Образ G при естественном вложении в Δ отождествляется с множеством $G \times \{1\}$. Преобразование Гельфанда алгебры A есть равномерная алгебра $\hat{A}$, определенная на Δ, порожденная функциями $\hat{\chi}^a$, $a \in \Gamma_+ : \hat{\chi}^a(\alpha r) = \chi^a(\alpha) r^a$. Отображение $\alpha_t(a) = e^{ita}$ определяет изоморфизм между $\mathbb{R}$ и некоторой подгруппой группы G, которую также будем обозначать через $\mathbb{R}$.

Сужение конечной линейной комбинации $f = \sum_{a \in \Gamma_+} c_a^f \chi^a$ на $\mathbb{R} \subset G$ есть непрерывная почти-периодическая функция $f(t) = \sum_{a \in \Gamma_+} c_a^f e^{iat}$. Поэтому отображение $t \mapsto \alpha_t$ порождает изоморфизм между A и алгеброй $\Pi_\Gamma(\mathbb{R})$ всех тех непрерывных почти-периодических функций, определенных на $\mathbb{R}$, формальный ряд Фурье которых имеет вид $\sum\limits_{a \in \Gamma_+} c_a^f e^{iat}$. Множество $\mathrm{Sp}(f) = \{a \in \Gamma_+ : c_a^f \neq 0\}$ называется спектром функции $f \in \Pi_\Gamma(\mathbb{R})$. Отметим, что $\mathrm{Sp}(f(\alpha)) = \mathrm{Sp}(f(t))$. Пусть $D = \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$ – верхняя полуплоскость в $\mathbf{C}$ и $D^\circ = D \setminus \mathbb{R}$. Любая функция из $\Pi_\Gamma(\mathbb{R})$ непрерывно расширяется на D до ограниченной функции, аналитической на D°.

Для простоты предположим, что $2\pi \in \Gamma$. Пусть K – компактная подгруппа группы G, состоящая из всех тех $\alpha \in G$, для которых $\chi^{2\pi}(\alpha) = 1$. Очевидно, что

$\alpha_n \in K$ для любого $n \in \mathbb{Z}$. Декартово произведение $X = K \times \mathbb{R}$ можно наделить структурой локально-компактной абелевой группы. Определим гомоморфизм $p : X \to G$, полагая $p(\alpha, t) = \alpha \cdot \alpha_t$. Подгруппа $F = \{(\alpha_n, -n) \in X : n \in \mathbb{Z}\}$ группы X является ядром этого гомоморфизма. При каждом $n \in \mathbb{Z}$ множество $X_n = K \times [n, n+1)$ есть фундаментальная область для p. Следовательно, $p : X \to G$ – счетно-листное неразветвленное накрытие. Группа G получается из $K \times [n, n+1]$ с помощью отождествления точки $(\alpha, n+1)$ с $(\alpha \cdot \alpha_1, n)$.

Пусть $B(D)$ — алгебра всех непрерывных ограниченных функций на D, аналитических на D°. В силу принципа Фрагмена-Линделефа

$$\sup_{z \in D} |f(z)| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|, \qquad f \in B(D). \tag{1.1}$$

Поэтому сужение $B(\mathbb{R})$ алгебры $B(D)$ на $\mathbb{R}$ замкнуто в sup-норме. Конформное отображение $w(t) = (i - t)/(i + t)$ отображает $\mathbb{R}$ в единичную окружность T. Пусть $H^1(T)$ – пространство Харди на T, а H^1 – пространство всех тех функций из $L^1\left(\mathbb{R}, \dfrac{dt}{1+t^2}\right)$, которые представимы в виде суперпозиции $g \circ w(t)$, $g \in H^1(T)$. Воспользовавшись теоремой Ф. и М. Риссов о мерах, ортогональных диск-алгебре, можно показать, что пространство $B^{\perp}(\mathbb{R})$ всех мер на $\mathbb{R}$, ортогональных к $B(\mathbb{R})$, совпадает с $H_0^1 \dfrac{dt}{1+t^2}$, где $H_0^1 = \dfrac{i-t}{i+t} H^1$.

Рассмотрим на декартовом произведении $Y = K \times D$ алгебру $B(Y)$ всех тех непрерывных функций, которые при каждом фиксированном $\alpha \in K$ принадлежат $B(D)$. Пусть $B(X)$ есть сужение $B(Y)$ на X. Из (1.1) следует, что

$$\sup_{y \in Y} |f(y)| = \sup_{x \in X} |f(x)|, \qquad f \in B(Y).$$

Поэтому $B(Y)$ и $B(X)$ являются равномерными алгебрами.

Обозначим через $H_0^1(X)$ семейство всех мер на X вида

$$g(\alpha, t)\nu(\alpha) \times \frac{dt}{1+t^2}, \tag{1.2}$$

где $\nu(\alpha)$ – вероятностная мера на K, $g(\alpha, t) \in L^1\left(\nu(\alpha) \times \dfrac{dt}{1+t^2}\right)$ и для почти всех $\alpha \in K$ функция $g_\alpha(t) = g(\alpha, t)$ принадлежит H_0^1. Обозначим через $B^{\perp}(X)$ пространство мер на X, ортогональных к $B(X)$.

Лемма 1.1. $B^{\perp}(X) = H_0^1(X)$.

Доказательство : Пусть $C(K)$ – алгебра всех непрерывных на K функций. Алгебру $C(K)$ можно вложить в $B(X)$, полагая $f(\alpha, t) = f(\alpha)$. Тогда, по одному из вариантов теоремы Крейна–Мильмана, каждую меру $\mu \in B^{\perp}(X)$ можно представить в виде $\mu = \nu(\alpha) \times h_{\alpha}(t)$, где $\nu(\alpha)$ -вероятностная мера на K, а мера $h_{\alpha}(t)$ сосредоточена на $\mathbb{R}_{\alpha} = \{\alpha\} \times \mathbb{R}$ и принадлежит $B^{\perp}(X)$ для почти всех $\alpha \in K$. Так как сужение $B(X)$ на $\mathbb{R}_{\alpha}$ есть $B(\mathbb{R})$, то $h_{\alpha}(t) \in H_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$. Отсюда получаем, что $\mu \in H_0^1(X)$.

Обратно, пусть $\mu \in H_0^1(X)$, $\mu = g(\alpha, t)\nu(\alpha) \times \frac{dt}{1+t^2}$ и $f \in B(X)$. Тогда

$$\int_X f\,d\mu = \int_K \left(\int_{\mathbb{R}} f(\alpha, t) g(\alpha, t) \frac{dt}{1+t^2} \right) d\nu(\alpha).$$

Внутренний интеграл равен нулю для почти всех $\alpha \in K$ по мере $\nu(\alpha)$. Поэтому $\mu \in B^{\perp}(X)$. Следовательно, $H_0^1(X) = B^{\perp}(X)$. Лемма 1.1 доказана.

Замечание 1. Покажем как по $\mu \in B^{\perp}(X)$ найти соответствующую ей вероятностную меру $\nu(\alpha)$ на K. Вначале построим вероятностную меру μ' на X : $\mu' = |\mu|/\|\mu\|$. Эта мера определяет на $C(K) \subset B(X)$ положительный функционал $F(f) = \int_X f\,d\mu'$, $f(\alpha) \in C(K)$, с нормой равной единице 1. По теореме Ф. Рисса существует вероятностная мера ν на K такая, что $F(f) = \int_K f\,d\nu$. Мера ν и есть искомая. Поскольку при $a \in \Gamma_+$ имеем $\chi^a \circ p(\alpha, t) = \chi^a(\alpha)e^{iat} \in B(X)$, то отображение $p : X \to G$ порождает вложение A в $B(X)$.

Лемма 1.2. $A^{\circ} = \{f \circ p : f \in A\}$ **совпадает с подалгеброй всех тех функций из** $B(X)$, **инвариантных относительно сдвигов, индуцированных элементами группы** $F = \{(\alpha_n, -n) . n \in \mathbb{Z}\}$.

Доказательство : Поскольку F есть ядро гомоморфизма $p : X \to G$, алгебра A° инвариантна относительно F. Пусть $f^{\circ} \in B(X)$ есть F-инвариантная функция. Так как фактор-группа X/F есть G, то найдется непрерывная функция f на G такая, что $f^{\circ} = f \circ p$. Покажем, что $f \in A$. Отметим, что гомоморфизм p осуществляет изометрический изоморфизм между равномерными алгебрами $[A^{\circ}; f^{\circ}] \subset B(X)$ и $[A; f]$ на G, где $[A; h]$ – алгебра, порожденная алгеброй A и функцией h. Известно (см. [3], стр. 220), что либо $[A; f] = A$, либо $[A; f] = C(G)$, где $C(G)$ есть алгебра всех непрерывных функций на G. Если $[A; f] = C(G)$, то $\chi^a \circ p \in B(X)$ для всех $a \in \Gamma$. Так как $\chi^a \circ p(\alpha, t) = \chi^a(\alpha)e^{iat} \notin B(X)$ при $a < 0$, то $[A; f] = A$. Следовательно, $f^{\circ} \in A^{\circ}$. Лемма 1.2 доказана.

Отображение $p : X \to G$ можно расширить до отображения $p' : Y \to \Delta^{\circ}$, $\Delta^{\circ} = \Delta \setminus \{\ast\}$, полагая $p'(\alpha, z) = \alpha \cdot \alpha_t e^{-y}$, $z = t + iy$. Отметим, что $p' : Y \to \Delta^{\circ}$ также является счетно-листным безграничным неразветвленным накрытием

Это отображение порождает вложение образа отображения Гельфанда алгебры A в $B(Y)$.

§2. ПРОСТРАНСТВО $I_*^\perp$

В этом параграфе исследуются меры на G, ортогональные максимальному идеалу $I_* = \{f \in A : \hat{f}(*) = 0\}$ алгебры A.

Пусть $M(G)$ – пространство всех конечных мер на G. Мера $\mu \in M(G)$ представима на G в виде ряда Фурье–Стилтьеса $\mu \approx \sum_{a\in\Gamma} c_a^\mu \chi^a$ с коэффициентами Фурье–Стилтьеса $c_a^\mu = \int_G \overline{\chi}^a \, d\mu$.

Множество тех $a \in \Gamma$, для которых $c_a^\mu \neq 0$, называется спектром меры μ и обозначается через $\mathrm{Sp}(\mu)$. Мера $\mu \in M(G)$ ортогональна к A тогда и только тогда, когда $\mathrm{Sp}(\mu) \subset \Gamma_+ \setminus \{0\}$, т.е. если μ является аналитической A-мерой (см. [6]). Для каждой меры $\mu \in M(G)$, можно определить сеть мер $\{\mu_j\} \subset M(G)$ такую, что

a) $\mathrm{Sp}(\mu_j)$ конечен и содержится в $\mathrm{Sp}(\mu)$,

b) $\|\mu_j\| \leq \|\mu\|$, и c) сеть $\{\mu_j\}$ слабо* сходится к мере μ (см. [4]).

Из а) следует, что если μ является аналитической A-мерой, то и μ_j - аналитическая A-мера. Более того, имеем $\mu_j = f_j \cdot \sigma$, где $f_j = \sum_{a\in\Gamma_+} c_a \chi^a$ – конечная линейная комбинация характеров, а σ – нормированная мера Хаара группы G.

Каждое борелевское множество $F \subset X$ можно представить в виде $F = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} F_n$, где $F_n = F \cap X_n$, $X_n = K \times [n, n+1]$. Поэтому меру $\mu \in M(G)$ можно отобразить в локально–конечную меру $\tilde{\mu}$ на X, полагая $\tilde{\mu}(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu(p(F_n))$. Отображение $\mu \mapsto \tilde{\mu}$ переводит $M(G)$ на пространство $M_F(X)$ всех локально–конечных мер на X, инвариантных относительно сдвигов, индуцированных элементами группы F. Отметим, что $\tilde{\sigma} = \tau \times dt$, где σ и τ суть нормированные меры Хаара на группах G и K соответственно.

Пусть $M(X)$ – пространство всех конечных мер на X. Для $\tilde{\mu} \in M_F(X)$ мера $\frac{i-t}{i+t}\frac{1}{1+t^2}\tilde{\mu}(\alpha, t)$ принадлежит $M(X)$ и удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{2}\|\mu\|_G \leq \left\| \frac{i-t}{i+t}\frac{1}{1+t^2}\tilde{\mu} \right\|_X \leq 4\|\mu\|_G, \tag{2.1}$$

где $\|\cdot\|_G$ и $\|\cdot\|_X$ – нормы $M(G)$ и $M(X)$ соответственно. Пусть $H_F^1(X)$ – множество всех тех мер $\mu \in M_F(X)$, для которых $\frac{i-t}{i+t}\frac{1}{1+t^2}\tilde{\mu} \in H_0^1(X)$. Очевидно, $\tilde{\sigma} \in H_F^1(X)$. Следующая лемма устанавливает связь между $H_F^1(X)$ и пространством $A^\perp$ всех мер на G, ортогональных A.

Лемма 2.1. **Отображение $\mu \mapsto \bar{\mu}$ переводит $A^\perp$ в $H^1_F(X)$.**

Доказательство : Из (2.1) следует, что слабая* сходимость сети мер $\{\mu_j\} \subset M(G)$ к мере $\mu \in M(G)$ влечет слабую* сходимость сети мер $\left\{\frac{i-t}{i+t}\frac{1}{1+t^2}\bar{\mu}_j\right\} \subset M(X)$ к мере $\frac{i-t}{i+t}\frac{1}{1+t^2}\bar{\mu} \in M(X)$. Поэтому в силу a) — c), достаточно доказать лемму для тех мер $\mu \in A^\perp$, у которых спектр конечен. Пусть $\mu \in A^\perp$ и $\mathrm{Sp}(\mu)$ конечен. Имеем $\mu = f \cdot \sigma$, где $f = \sum_{k=1}^{m} c^f_{a_k}\chi^{a_k}$, $a_k > 0$. При каждом фиксированном $\alpha \in K$ функция $\bar{f}(\alpha, t) = f \circ p(\alpha, t)$ принадлежит H^1. Следовательно, $\bar{\mu} = \bar{f}(\alpha, t) \cdot \bar{\sigma} \in H^1_F(X)$. Лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2. **Пространство мер $\Pi^\perp_\Gamma(\mathbb{R})$ на $\mathbb{R}$, ортогональных $\Pi_\Gamma(\mathbb{R})$, совпадает с $H^1_0\frac{dt}{1+t^2}$.**

Доказательство : Пусть $\mu \in \Pi^\perp_\Gamma(\mathbb{R})$. Имеем

$$\int_{\mathbb{R}} e^{iat}\,d\mu = 0, \qquad a \in \Gamma_+. \tag{2.2}$$

Так как Γ не изоморфна $\mathbb{Z}$, то полугруппа Γ_+ плотна в $\mathbb{R}_+$. Поэтому из (2.2) следует, что $\int_{\mathbb{R}} e^{iat}\,d\mu = 0$ для $a \in \mathbb{R}_+$, т.е. преобразование Фурье меры μ равно нулю на $\mathbb{R}_+$. Поэтому $\mu \in H^1_0\frac{dt}{1+t^2}$ (см. [3], стр. 248). Лемма 2.2 доказана.

Следствие 2.3. Сужение $A^\perp$ на $\mathbb{R} \subset G$ есть $H^1_0\frac{dt}{1+t^2}$.

Доказательство : следует из равенства $A|_{\mathbb{R}} = \Pi_\Gamma(\mathbb{R})$.

Лемма 2.4. **Пусть $f(t) \in H^1$ является 1-периодической функцией на $\mathbb{R}$. Если для некоторого $a > 0$ функция $f(t)e^{-iat}$ принадлежит H^1, то $\int_0^1 f(t)dt = 0$.**

Доказательство : Функцию $f(t)$, удовлетворяющую условиям леммы для $t \in \mathbb{R}$, можно представить в виде формального ряда Фурье $f(t) \approx c^f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c^f_n e^{i2\pi nt}$, где $c^f_n = \int_0^1 f(t)e^{-i2\pi nt}dt$. Ряд Фурье функции $g(t) = f(t)e^{-iat}$ имеет вид

$$g(t) \approx c^f_0 e^{-iat} + \sum_{n=1}^{\infty} c^f_n e^{i(2\pi n - a)t}.$$

Если $g(t) \in H^1$, то $c^f_0 e^{-iat} \in H^1$. Это возможно лишь в случае, когда $c^f_0 = 0$. Лемма 2.4 доказана.

Следующая теорема является основным результатом данного параграфа.

Теорема 2.5. **Пусть $I_*^\perp$ – пространство всех мер на G, ортогональных I_*. Тогда $\mu \mapsto \bar{\mu}$ отображает $I_*^\perp$ на $H_F^1(X)$.**

Доказательство : Нормированная мера Хаара σ группы G является представляющей мерой для мультипликативного функционала на A, определенного по $*$ (см. [3], стр. 219). Поэтому $I_*^\perp = A^\perp + \mathbf{C}\sigma$ ($\dim A/I_* = 1$). Линейное отображение $\mu \mapsto \bar{\mu}$ переводит $A^\perp$ в $H_F^1(X)$ и $\sigma \mapsto \bar{\sigma} = \tau \times dt \in H_F^1(X)$. Следовательно, $\mu \mapsto \bar{\mu}$ отображает $I_*^\perp$ в $H_F^1(X)$.

Пусть теперь мера $\mu \in M(G)$ такова, что $\bar{\mu} \in H_F^1(X)$. Покажем, что $\mu \in I_*^\perp$. Пусть

$$\bar{\mu} = f(\alpha, t)\,\nu(\alpha) \times dt, \tag{2.3}$$

где $f_\alpha(t) = f(\alpha, t)$ принадлежит H^1 при почти каждом (относительно ν) фиксированном $\alpha \in K$. Тогда функция

$$f_a(t) = \int_K \chi^a(\alpha) f(\alpha, t)\, d\nu(\alpha) \tag{2.4}$$

принадлежит H^1 для всех $a \in \Gamma$. Мера $\bar{\mu}$ инвариантна относительно сдвигов, индуцированных элементами группы F. Поэтому

$$\bar{\mu} = f(\alpha \cdot \alpha_n, t - n)\,\nu(\alpha \cdot \alpha_n) \times dt, \qquad (\alpha_n, -n) \in F. \tag{2.5}$$

Сравнивая (2.3) и (2.5), получим $f(\alpha \cdot \alpha_n, t - n)\,\nu(\alpha \cdot \alpha_n) = f(\alpha, t)\,\nu(\alpha)$. Следовательно, $f(\alpha, t + n)\,\nu(\alpha) = f(\alpha \cdot \alpha_n, t)\,\nu(\alpha \cdot \alpha_n)$. Поэтому

$$\begin{aligned} f_a(t+n) &= \int_K \chi^a(\alpha)\, f(\alpha, t+n)\, d\nu(\alpha) = \int_K \chi^a(\alpha)\, f(\alpha \cdot \alpha_n, t)\, d\nu(\alpha \cdot \alpha_n) = \\ &= \int_K \chi^a(\alpha \cdot \alpha_{-n}) f(\alpha, t)\, d\nu(\alpha). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Так как $\chi^a(\alpha \cdot \alpha_{-n}) = \chi^a(\alpha) e^{-ian}$, то из (2.4) и (2.6) следует, что $f_a(t+n) = e^{-ian} f_a(t)$. Пусть $\varphi_a(t) = e^{iat} f_a(t)$. При $a > 0$ функции e^{iat} и $f_a(t)$ принадлежат H^1. Отсюда следует, что функция $\varphi_a(t)$ принадлежит H^1 и ее период равен 1. Применив Лемму 2.4 к $\varphi_a(t)$ получим $\int_0^1 \varphi_a(t)\, dt = 0$. Таким образом, для $a > 0$ имеем

$$\int_G \chi^a\, d\mu = \int_0^1 \left(\int_K \chi^a(\alpha) f(\alpha, t)\, d\nu(\alpha) \right) dt = \int_0^1 e^{iat} \cdot f_a(t)\, dt = \int_0^1 \varphi_a(t)\, dt = 0.$$

Следовательно $\mu \in I_*^\perp$. Теорема 2.5 доказана.

§3. ПРИМАРНЫЕ ИДЕАЛЫ В I_*

Пусть I – идеал алгебры A. Обозначим $\mathrm{hull}I$ оболочку идеала I, т.е. $\mathrm{hull}I = \{s \in \Delta : f(s) = 0, \forall f \in I\}$. В этом параграфе мы опишем все примарные идеалы алгебры A, оболочка которых совпадает с $\{*\}$. Все идеалы в этой работе мы считаем замкнутыми.

Определение 3.1. Идеал I алгебры A называется **правонепрерывным**, если множество $\bigcup\limits_{a\in\Gamma_+\setminus\{0\}} \chi^a \cdot I$ плотно в I. Идеал I называется **левонепрерывным**, если множество $\bigcap\limits_{a\in\Gamma_+\setminus\{0\}} \overline{\chi}^a \cdot I$ совпадает с I.

Рассмотрим типичные примеры идеалов алгебры A. Пусть $I_s = \{f \in A : f(s) = 0\}$, $I_* = \{f \in A : f(*) = 0\}$, $I_b^+ = \overline{\bigcup\limits_{a>b} \chi^a \cdot I_*}$ и $I_b^- = \bigcap\limits_{a<b} \chi^a \cdot I_*$ $(b \in \mathbb{R}_+)$.

Лемма 3.2. a) **Идеалы I_* и I_b^+ – правонепрерывные.**
b) **Идеал I_b^- – левонепрерывный.** c) **Если $b \in \Gamma_+$, то $I_b^+ = \chi^b \cdot I_*$ и $I_b^- = \chi^b \cdot A$.**

Доказательство : a) Если $f \in I_*$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная линейная комбинация $g = \sum\limits_{a>0} c_a^f \chi^a$ такая, что $\|f - g\| < \varepsilon$. Очевидно $g \in I_0^+$. Из замкнутости I_0^+ и произвольности $\varepsilon > 0$ следует, что $f \in I_0^+$. Отсюда получаем $I_0^+ = I_*$. Так как $\chi^a \cdot I_*$ – правонепрерывный идеал, то I_b^+ также правонепрерывный. Утверждение b) следует из Определения 3.1. Чтобы доказать c) заметим, что если $b \in \Gamma_+$, то $\chi^b \cdot I_* = \overline{\bigcup\limits_{a>0} \chi^{b+a} \cdot I_*} = \overline{\bigcup\limits_{a>b} \chi^a \cdot I_*} = I_b^+$. Аналогично доказывается равенство $I_b^- = \chi^b \cdot A$. Лемма 3.2 доказана.

Теорема 3.3. Пусть J – примарный идеал алгебры A, удовлетворяющий условию $\mathrm{hull}J = \{*\}$. Тогда найдется $b \in \mathbb{R}_+$ такое, что либо $J = I_b^-$, либо $J = I_b^+$.

Для доказательства Теоремы 3.3 нам понадобятся два утверждения из теории аналитических функций.

Пусть μ – положительная мера на $\mathbb{R}$, сингулярная относительно меры Лебега. Тогда $\exp\left[-i\int_{\mathbb{R}} \frac{tz+1}{z-t}\,d\mu(t)\right]$ является сингулярной внутренней функцией на D^*.

Как хорошо известно (см. [1]) функцию $f \in H^1$, $f \neq 0$, определенную на D, можно факторизавать

$$f(z) = c \cdot e^{i a_f z} \cdot B_f(z) \cdot \mathrm{sing}_f(z) \cdot F_f(z), \qquad |c| = 1, \tag{3.1}$$

где $a_f \geq 0$, $B_f(z)$ является произведением Бляшке, построенным по нулям функции $f(z)$, $\mathrm{sing}_f(z)$ – сингулярная внутренняя функция, а $F_f(z)$ – внешняя функция. Напомним также, что если f – непрерывная функция, то носитель сингулярной меры μ_f, определяющей $\mathrm{sing}_f(z)$, содержится в множестве нулей функции f на $\mathbb{R}$. В дальнейшем число a_f из (3.1) будет обозначаться через $S(f)$.

Лемма 3.4. Расширение функции $f \in \Pi_\Gamma(\mathbb{R})$ на D представимо в виде

$$f(z) = c \cdot e^{ia_f z} \cdot B_f(z) \cdot \mathrm{sing}_f(z) \cdot F_f(z), \qquad |c| = 1, \tag{3.2}$$

где $a_f = \inf \mathrm{Sp}(f) = S(f)$.

Доказательство : Так как $\Pi_\Gamma(\mathbb{R}) \subset H^1$, то в силу (3.1), достаточно показать, что $S(f) = \inf \mathrm{Sp}(f)$. Напомним одно свойство почти-периодических аналитических функций (см. [7], стр. 328) : функция $f(z)/e^{ibz}$ ограничена в верхней полуплоскости тогда и только тогда, когда $b \leq a_0 = \inf \mathrm{Sp}(f)$. Так как все функции в (3.2) ограничены в D (см. [1]), то $a_0 \geq a_f$. Функция $g(t) = f(t)/e^{ia_0 t}$ принадлежит $\Pi_\Gamma(\mathbb{R})$ и $0 \leq S(g) = a_f - a_0$. Поэтому $a_f \geq a_0$. Сравнивая два неравенства, получим $a_f = a_0$. Лемма 3.4 доказана.

Следствие 3.5. Для любой функции $f \in A$ функцию $\bar{f}(\alpha, t) = f \circ p(\alpha, t)$ можно представить на X в виде

$$\bar{f}(\alpha, t) = e^{iat} \cdot \chi^a(\alpha) \cdot g(\alpha, t), \tag{3.2'}$$

где $a = \inf \mathrm{Sp}(f)$, для каждого $\alpha \in K$ функция $g_\alpha(t) = g(\alpha, t)$ принадлежит H^1 и $S(g_\alpha) = 0$.

Доказательство : Для любого $\alpha \in K$ функция $\bar{f}_\alpha(t) = \bar{f}(\alpha, t)$ принадлежит $\Pi_\Gamma(\mathbb{R})$ и $\mathrm{Sp}(\bar{f}_\alpha) = \mathrm{Sp}(f)$ (см. §1). Поэтому $\mathrm{Sp}(\bar{f}_\alpha)$ не зависит от α. Применив Лемму 3.4 получим (3.2′).

Пусть $B_1(z)$ и $B_2(z)$ – произведения Бляшке на D. Тогда частное $B_1(z)/B_2(z)$ является произведением Бляшке тогда и только тогда, когда множество нулей (с учетом кратности) $B_2(z)$ содержится в множестве нулей $B_1(z)$. Пусть $\mathrm{sing}_1(z)$ и $\mathrm{sing}_2(z)$ – две сингулярные внутренние функции на D, а μ_1 и μ_2 суть положительные сингулярные меры на $\mathbb{R}$, порождающие $\mathrm{sing}_1(z)$ и $\mathrm{sing}_2(z)$, соответственно. Функция $\mathrm{sing}_1(z)/\mathrm{sing}_2(z)$ является внутренней функцией на D тогда и только тогда, когда разность $\mu_1 - \mu_2$ есть положительная мера на $\mathbb{R}$ (см. [1]).

Лемма 3.6. Пусть B' – такое подмножество в $B(D)$, что для любого $z \in D$ существует функция $f \in B'$, не равная нулю в точке z. Тогда если $u(t) \in L^\infty(dt)$ – унимодулярная функция ($|u(t)| = 1$ почти всюду) и $f(t)u(t) \in H^1$ для всех $f(t) \in B'(\mathbb{R}) = B'|_{\mathbb{R}}$, то найдется $a \in \mathbb{R}$ такое, что для $u'(t) = e^{-iat}u(t)$ будем иметь $u' \in H^1$ и $S(u') = 0$.

Доказательство : Пусть $f \in B'$, $f \neq 0$. Факторизуя функции f и $fu \in H^1$, продолжим u на D до мероморфной функции

$$u(z) = e^{iaz}\frac{B_1(z)\mathrm{sing}_1(z)}{B_2(z)\mathrm{sing}_2(z)}, \tag{3.3}$$

где

$$a = S(fu) - S(f), \qquad \frac{B_1(z)}{B_2(z)} = \frac{B_{fu}(z)}{B_f(z)}, \qquad \frac{\mathrm{sing}_1(z)}{\mathrm{sing}_2(z)} = \frac{\mathrm{sing}_{fu}(z)}{\mathrm{sing}_f(z)}. \tag{3.4}$$

При этом предполагается, что $\dfrac{B_1(z)}{B_2(z)}$ и $\dfrac{\mathrm{sing}_1(z)}{\mathrm{sing}_2(z)}$ суть несократимые дроби, т.е. $B_1(z)$ и $B_2(z)$ не имеют общих нулей, а меры μ_1 и μ_2, определяющие $\mathrm{sing}_1(z)$ и $\mathrm{sing}_2(z)$, соответственно, взаимно сингулярны. Покажем, что $B_2(z) = \mathrm{sing}_2(z) = 1$. Допустим противное : пусть $B_2(z) \neq 1$, т.е. $B_2(z_0) = 0$ для некоторого $z_0 \in D^\circ$. Пусть $g \in B'$ и $g(z_0) \neq 0$. Тогда функция $B_g(z)/B_2(z)$ не является произведением Бляшке. Поэтому $gu \notin H^1$, т.е. приходим к противоречию. Предположим теперь, что $\mathrm{sing}_2(z) \neq 1$ и $t_0 \in \mathrm{supp}\mu_2$. Пусть $g \in B'$, $g(t_0) \neq 0$. Тогда имеем $t_0 \notin \mathrm{supp}\mu_g$, где μ_g – мера, определяющая $\mathrm{sing}_g(z)$. Поэтому $\mathrm{sing}_g(z)/\mathrm{sing}_2(z)$ не будет сингулярной внутренней функцией. Следовательно, $gu \notin H^1$. Таким образом, $B_2(z) = \mathrm{sing}_2(z) = 1$. Отсюда заключаем, что $u'(t) \in H^1$ и $S(u') = 0$, где $u'(t) = e^{-iat}u(t)$. Лемма 3.6 доказана.

Следствие 3.7. Пусть $h \in L^1\left(\mathbb{R}, \dfrac{dt}{1+t^2}\right)$, $h \neq 0$. Предположим, что $f(t)h(t) \in H^1$ для всех $f \in B'$. Тогда

$$h(t) = h'(t)e^{iat}, \tag{3.5}$$

где $h'(t) \in H^1$ и $S(h') = 0$.

Доказательство : Известно (см. [1], стр. 189), что положительная функция $g \in L^1\left(\mathbb{R}, \dfrac{dt}{1+t^2}\right)$ является модулем некоторой функции из H^1 тогда и только тогда, когда $\int_{\mathbb{R}} \log g(t)\, \dfrac{dt}{1+t^2} > -\infty$. Для $f \in B'$, $f \neq 0$ имеем

$$-\infty < \int_{\mathbb{R}} \log|f(t)h(t)|\,\frac{dt}{1+t^2} = \int_{\mathbb{R}} \log|f(t)|\,\frac{dt}{1+t^2} + \int_{\mathbb{R}} \log|h(t)|\,\frac{dt}{1+t^2}.$$

Так как первый интеграл в правой части последнего равенства конечен, то второй интеграл также конечен. Поэтому найдется внешняя функция $F \in H^1$ такая, что $|F(t)| = |h(t)|$ для почти всех $t \in \mathbb{R}$. Тогда $h(t) = F(t)u(t)$, где $u(t)$ – унимодулярная функция, удовлетворяющая условиям Леммы 3.6. Следствие 3.7 доказано.

Следствие 3.8. Число a в (3.5) удовлетворяет неравенству $-a \le S(B') = \inf_{f \in B'} S(f)$. В частности, $h \in H^1$ при $S(B') = 0$.

Доказательство : Так как $S(h') = 0$ и $f(t)h'(t)e^{iat} \in H^1$ для $f \in B'$, то из (3.1) следует, что $a_f + a \ge 0$. Поэтому $a_f \ge -a$ для каждой функции $f \in B'$, $f \ne 0$. Следствие 3.8 доказано.

В дальнейшем для любого идеала J алгебры A число $\inf_{f \in J, f \ne 0} \inf \mathrm{Sp}(f)$ будем обозначать либо через a_J, либо $S(J)$.

Доказательство Теоремы 3.3 : Пусть J – такой примарный идеал алгебры A, что $\mathrm{hull}J = \{*\}$. Пусть $f \in J$, $f \ne 0$ и $\mu \in J^\perp$. Мера $f \cdot \mu$ принадлежит $I_*^\perp$. Тогда по Теореме 2.5 получаем $\overline{f \cdot \mu} = (f \cdot \mu) \circ p \in H_F^1(X)$. Следовательно, мера $\overline{f \cdot \mu}$ имеет вид

$$\overline{f \cdot \mu}(\alpha, t) = h^f(\alpha, t) \cdot \nu(\alpha) \times dt, \tag{3.6}$$

где функция $h_\alpha^f(t) = h^f(\alpha, t)$ принадлежит H^1 для почти каждого (относительно меры $\nu(\alpha)$) фиксированного $\alpha \in K$. Так как $\overline{f \cdot \mu} = \bar f \cdot \bar\mu$ ($\bar f = f \circ p$, $\bar\mu = \mu \circ p$) получаем $\bar\mu(\alpha, t) = h(\alpha, t) \cdot \nu(\alpha) \times dt$, где $h(\alpha, t) = h^f(\alpha, t)/\bar f(\alpha, t)$. Положим $h_\alpha(t) = h(\alpha, t)$ и $\bar f_\alpha(t) = \bar f(\alpha, t)$. Из (3.6) следует, что для всех $f \in J$ и почти всех α (относительно ν) имеем

$$f_\alpha h_\alpha \in H^1. \tag{3.7}$$

Так как $p(Y) = \Delta \setminus \{*\}$ и $\mathrm{hull}J = \{*\}$, сужение $\bar J = \{f \circ p : f \in J\}$ на $D_\alpha = \{\alpha\} \times D$ при каждом фиксированном α удовлетворяет утверждению Леммы 3.6. Применив Следствие 3.7 к (3.7) получим $h_\alpha(t) = h'_\alpha(t)e^{ia_\alpha t}$, где $h'_\alpha \in H^1$ и $S(h'_\alpha) = 0$ для почти всех α. Согласно Следствию 3.8, $S(\bar f_\alpha) \ge -a_\alpha$ для почти всех α. Так как $S(\bar f_\alpha) = \inf \mathrm{Sp}(f)$ не зависит от $\alpha \in K$, то $a_J \ge -a_\alpha$ для почти всех α. Следовательно, $\bar\mu(\alpha, t) = h'(\alpha, t)e^{ia_\alpha t} \cdot \nu(\alpha) \times dt$, где $h'(\alpha, t) = h'_\alpha(t) \in H^1$ и $a_J \ge -a_\alpha$ для почти всех $\alpha \in K$ относительно меры ν. Таким образом, из $a > a_J$ следует $a + a_\alpha > 0$, и следовательно, мера $\bar\mu^a(\alpha, t) = \chi^a(\alpha)e^{iat} \cdot \bar\mu(\alpha, t)$ принадлежит $H_F^1(X)$, т.е. $\mu^a = \chi^a \cdot \mu$ принадлежит $I_*^\perp$. Пусть $b > a_J$. Так как

Γ плотно в $\mathbb{R}$, то существуют $c, a \in \Gamma_+ \setminus \{0\}$ такие, что $b = a + c$, $a > a_J$. Так как $\mu^a \in I_*^{\perp}$, то имеем $0 = \int_G \chi^c d\mu^a = \int_G \chi^b\, d\mu$. Так как $\mu \in J^{\perp}$ произвольно, то $\chi^b \in J$ и $I_{a_J}^+ \subset J$. Для завершения доказательства теоремы рассмотрим два случая :

1) для любого $f \in J$ число a_J не содержится в $\mathrm{Sp}(f)$;

2) существует функция $f \in J$ такая, что $a_J \in \mathrm{Sp}(f)$.

Случай 1). Для заданных $f \in J$ и $\varepsilon > 0$, выберем $g \in A$ так, чтобы $g = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi^{a_i}$, $\mathrm{Sp}(g) \subset \mathrm{Sp}(f)$ и $\|f - g\|_G < \varepsilon$. Существование функции g следует из равномерной сходимости сумм Бохнера–Фейера к f (см. [7], стр. 66). Так как $a_i \in \mathrm{Sp}(f)$ $(1 \leq i \leq n)$, то $a_i > a_J$. Поэтому $\chi^{a_i} \in I_{a_J}^+$. Отсюда $g \in I_{a_J}^+$. Из замкнутости $I_{a_J}^+$ и произвольности $\varepsilon > 0$ получаем $f \in I_{a_J}^+$. Таким образом, $J = I_{a_J}^+$.

Случай 2). Пусть $f \in J$ такая, что $a_J \in \mathrm{Sp}(f)$. Покажем, что $J = \chi^{a_J} \cdot A$. Так как $a_J \in \mathrm{Sp}(f)$ и $a_J = \inf \mathrm{Sp}(f)$, то по теореме Безиковича (см. [4]) получаем $f = \chi^{a_J} g$, где $g \in A$, $g(*) \neq 0$. Рассмотрим идеал $J' = g \cdot A + J$ алгебры A. Поскольку $\mathrm{hull} J = \{*\}$ и $g(*) \neq 0$, то идеал J' совпадает с A (см. [3], стр. 13). Поэтому найдутся $h \in A$ и $\varphi \in J$ такие, что $gh + \varphi = e$, где e – единица алгебры A. Умножая последнее равенство на χ^{a_J}, получим $f \cdot h + \chi^{a_J} \cdot \varphi = \chi^{a_J}$. Так как функции f и φ из J, то $\chi^{a_J} \in J$, $\chi^{a_J} \cdot A \subset J$. Пусть $g \in J$. Из неравенства $a_J \leq \inf \mathrm{Sp}(g)$ следует $g / \chi^{a_J} \in A$ (см. [4]). Отсюда $g \in \chi^{a_J} \cdot A$, т.е. $J \subset \chi^{a_J} \cdot A$. Поэтому $\chi^{a_J} \cdot A = J$. Теорема 3.3 доказана.

Теорема 3.9. Пусть $\Gamma = \mathbb{R}$. Тогда для примарного идеала J алгебры A, удовлетворяющего условию $\mathrm{hull} J = \{*\}$, имеем либо $J = \chi^{a_J} \cdot I_*$, либо $J = \chi^{a_J} \cdot A$.

Доказательство : следует из Леммы 3.2 с) и Теоремы 3.3.

§4. ПРИМАРНЫЕ ИДЕАЛЫ, СОДЕРЖАЩИЕСЯ В I_s, $s \in \mathrm{int}\Delta^\circ$

В этом параграфе мы опишем примарные идеалы алгебры A, оболочка которых принадлежит множеству $\mathrm{int}\Delta^\circ = \Delta \setminus G$.

Ограничения накрытия $p: Y \to \Delta$ на $\{\alpha_0\} \times D$ порождает вложение верхней полуплоскости D в Δ. Поэтому будем предполагать, что $D \subset \Delta$. Пусть J – примарный идеал алгебры A, $\{z_0\} = \mathrm{hull} J \subset \mathrm{int}\Delta$ и J - образ J на Δ. Не теряя общности предположим, что $z_0 \in D^\circ \subset \Delta$, $D^\circ = D \setminus \mathbb{R}$. Сужение J на D, которое будем обозначать через $J(D)$, является подалгеброй алгебры $B(D)$. Пусть $\mathrm{ord} f(z_0)$ – порядок нуля функции $f \in J(D)$ в точке z_0. Положим

$\operatorname{ord} J(z_0) = \inf_{f \in J(D)} \operatorname{ord} f(z_0)$.

Лемма 4.1. Пусть $J^\perp(\mathbb{R})$ – пространство мер на $\mathbb{R} \subset G$, ортогональных J. Тогда $J^\perp(\mathbb{R}) = H_0^1 \cdot (\bar{b}(t))^n \cdot \dfrac{dt}{1+t^2}$, где $n = \operatorname{ord} J(z_0)$, $\bar{b}(t) = \dfrac{t - \bar{z}_0}{t - z_0}$.

Доказательство : Если $f \in J(D)$, то $f(z) = \left(\dfrac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}\right)^n f_0(z)$, где $f_0 \in B(D)$. Поэтому множество $J_0(D) = \bar{b}^n(z) \cdot J(D)$ является подпространством пространства $B(D)$. Из определения числа n следует, что для каждой точки $z \in D$ существует не равная нулю в точке z функция $f \in J_0(D)$. Следовательно, к $J_0(D)$ применима Лемма 3.6. Так как $* \notin \operatorname{hull} J$, то $S(J) = 0$. Поскольку $S(J) = S(J_0)$, то имеем $S(J_0) = 0$. Применив теперь Лемму 3.6 и Следствие 3.7 к $J_0(\mathbb{R}) = J_0(D)|_{\mathbb{R}}$ получим $J_0^\perp(\mathbb{R}) = H_0^1 \dfrac{dt}{1+t^2}$. Так как $J^\perp(\mathbb{R}) = \bar{b}^n(t) \cdot J_0^\perp(\mathbb{R})$, то $J^\perp(\mathbb{R}) = \bar{b}^n(t) \cdot H_0^1 \dfrac{dt}{1+t^2}$. Лемма 4.1 доказана.

Лемма 4.2. Пусть $\mu \in J^\perp$ – такая мера из $M(G)$, что $\mu|_{\mathbb{R}} = 0$. Тогда $\mu \in A^\perp$.

Доказательство : Пусть $E = \{x \in X : p(x) \in \mathbb{R}\}$. Легко проверить, что $E = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \{\alpha_n\} \times \mathbb{R}$. Пусть $\bar{\mu} \in M_F(X)$ – мера на X, соответствующая мере μ и $\bar{\mu}|_E = 0$. Для $f \in J$ мера $f \cdot \mu$ принадлежит $A^\perp$. Отсюда $f \cdot \mu = h^J(\alpha, t) \cdot \nu(\alpha) \times dt \in H_F^1(X)$. Полагая $h = h^J / \bar{f}$, получим $\bar{\mu} = h(\alpha, t) \cdot \nu(\alpha) \times dt$. Покажем, что $\bar{\mu} \in H_F^1(X)$. Из (4.1) следует, что $\nu(E) = 0$. Поэтому для почти всех $\alpha \in K$ относительно меры ν, сужение J_α пространства $\{\bar{f}(\alpha, z) = f \circ p(\alpha, z) : f \in J\}$ на $D_\alpha = \{\alpha\} \times D$ не обращается в нуль ни в одной точке множества D_α и $S(J_\alpha) = S(J) = 0$. Используя рассуждения, примененные при доказательстве Теоремы 3.3, легко показать, что $h_\alpha(t) = h(\alpha, t) \in H^1$ для почти всех $\alpha \in K$, т.е., $\bar{\mu} \in H_F^1(X)$. Отсюда следует, что $\mu \in I_*^\perp$. Теперь покажем, что $\mu \in A^\perp$. Так как $I_*^\perp = A^\perp + \mathbb{C}\sigma$, то $\mu = \mu' + c\sigma$. Пусть $f \in J$ и $f(*) \neq 0$. Имеем $0 = \int_G f\,d\mu = \int_G f\,d\mu' + cf(*)$. Так как $\int_G f\,d\mu' = 0$, то $c = 0$, и следовательно, $\mu = \mu'$. Лемма 4.2 доказана.

Лемма 4.3. $J^\perp = A^\perp + J^\perp(\mathbb{R})$.

Доказательство : Так как $J^\perp(\mathbb{R}) \subset J^\perp$ и $A^\perp \subset J^\perp$, то имеем $J^\perp \supset A^\perp + J^\perp(\mathbb{R})$. Для того, чтобы доказать обратное включение положим $\mu \in J^\perp$, $\mu' = \mu|_{\mathbb{R}}$ и $f \in J$. Так как $f \cdot \mu \in A^\perp$, то $f \cdot \mu \in H_F^1(X)$. Следовательно, $\mu = h(\alpha, t) \cdot \nu(\alpha) \times dt$ и $f_\alpha(t) h_\alpha(t) \in H^1$ для почти всех $\alpha \in K$ относительно меры ν (см. (3.7)).

Мера $\tilde{\mu}'$ сосредоточена на $E = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \{\alpha_n\} \times \mathbb{R}$ и $\tilde{\mu}' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(\alpha_n, t) \cdot \nu(\alpha_n) \times dt$. Поэтому мера $\tilde{\gamma}$ $(\gamma = \mu - \mu')$ удовлетворяет $\tilde{\gamma} = h(\alpha, t) \cdot \nu_0(\alpha) \times dt$, где $\nu_0(\alpha) = \nu - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \nu_0(\alpha_n) \cdot \delta_n$ и δ_n - мера Дирака, сосредоточенная в $\alpha_n \in K$. Для почти всех $\alpha \in K$ относительно меры ν_0 сужение J_α пространства $\{f(\alpha, z) = f \circ p(\alpha, z) \colon f \in J\}$ на $D_\alpha = \{\alpha\} \times D$ не обращается в нуль ни в одной точке этого множества и $S(J_\alpha) = 0$. Используя рассуждения, примененные при доказательстве Леммы 4.2, получим $\tilde{\gamma} \in H_F^1(X)$. Следовательно $\gamma \in I_\bullet^\perp$.

Пусть $\gamma' \in A^\perp$ - такая мера, что $\gamma = c\sigma + \gamma'$. Покажем, что $c = 0$. Имеем $\mu = c\sigma + \gamma' + \mu'$. Полагая $\mu_0 = \mu - \gamma'$, получим $\mu_0 = c\sigma + \mu'$. Так как $A^\perp \subset J^\perp$, то $\mu_0 \in J^\perp$. Далее, $\tilde{\sigma} = \tau \times dt$, где τ - нормированная мера Хаара на группе K (см. §2). Поскольку K - бесконечная компактная группа, то $\tau(\alpha) = 0$ для всех $\alpha \in K$. Отсюда следует $\tilde{\sigma}(E) = 0$. Следовательно $\sigma(\mathbb{R}) = 0$, $\mathbb{R} \subset G$. Поэтому меры σ и μ' взаимно сингулярны. Так как мера σ является единственной представляющей мерой для $* \in \Delta$ (см. §1 и [3], стр. 219), то по Теореме 7.7 из [3] имеем $c\sigma \in J^\perp$. Если $f \in J$ и $f(*) \neq 0$, то $0 = c\int_G f\, d\sigma = cf(*)$. Следовательно $c = 0$. Отсюда имеем $\mu' \in J^\perp(\mathbb{R})$. Лемма 4.3 доказана.

Отметим, что в Лемме 4.3 сумма не прямая. Покажем, что пространство $J^\perp(\mathbb{R})$ имеет прямое дополнение в $A^\perp$. Для этого заметим, что если $\mu \in A^\perp$, то $\mu' = \mu|_{\mathbb{R}} \in H_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \subset A^\perp$ (см. §1). Следовательно $\mu = \mu_0 + \mu'$ и $\mu'|_{\mathbb{R}} = 0$. Отсюда следует, что $A^\perp = A_0^\perp \oplus H_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$, где $A_0^\perp = \{\mu_0 \colon \mu \in A^\perp\}$. Так как $J^\perp(\mathbb{R}) \supset H_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$, то $J^\perp = A^\perp + J^\perp(\mathbb{R}) = A_0^\perp \oplus J^\perp(\mathbb{R})$.

Теорема 4.4. **Пусть $b(\alpha)$ - унимодулярная борелевская функция на G вида**

$$b(\alpha) = \begin{cases} b(t), & \text{если} \quad \alpha = t \in \mathbb{R} \subset G \\ 1, & \text{если} \quad \alpha \notin \mathbb{R}. \end{cases}$$

Тогда $J^\perp = \overline{b}^n \cdot A^\perp$.

Доказательство : Имеем $J^\perp = A_0^\perp + \overline{b}^n \cdot H_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \overline{b}^n \left(b^n \cdot A_0^\perp \oplus H_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \right) = \overline{b}^n \cdot A^\perp$, поскольку что $b^n \cdot A_0^\perp = A_0^\perp$. Теорема 4.4 доказана.

Пусть $I_n = \{f \in A \colon \operatorname{ord} f(z_0) \geq n\}$. Очевидно, $J \subset I_n$. Следующая Теорема показывает, что обратное утверждение также справедливо.

Теорема 4.5. $J = I_n$.

Доказательство : Из замечания следует, что достаточно показать включение $I_n \subset J$, или эквивалентно, $I_n^\perp \supset J^\perp$. Если $f \in I_n$, то $f(t) = b^n(t) f_0(t)$,

$f_0(t) \in B(\mathbb{R})$. Поэтому $\overline{b}^n \cdot H_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \subset I_n^\perp$. Отсюда следует, что $J^\perp(\mathbb{R}) \subset I_n^\perp$. Очевидно, $A^\perp \subset I_n^\perp$. Поэтому из $I_n^\perp \supset J^\perp(\mathbb{R}) + A^\perp = J^\perp$ получаем $I_n \subset J$. Теорема 4.5 доказана.

Таким образом, мы показали, что каждый примарный идеал в A, оболочка которого содержится в $\mathrm{int}\Delta^\circ$, однозначно определяется некоторым числом n.

Следствие 4.6. Пусть I – примарный идеал алгебры A. Предположим, что $\mathrm{hull}I \in \mathrm{int}\Delta^\circ$. Тогда $\mathrm{codim}_A I < \infty$.

Доказательство : Пусть $f \in A$ – такая функция, что $\mathrm{ord}f(z_0) = n-1$. Тогда идеал $I_{n-1} = \{f \in A: \mathrm{ord}f(z_0) \geq n-1\}$ совпадает с $\mathbf{C}f + I$. Аналогично, $I_{n-2} = \mathbf{C}g + \mathbf{C}f + I_n$, где $\mathrm{ord}g(z_0) = n-2$. Продолжая этот процесс, получим $A = \mathbf{C}f_0 + \mathbf{C}f_1 + \cdots \mathbf{C}f_{n-1} + I$, $I = I_n$, где $\mathrm{ord}f_k(z_0) = k$. Следствие 4.6 доказано.

Для сравнения напомним, что каждый примарный идеал J диск-алгебры (см. [1]) оболочка которого есть $\{z_0\}$, $|z_0| < 1$, представляется в виде $J = b^n \cdot A$, где $b(z) = \frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}$.

§5. ПРИМАРНЫЕ ИДЕАЛЫ, СОДЕРЖАЩИЕСЯ В I_α, $\alpha \in G$

Пусть $\mathrm{sing}_f(t)$ – сингулярная компонента функции $f \in H^1$, и пусть μ_f – положительная сингулярная мера на $\mathbb{R}$, определяющая функцию $\mathrm{sing}_f(t)$. Эту меру можно однозначно представить в виде суммы $\mu_f = \mu'_f + \beta_f\delta_0$ двух сингулярных мер, где δ_0 – мера Дирака в точке $0 \in \mathbb{R}$. Поэтому $\mathrm{sing}_f(t) = \mathrm{sing}_f^+(t)\,\mathrm{sing}_f^-(t)$, где $\mathrm{sing}_f^+(t)$ и $\mathrm{sing}_f^-(t)$ суть сингулярные внутренние функции для мер μ'_f и $\beta_f\delta_0$, соответственно. Отметим, что $\mathrm{sing}_f^-(t) = \exp[-i\beta_f t^{-1}]$.

Пусть J – примарный идеал алгебры A, удовлетворяющий $\mathrm{hull}J = \{0\} \subset \mathbb{R} \subset G$. Обозначим через $J(\mathbb{R})$ сужение J на $\mathbb{R}$. Пусть $h \in L^1\left(\frac{dt}{1+t^2}\right)$, $h \notin H^1$ – такая функция, что $fh \in H^1$ для всех $f \in J(\mathbb{R})$. Тогда воспользовавшись рассуждениями, аналогичными тем, которыми пользовались при доказательстве Леммы 3.6 и Следствий 3.7, 3.8, можно показать, что

$$h(t) = k(t)\exp[i\beta_h t^{-1}], \tag{5.1}$$

где $\beta_h > 0$, $k(t) \in H^1$ и $\mathrm{sing}_k^-(t) = 1$. При этом $\beta_h \leq \inf_{f \in J} \beta_f$.

Для $\beta \geq 0$ положим $M_\beta = H_0^1 \exp[i\beta t^{-1}] \frac{dt}{1+t^2}$. Так как $H_0^1 \exp[-i\beta' t^{-1}] \subset H_0^1$ для $\beta' \geq 0$, то $M_\beta \supset M_\beta \exp[-i\beta' t^{-1}] = M_{\beta-\beta'}$ для $0 \leq \beta' \leq \beta$. Отсюда $M_\beta \supset M_{\beta'}$, если $\beta \geq \beta' \geq 0$.

Теорема 5.1. Пусть J – примарный идеал алгебры A и $\mathrm{hull}J = \{0\}$. Тогда существует такое $\beta \geq 0$, что $J^\perp = A^\perp + \mathbf{C}\delta_0 + M_\beta$.

Доказательство : Доказательство теоремы разобьем на несколько шагов.

Шаг 1. Пусть мера $\mu \in J^\perp(\mathbb{R})$ сингулярна относительно меры Лебега на $\mathbb{R}$. Покажем, что $\mu \in \mathbf{C}\delta_0$. Действительно, в противном случае найдется точка $t_0 \in \mathbb{R}$, $t_0 \neq 0$, принадлежащая носителю меры μ. Пусть функция $f \in J$ не обращается в нуль в точке t_0. Тогда $f \cdot \mu$ – ненулевая мера из $A^\perp(\mathbb{R})$, сингулярная относительно меры Лебега. С другой стороны, из Леммы 2.2 имеем $f \cdot \mu \in H_0^1 \dfrac{dt}{1+t^2}$. Из этого противоречия следует $\mu = c\,\delta_0$.

Шаг 2. Пусть мера $\mu \in J^\perp(\mathbb{R})$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, т.е. $\mu = h(t)\dfrac{dt}{1+t^2}$, $h(t) \in L^1\left(\dfrac{dt}{1+t^2}\right)$. Для $f \in J$ имеем $f \cdot \mu \in H_0^1 \dfrac{dt}{1+t^2}$. Отсюда следует, что $f \cdot h \in H_0^1$. Из (5.1) имеем

$$h(t) = k(t)\exp[i\beta t^{-1}], \qquad \beta \leq \inf_{f \in J(\mathbb{R})} \beta_f. \tag{5.2}$$

Покажем, что $k(t) \in H_0^1$. Для каждого $f \in J(\mathbb{R})$ имеем $0 = \int_{\mathbb{R}} f(t)h(t)\dfrac{dt}{1+t^2} = f(i)k(i)\exp[\beta]$. Выбирая f так, что $f(i) \neq 0$, получаем $k(i) = 0$, т.е. $k \in H_0^1$. Следовательно $\mu \in M_\beta$.

Шаг 3. Пусть теперь μ – произвольная мера из $J^\perp$. Положим $\mu_1 = \mu|_{\mathbb{R}}$. Так как $f \cdot \mu \in A^\perp$ для $f \in J$, из Следствия 2.3 получаем $f \cdot \mu_1 \in A^\perp|_{\mathbb{R}} = H_0^1 \dfrac{dt}{1+t^2}$. Следовательно $\int_{\mathbb{R}} f\, d\mu_1 = 0$. Отсюда следует $\mu_1 \in J^\perp(\mathbb{R})$. Комбинируя Шаги 1 и 2, получаем $\mu_1 = c\delta_0 + \exp[i\beta t^{-1}]k(t)\dfrac{dt}{1+t^2}$, где $k \in H_0^1$, $\beta \leq \inf\limits_{f \in J(\mathbb{R})} \beta_f$. Воспользовавшись рассуждениями, аналогичными тем, которыми пользовались при доказательстве Леммы 4.2, можно показать, что мера $\zeta = \mu - \mu_1$ принадлежит $A^\perp$. Следовательно $\mu \in A^\perp + \mathbf{C}\delta_0 + M_{\beta_0}$, где $\beta_0 = \inf\limits_{f \in J(\mathbb{R})} \beta_f$, $(M_\beta \subset M_{\beta_0})$. Отсюда получаем $J^\perp \subset A^\perp + \mathbf{C}\delta_0 + M_{\beta_0}$.

Шаг 4. Покажем, что $M_{\beta_0} \subset J^\perp$. Пусть $\mu \in M_{\beta_0}$ и $f \in J$. Функцию f на $\mathbb{R}$ можно представить в виде $f(t) = f'(t)\exp[-i\beta_0 t^{-1}]$, где $f' \in H_0^1$. Аналогично $\mu = \exp[i\beta_0 t^{-1}]h(t)\dfrac{dt}{1+t^2}$, где $h \in H_0^1$. Следовательно $f \cdot \mu \in H_0^1 \dfrac{dt}{1+t^2}$. Отсюда вытекает, что $M_{\beta_0} \subset J^\perp$. Следовательно, $J^\perp = A^\perp + \mathbf{C}\delta_0 + M_{\beta_0}$. Доказательство завершено.

§6. ПРИМЕР

Пусть Γ – двумерная целочисленная решетка. Группа характеров группы Γ есть двумерный тор G в $\mathbf{C}^2$. Зафиксируем иррациональное число $\beta > 0$ и положим

$\Gamma_+ = \{(n,m) \in \Gamma : \beta n + m \geq 0\}$. Обозначим через A_β равномерную алгебру на G, порожденную характерами χ^a, $a \in \Gamma_+$. Алгебра A_β является одним из примеров алгебры обобщенных аналитических функций. Эта алгебра содержит как подалгебру, алгебру всех непрерывных функций на торе, обладающих непрерывным аналитическим продолжением в бицилиндр. Этим и можно объяснить некоторый интерес к алгебре A_β (см. [3], стр. 222). Алгебру A_β можно получить иным способом. Пусть $\Delta = \left\{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 : |z_1| \leq 1, |z_1| = |z_2|^\beta\right\}$. Множество $\Delta^\circ = \Delta \setminus (G \cup \{(0,0)\})$ является трехмерным многообразием с одномерной комплексной структурой (CR-многообразие). Пусть $\hat{A}_\beta$ - множество тех непрерывных функций на Δ, которые являются CR-функциями на Δ° (см. [8]). Можно показать, что сужение $\hat{A}_\beta$ на G есть A_β. Компакт Δ есть пространство максимальных идеалов алгебры A_β. Преобразование Гельфанда алгебры A_β совпадает с $\hat{A}_\beta$.

ABSTRACT. The paper studies algebras of generalized analytic (by Arens–Singer) functions. Essentially, they are uniform algebras on compact Abelian groups generated by the semigroup of characters specifying complete Archimedian order on dual group. Examples : algebra of all continuous functions on unit circle having continuous analytic extension to unit disk in the complex plane and the algebra of all continuous almost-periodic functions in the real axis admitting continuous analytic almost-periodic extension to the upper half-plane. The paper describes primary ideals of such algebras and explicitly presents measures orthogonal to the algebras of generalized analytic functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Гофман, Банаховы Пространства Аналитических Функций, Москва, ИЛ, 1963.
2. R. Arens, I. Singer, "Generalized analytic functions", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 7, pp. 203 — 210, 1956.
3. Т. Гамелин, Равномерные Алгебры, Москва, Мир, 1974.
4. С. А. Григорян, "Обобщенные мероморфные функции", Изв. РАН, Сер. Матем., том 57, № 1, стр. 147 — 166, 1993.
5. T. Tonev, Big-planes, Boundaries and Function Algebras, North-Holland, Amsterdam, 1992.
6. F. Forelli, "Analytic measures", Pacific J. Math., vol. 13, pp. 571 — 578, 1963.
7. Б. Н. Левитан, Почти-Периодические Функции, ГИТТЛ, Москва, 1953
8. Е. М. Чирка, "Введение в теорию CR-многообразий", УМН, том 46, № 1, стр. 81 — 163, 1991.

13 Декабря 1998

Институт математики
Национальной Академии Наук Армении,
Казанский энергетический институт,
E-mail : suren.Grigorian@ksu.ru