

ТЕОРЕМА О ТРЕХ СФЕРАХ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Н. У. Аракелян, Н. Г. Матевосян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 34, № 3, 1999

В статье получен аналог теоремы о трех сферах для функций, гармонических в единичном шаре $B^n \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ в случае не концентрических, но в некотором смысле коррелированных сфер. Результатом является соотношение логарифмической выпуклости для взвешенных сферических L^2 -норм гармонических функций. В случае голоморфных в круге из $\mathbb{R}^2$ функций этот результат обобщается на взвешенные L^p -нормы ($p > 0$).

§0. ВВЕДЕНИЕ

Известная теорема Адамара о трех окружностях была прототипом теоремы о двух константах. Последняя теорема нашла много применений в теории комплексных функций, в частности в вопросах, связанных с принципом Фрагмена-Линделефа или с задачами единственности. Среди обобщений результата Адамара отметим теоремы о трех сферах для решений эллиптических уравнений (Ландис [1] для L^2 -нормы, и Агмон [2] для L^∞ -нормы), а также теоремы, содержащиеся в недавней статье Брумелхуиса [3]. Случай гармонических функций был рассмотрен Коревааром [4] и Коревааром и Мейелсом [5]. Ранее этот случай был рассмотрен в работе Соломенцева [6], где теорема о трех сферах получена в несколько другой форме.

Несколько аналогов теоремы Адамара о трех сферах были получены в [7] для гармонических функций $n \geq 2$ переменных и для трех возможно не концентрических шаров (вместо сфер) с взвешенной L^2 -нормой; см. Теоремы 1-2 в [7]). Они нашли применения в задачах о "передаче малости" и единственности. Целью настоящей работы является получение прямого аналога теоремы Адамара для гармонических функций для взвешенной L^2 -нормы, в случае $((n-1)$ -мерных) неконцентрических сфер в $\mathbb{R}^n$. Основным результатом с

полным доказательством приведен в параграфе 3, после необходимой подготовки в параграфах 1 и 2.

§1. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ИНТЕГРАЛОВ

Для собственной подобласти Ω из $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) положим $d(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$ и рассмотрим ассоциированное множество

$$\Omega^* = \{(x, r) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \Omega, r \in (0, d(x))\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Очевидно, Ω^* является открытым множеством в $\mathbb{R}^{n+1}$ и можно доказать, что оно связно, т.е. является областью. Рассмотрим для этого произвольные точки $(x_1, r_1), (x_2, r_2) \in \Omega^*$. Соединим точки $x_1, x_2 \in \Omega$ жордановой кривой $\gamma \subset \Omega$. Существует число $r > 0$, $r < \min\{r_1, r_2\}$ такое, что $d(x) > r$ для всех $x \in \gamma$. Тогда $\gamma \times \{r\} \subset \Omega^*$ и объединение связных множеств $\gamma \times \{r\}$, $\{x_1\} \times [r, r_1]$, $\{x_2\} \times [r, r_2]$ является связным подмножеством множества Ω^* , соединяющим точки (x_1, r_1) и (x_2, r_2) .

Каждой функции $f \in C(\Omega)$ мы сопоставляем функцию $a \in C^1(\Omega^*)$ по формуле

$$a(x, r) = a(x, r; f) = \int_{B_{x,r}} f(y) dy, \quad (x, r) \in \Omega^*, \quad (1)$$

где $B_{x,r}$ — открытый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке x и радиусом r . Пусть $B_r = B_{0,r}$, $B = B^n = B_1$ и $S_{x,r} = \partial B_{x,r}$, $S_r = S_{0,r}$; в частности $S = S^{n-1} = S_1$.

Через x_k обозначим k -ую координату точки $x \in \mathbb{R}^n$ относительно стандартного базиса $\{e_k\}_{k=1}^n$ в $\mathbb{R}^n$, и для $1 \leq k \leq n$ рассмотрим операторы проектирования $p_k x : x \mapsto x - x_k e_k$, так что $p_k x$ не зависит от k -ой координаты. Пусть e — единичный вектор в $\mathbb{R}^n$, т.е. $e \in S^{n-1}$, и пусть ∂_e обозначает производную по переменной x в направлении e . Положим для простоты $\partial_k = \partial_{e_k}$ для частной производной по k -ой координате. Представляя формулу (1) в виде

$$a(x, r) = \int_{B_{x,r}} f(y + x_k e_k) dy = \int_{S_{x_k,r}} \partial_k \int_{x_k}^{x_k+y_k} f(p_k y + t e_k) dt dy,$$

согласно известной теореме о дивергенции получим

$$a(x, r) = \int_{S_{x_k,r}} n_k \int_{x_k}^{x_k+y_k} f(p_k y + t e_k) dt ds.$$

Здесь n_k — k -ая координата внешней единичной нормали n , а s обозначает поверхностную меру Лебега на $S_{p_k x, r}$. Используя независимость $S_{p_k x, r}$ от x_k , получим

$$(\partial_k a)(x, r) = \int_{S_{x_k,r}} f(y + x_k e_k) n_k ds - \int_{S_{x_k,r}} f(p_k y + t e_k) n_k ds = \int_{S_{x,r}} f(y) n_k ds.$$

Второй интеграл в среднем выражении равен нулю, поскольку подынтегральная функция имеет то же абсолютное значение, но с противоположными знаками для точек из $S_{p(x,r)}$, симметричных относительно гиперплоскости $y_k = 0$. Мы приходим к формуле

$$(\partial_e a)(x, r, f) = \int_{S_{x,r}} f(y) e \cdot n \, ds, \quad (x, r) \in \Omega^*. \quad (2)$$

Обозначив производную по переменной r через ∂_r , получим

$$(\partial_r a)(x, r) = \int_{S_{x,r}} f \, ds, \quad (x, r) \in \Omega^*, \quad (3)$$

что следует из тождества

$$a(x, r) = \int_0^r \int_{S_{x,t}} f \, ds \, dt, \quad (x, r) \in \Omega^*.$$

Из (2) и (3) следует неравенство

$$|(\nabla_x a)(x, r, f)| \leq (\partial_r a)(x, r, |f|), \quad (x, r) \in \Omega^*,$$

совпадающее с неравенством, отмеченным в [8] для $f \geq 0$ (см. Лемму 3 в [8]).

Пусть теперь γ — гладкая жорданова дуга в Ω с параметризацией длины на $[0, T]$, где T — длина γ , так что $|\gamma'(t)| \equiv 1$ на $[0, T]$. Тогда $e = \gamma'(t)$ обозначает единичный вектор в касательном направлении к γ в точке $x = \gamma(t)$. Для заданной функции $r \in C^1(\gamma)$, удовлетворяющей условию $0 < r(x) < d(x)$ при $x \in \gamma$ обозначим через r' касательную производную r на γ , так что $r'(x) = (r \circ \gamma)'(t)$ для $x = \gamma(t)$.

Введем теперь новую функцию $\bar{a} \in C^1(\gamma)$, полагая

$$\bar{a}(x) = a(x, r(x), f) = \int_{B_{x,r(x)}} f(y) \, dy, \quad x \in \gamma. \quad (4)$$

Из (2) - (4), для $x \in \gamma$ имеем

$$(\partial_e \bar{a})(x) = \int_{S_{x,r(x)}} f(y) (e \cdot n + r') \, ds. \quad (5)$$

§2. КОРРЕЛИРОВАННЫЕ ШАРЫ И СФЕРЫ

Если $\Omega = B = B^n$ и $f \in C(\bar{B})$, то (5) имеет место также при предположении $0 < r(x) \leq d(x)$.

Определение 1. Два шара $B_{x,r} \subset B$ и $B_{\bar{x},\bar{r}} \subset B$ назовем коррелированными (через B), если векторы x и $\bar{x}$ сонаправлены (т.е. или $|x||\bar{x}| = 0$, или $x = \lambda\bar{x}$ с $\lambda > 0$) и выполняется соотношение

$$(1 + |x|^2 - r^2)|\bar{x}| = |x|(1 + |\bar{x}|^2 - \bar{r}^2). \quad (6)$$

В этом случае соответствующие сферы $S_{x,r}$, $S_{\bar{x},\bar{r}}$ будут также называться коррелированными (через S). Очевидно, шары, концентричные с B , коррелированы.

Полагая $|\bar{x}| \leq |x|$ и принимая во внимание сонаправленность векторов x и $\bar{x}$, формулу (6) можно переписать в виде

$$|x - \bar{x}|[1 - (|x| + r)^2 + |x|(2r + |x - \bar{x}|)] = |x|(\bar{r}^2 - r^2).$$

Отсюда следует, во-первых, что $\bar{r} \geq r$. Далее мы имеем неравенство

$$|x - \bar{x}|(2r + |x - \bar{x}|) \leq \bar{r}^2 - r^2,$$

т.е. $|x - \bar{x}| \leq \bar{r} - r$. Это означает, что включение $B_{x,r} \subset B_{\bar{x},\bar{r}} (\subset B)$ эквивалентно условию $|\bar{x}| \leq |x|$.

Заметим, что равенство $|x - \bar{x}| = |x| - |\bar{x}| = \bar{r} - r$ имеет место только при $r = 1 - |x|$, и тогда $\bar{r} = 1 - |\bar{x}|$, т.е. когда шары $B_{x,r}$ и $B_{\bar{x},\bar{r}}$ касаются B в некоторой точке. Если исключить этот случай, то строгое неравенство $|\bar{x}| < |x|$ влечет $\bar{B}_{x,r} \subset B_{\bar{x},\bar{r}}$ и при дополнительном условии $\bar{x} \neq 0$ получаем $\bar{B}_{\bar{x},\bar{r}} \subset B$.

Рассмотрим теорему о трех сферах для гармонических функций в случае неконцентрических, некасающихся, но коррелированных сфер. С этой целью зафиксируем шар $B_{x,r}$ с $x \neq 0$ и $0 < r < 1 - |x|$. Тогда шары $B_{x,r}$ и B неконцентрические и некасающиеся. Для рассмотрения семейства шаров, коррелированных с $B_{x,r}$ и содержащих последний, мы параметризуем интервал $[0, x] \subset \mathbb{R}^n$ по длине, полагая $\bar{x} = x_t = \gamma(t) = te$ для $0 \leq t \leq |x|$, и $e = |x|^{-1}x$. Радиус $r_t = \bar{r}$ определяется по формуле (6), полагая $|\bar{x}| = t$. Следовательно, шары B_{x,r_t} , $t \in [0, |x|]$, порожденные через $B_{x,r}$ по корреляции, определены, и изменяются от $B_{x,r}$ при $t = |x|$ до B при $t = 0$.

Рассмотрим теперь инверсию φ относительно сферы $S_{a,\rho}$:

$$\varphi(y) = a + \frac{\rho^2}{|y - a|^2}(y - a), \quad (7)$$

являющимся взаимно-однозначным и конформным отображением $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ на $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$, сохраняющим семейство сфер в $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ (см. [10], стр. 60). Если выберем $a = |a|e$ с $|a| > 1$ и положим $\rho^2 = |a|^2 - 1$, то $S_{a,\rho}$ будет ортогональным к S , так что $\varphi(B) = B$ с $\varphi(0) = 0$. Важно, что $|a|$ можно выбрать таким образом, что $\varphi(B_{x_i,r_i}) = B_{r_i^*}$ для всех $i \in [0, |x|]$, т.е. образы шаров B_{x_i,r_i} становятся концентрическими с общим центром в начале координат. На самом деле, можно найти $|a| > 1$ из квадратного уравнения (см. эквивалентную формулу (21) в [7]) :

$$\frac{|a|^2 + 1}{|a|} = \frac{1 + |x|^2 - r^2}{|x|}. \quad (8)$$

Из соотношения (6) (с $|\bar{x}| = t$), используя (8), можно найти r_i в терминах a :

$$r_i^2 = (1 - |a|^{-1}t)(1 - |a|t). \quad (9)$$

Также (см. (18) в [7]), радиус-образ r_i^* можно определить по формуле

$$r_i^* = r_i \frac{|a|}{|a| - t} \equiv \frac{1 - |a|t}{r_i}. \quad (10)$$

Используя (9), получаем

$$(r_i^*)^2 = |a| \frac{1 - |a|t}{|a| - t}. \quad (11)$$

Дифференцируя (9) и (11) по переменной t и используя (10), находим

$$2r_i r_i' = 2t - \frac{|a|^2 + 1}{|a|}, \quad 2r_i(r_i^*)' |a| = -\rho^2 \left(\frac{r_i^*}{r_i} \right). \quad (12)$$

Теперь мы намерены использовать формулу (5) в нашем специальном случае, заменяя в (5) x на $\bar{x}$, выбирая $\gamma(t) = te$ при $t \in [0, |x|]$ с $e = x/|x|$ (так что $\gamma'(t) \equiv e$) и $r(\bar{x}) = r_i$ при $\bar{x} = x_i = \gamma(t)$. Для $y \in S_{x_i,r_i}$ имеем $n = n_y = r_i^{-1}(y - te)$. Следовательно, из первого равенства в (12) и $a = |a|e$ имеем

$$e \cdot n + r_i' = \frac{e \cdot y - t + r_i r_i'}{r_i} = -\frac{|y - a|^2 + 1 - |y|^2}{2|a|r_i}.$$

Подставляя это выражение в (5) и замечая, что $\partial_e = d/dt$, мы приходим к формуле

$$\frac{d}{dt} \int_{B_{x_i,r_i}} f(y) dy = -\frac{1}{2|a|r_i} \int_{S_{x_i,r_i}} f(y) (|y - a|^2 + 1 - |y|^2) ds, \quad (13)$$

верной для любой функции $f \in C(\bar{B})$, если $t \in [0, |x|]$.

Нам понадобятся несколько оценок для r_i^* . Положим $(r_i^*)^2 = 1 - \tau$, где согласно (11) имеем $\tau = \frac{\rho^2 t}{|a| - t}$. Далее из (10) для $t \in [0, |x|]$ получим $|a|t < 1$, откуда следует $0 < \tau < 1$. Используя неравенство $\log(1 - \tau)^{-1} > \tau$, получим

$$\log(r_i^*) > \frac{\tau}{2} > t \frac{|a| - 1}{|a| - t}, \quad (14)$$

Согласно (8), $|a| - 1 > 1 - |x| - r$ и $|a| - t \leq |a| < |x|^{-1} \leq t^{-1}$, и из (14) получим

$$\log(r_i^*)^{-1} > t^2(1 - |x| - r). \quad (15)$$

Обратно, из (10) получаем $(r_i^*)^{-1} < r_i^{-1}(1 - |x|t) < 2r_i^{-1}(1 - |x|)$. Отсюда и из (15) окончательно имеем

$$\alpha_t = \frac{\log r_i^*}{\log r_{|x|}^*} > \omega_t = \frac{t^2(1 - |x| - r)}{\log \frac{1 - |x|}{r/2}}. \quad (16)$$

§3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

ЛОГ-ВЫПУКЛОСТЬ. Для функции $f \in C(B_{x,r})$ и $0 < r < \tau$ положим

$$l_p(x, r, f) = \left(\int_{S_{x,r}} |f|^p ds \right)^{1/p}, \quad a_p(x, r, f) = \left(\int_{B_{x,r}} |f(y)|^p dy \right)^{1/p}, \quad (17)$$

если $0 < p < \infty$ и

$$l_\infty(x, r, f) = \sup_{S_{x,r}} |f|, \quad a_\infty(x, r, f) = \sup_{B_{x,r}} |f|$$

для $p = \infty$. Мы опускаем x в обозначениях, если $x = 0$.

Определение 2. Функция $L > 0$ на $(\tau_0, \tau) \subset \mathbb{R}^+$ называется логарифмически выпуклой (лог-выпуклой) по логарифму (по лог), если для $r \in [r_1, r_2] \subset (\tau_0, \tau)$ имеем

$$L(r) \leq L^\alpha(r_1) L^{1-\alpha}(r_2), \quad \alpha = \frac{\log(r_2/r)}{\log(r_2/r_1)}. \quad (18)$$

Если L является лог-выпуклой по лог, то L^γ также лог-выпукла при $\gamma > 0$.

Замечание 1. Если лог-выпуклая функция L по лог является возрастающей, то в (18) можно заменить α на любое $\beta \in (0, \alpha]$.

Пример 1. Пусть f является голоморфной в $B^2 \subset \mathbb{R}^2$. Теорема Харди о выпуклости (которая следует из классической теоремы Адамара о трех окружностях и содержит последнюю для $p = \infty$) утверждает (см. [9], стр. 9, Теорема 1.5), что функция $l_p(\cdot, f)$ для $p > 0$ является лог-выпуклой по лог на $(0, 1)$. То же утверждение имеет место для $a_p(\cdot, f)$ (см. [7], Лемма 2).

Пример 2. Пусть f — комплекснозначная функция, гармоническая в единичном шаре $B^n \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$). Применяя теорему Адамара к равенству Парсеваля для f (см. [5], Лемма 2.1) получим, что и $l_2(\cdot, f)$ и $a_2(\cdot, f)$ суть лог-выпуклые по лог на $(0, 1)$.

В этих примерах функции l_p и a_p являются возрастающими и поэтому имеют место Замечание 1.

Замечание 2. Пусть $H^p(B)$ – классы Харди голоморфных функций в единичном круге B (см. [9]) и $h^2(B)$ – соответствующий класс Харди гармонических функций в $B = B^n$ ($n \geq 2$) (см. [10], глава 6). В примерах 1 и 2 можно положить $r_2 = 1$ при $L = l_p(\cdot, f)$ и $L = l_2(\cdot, f)$, соответственно, предполагая $f \in H^p(B)$ в первом случае и $f \in h^2(B)$ во втором. Можно продолжить f в этих классах п.в. на $S = S^n$ по предельной теореме Фату и определить $l_p(1, f)$ как и в (17). Применяя (18) к соответствующим $l_p(\cdot, f_\tau)$ с $0 < \tau < 1$, где $f_\tau(y) = f(\tau y)$, и полагая $\tau \rightarrow 1$, можно получить этот результат.

Первая часть замечания выполняется также для величин $a_p(\cdot, f)$ в соответствующих классах Бергмана $b^p(B)$ голоморфных и гармонических функций, которые шире классов Харди.

ТЕОРЕМА О ТРЕХ СФЕРАХ. Как в параграфе 2, пусть $B_{x,r}$ – неконцентрический и некасающийся шар в $B = B^n$, $n \geq 2$. Пусть a – точка с $|a| > 1$, сонаправлена с x и удовлетворяет (8). Рассмотрим комплекснозначную функцию f , гармоническую в шаре $B_\tau \subset R^n$ с $1 < \tau < |a|$ и обозначим через f^* преобразование Кельвина функции f относительно инверсии $\varphi = \varphi^{-1}$, определенной в (7) :

$$f^* = \left(\frac{\rho}{|y-a|} \right)^{n-2} \overline{f(\varphi(y))}, \quad y \in \varphi(B_\tau). \quad (19)$$

Так как $\varphi(B) = B$, то существует $\tau_1 > 1$ такое, что $B_{\tau_1} \in \varphi(B_\tau)$. Отметим, что f^* – гармоническая в $\varphi(B_\tau)$, поэтому и в B_{τ_1} ; если $n = 2$ и f голоморфна в B_τ , то f^* голоморфна в $\varphi(B_\tau)$.

Рассмотрим теперь семейство шаров $\{B_{x_t, r_t}\}$, $t \in [0, |x|]$, коррелированных с $B_{x,r}$ (через B) и содержащих $B_{x,r}$. Применим (18) к $l_2^2(\cdot, f^*)$ к аргументам $r_{|x|}^* \leq r_t^* \leq 1$, заменяя там α на любое $\beta \in (0, \alpha]$ (см. Пример 2 и Замечание 1). Поскольку согласно (18)

$$r_t^* = \left(r_{|x|}^* \right)^\alpha \leq \left(r_{|x|}^* \right)^\beta, \quad (20)$$

то

$$l_2^2(r_t^*, f^*) \leq l_2^{2\beta}(r_{|x|}^*, f^*) l_2^{2(1-\beta)}(1, f^*). \quad (21)$$

Из (19) по формуле замены переменных ($\zeta = \varphi(y)$) в интегралах по объему. Учитывая, что $\varphi(B_{x_t, r_t}) = B_{r_t^*}$ и $\det \varphi'(y) = -|y-a|^{-2n}$, получаем

$$I(t) = \int_{B_{r_t^*}} |f^*(y)|^2 dy = \int_{B_{x_t, r_t}} \rho^4 |\zeta - a|^{-4} |f(\zeta)|^2 d\zeta.$$

Чтобы выразить (21) непосредственно в терминах функции f и сфер S_{x_1, r_1} , $S_{x, r}$ и S , вначале применим формулу (3), а затем (13). Используя также вторую формулу в (12), получим

$$l_2^2(r_1^*, f^*) = \frac{1}{(r_1^*)'} I'(t) = \rho^2 \frac{r_1}{r_1^*} \int_{S_{x_1, r_1}} |f(y)|^2 ds_a, \quad (22)$$

где

$$ds_a = \frac{|y - a|^2 + 1 - |y|^2}{|y - a|^4} ds. \quad (23)$$

Подставим (23) в (20), используем (21) и возвратимся к обозначениям начала параграфа 2 : $x_1 = \bar{x}$, $r_1 = \bar{r}$. Окончательно, мы приходим к неравенству

$$\bar{r} \int_{S_{\bar{x}, \bar{r}}} |f|^2 ds_a \leq \left(r \int_{S_{x, r}} |f|^2 ds_a \right)^\beta \left(\int_S |f|^2 ds_a \right)^{1-\beta}, \quad (24)$$

которое имеет место для любого $\beta \in (0, \alpha]$, где $(\bar{r})^\alpha = (r^\alpha)^\alpha$, или согласно (10)

$$\frac{1 - |a| |\bar{x}|}{\bar{r}} = \left(\frac{1 - |a| |x|}{r} \right)^\alpha \quad (25)$$

В частности, из оценки (16) следует, что в (24) можно подставить

$$\beta = \omega = |\bar{x}|^2 \frac{1 - |x| - r}{\log \frac{1 - |x|}{r/2}}.$$

Заметим также, что можно легко продолжить неравенство (24) на функции f из пространства Харди $h^2(B^n)$ гармонических функций, как указано в Замечании 2. Мы доказали следующую теорему.

Теорема. Пусть $S_{x, r}$ и $S_{\bar{x}, \bar{r}}$ суть коррелированные сферы через $S = S^{n-1}$, $n \geq 2$ с $x \neq 0$, $0 < r < 1 - |x|$ и $|\bar{x}| \leq |x|$. Для функции $f \in h^2(B^n)$ неравенство (24) имеет место при любом $\beta \in (0, \alpha]$, с α , удовлетворяющем (25), и для меры s_a , определенной по формуле (23); точку $a = |a| |x|^{-1} x$ ($|a| > 1$) можно найти из (8).

Замечание 3. В случае $n = 2$, полагая, что f — голоморфная или $f \in H^2(B^2)$, в (24) можно ds_a заменить на $(|y - a|^2 + 1 - |y|^2) ds$. Это следует из (24) с заменой $f(y)$ на $(y - a)^2 f(y)$.

ABSTRACT. The authors obtain an analog of the Three spheres theorem for functions harmonic in the unit ball $B^n \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ in case of non-concentric but in some sense correlated spheres. The result is a logarithmic-convexity relation for the weighted spherical L^2 -norms of harmonic functions. For the case of functions holomorphic in a disc in $\mathbb{R}^2$, the result extends to weighted L^p -norms ($p > 0$).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. E. M. Landis, "Some problems of the qualitative theory of second order elliptic equations", Russian Math. Surveys, 18, pp. 1 — 62, 1963.
2. S. Agmon, "Unicité et convexité dans les problèmes différentiels", Sm. de Mathématiques Sup. 13, Univ. de Montréal, 1965.
3. R. Brummelhuis, "Three-spheres theorem for second order elliptic equations", Journ. D'Analyse Mathématique, vol. 65, pp. 179 — 206, 1995.
4. J. Korevaar, "Chebychev-type Quadratures : use of complex analysis and potential theory, Complex potential theory", NATO-ASI, ser. C, vol. 439, ed. P. M. Gauthier, Kluwer, Dordrecht, 1994.
5. J. Korevaar and J. L. M. Meyers, "Logarithmic convexity for supremum norms of harmonic functions", Bull. London Math. Soc., vol. 121, pp. 353 — 362, 1994
6. Е. Д. Соломенцев, "Теорема о трех сферах для гармонических функций", ДАН Арм.ССР, том 42, стр. 274 — 278, 1966.
7. Н. У. Аракелян, П. М. Готье, "Передача малости и единственности для гармонических и голоморфных функций", Изв. АН Армении, серия Математика, том 30, № 4, стр. 2 — 24, 1995.
8. N. U. Arakelian, H. Shahgholian, "Propagation of smallness for harmonic and analytic functions in arbitrary domains", Bull. London Math. Soc., vol. 31, 1999.
9. P. L. Duren, "Theory of H^p spaces", Academic Press, New York, 1970.
10. Sh. Axler, P. Bourdon, W. Ramey, "Harmonic function theory", Springer, New York, 1992.

14 Марта 1999

Институт математики
Национальной Академии Наук Армении,
Ереванский государственный университет
E-mails : arakel@instmath.sci.am
Norayr@scientist.com