О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ВОЛЬТЕРРА НА ПОЛУОСИ

Л. Г. Арабаджян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 2, 1999

§1. ВВЕДЕНИЕ

Интегральные уравнения вида

$$f(x) = g(x) + \int_x^\infty V(t-x) f(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ \equiv [0, \infty) \tag{1}$$

относительно искомой функции f с ядром $V \in L_1(\mathbb{R}^+)$ возникают в различных математических моделях физических процессов и в теоретических проблемах. Таким примером является вопрос разрешимости общих интегральных уравнений типа свертки посредством вольтерровой факторизации соответствующих интегральных операторов (см. [6] – [8]).

В настоящей работе уравнение (1) рассматривается в случае, когда ядро V и свободный член g удовлетворяют условиям

(a) $V \geq 0$, $V(x)$- монотонно убывает на $\mathbb{R}^+$, $\infty > \gamma \equiv \int_0^\infty V(t)\, dt > 1$;

(b) $g \in L_1(\mathbb{R}^+)$ и $\int_0^\infty t|g(t)|\, dt < \infty$.

Если $V(t)$ и $g(t)$ дополнительно удовлетворяют условиям (см. [6] – [8])

$$(c) \quad V(t) \geq 0, \quad \int_0^\infty V(t)\, dt = 1; \quad (d) \quad g \in L_1(\mathbb{R}^+),$$

то этот случай называется консервативным случаем уравнения (1).

Теорема 1 ([8]). **При условиях (c) и (d), уравнение (1) обладает локально интегрируемым решением $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^+)$ с асимптотическим поведением**

$$\int_0^x |f(t)|\, dt = o(x), \quad \text{при} \quad x \to \infty.$$

В случае (b) это решение суммируемо на $\mathbb{R}^+$, т.е. $f \in L_1(\mathbb{R}^+)$.

Пусть f — суммируемое решение консервативного уравнения

$$f(x) = g_0(x) + \int_x^\infty V_0(t-x) f(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{2}$$

Интегрируя (2) от $x > 0$ до ∞ и используя теорему Фубини (см. [9]), получим

$$\int_x^\infty f(\tau)\, d\tau = \int_x^\infty g_0(\tau)\, d\tau + \int_0^\infty V_0(t)\, dt \int_{x+t}^\infty f(\tau)\, d\tau. \tag{3}$$

Используя теорему Фубини и условие (c), последнее слагаемое можно преобразовать к виду

$$\int_0^\infty V_0(t)\, dt \int_{x+t}^\infty f(\tau)\, d\tau = \int_x^\infty f(\tau)\, d\tau - \int_x^\infty f(t)\, dt \int_{t-x}^\infty V_0(\tau)\, d\tau.$$

Подставляя это значение интеграла в (3), получаем

$$\int_x^\infty g_0(t)\, dt = \int_x^\infty f(t)\, dt \int_{t-x}^\infty V_0(\tau)\, d\tau.$$

Умножим последнее равенство на $\alpha \neq 0$ и полученный результат сложим с (2). Находим, что решение f консервативного уравнения (2) удовлетворяет (1), где функции V и g выражаются через V_0 и g_0 посредством равенств :

$$V(x) = V_0(x) + \alpha \int_x^\infty V_0(t)\, dt, \quad g(x) = g_0(x) - \alpha \int_x^\infty g_0(t)\, dt. \tag{4}$$

§2. РАЗРЕШИМОСТЬ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Пусть функции V и g в уравнении (1) удовлетворяют условиям (a) и (b).

Теорема 2. Уравнение (1) при условиях (a) и (b), для любого $\gamma > 1$ обладает суммируемым решением $f \in L_1(\mathbb{R}^+)$.

Доказательство : Рассмотрим функции

$$V_0(x) = V(x) - \alpha e^{\alpha x} \int_x^\infty e^{-\alpha t} V(t)\, dt, \tag{5}$$

$$g_0(x) = g(x) - \alpha e^{-\alpha x} \int_0^x e^{\alpha t} g(t)\, dt, \tag{6}$$

где V и g суть ядро и свободный член уравнения (1), а α – произвольное действительное число. Легко проверить, что для каждого $\alpha \in \mathbb{R}^+$ для функции V_0 из (5) и g_0 из (6) имеют место соотношения (4). Нетрудно показать также, что при надлежащем выборе α, функция V_0 из (5) удовлетворяет условиям (c). Действительно, в силу монотонности функции V, для любого α имеем

$$V_0(x) \geq V(x) \left(1 - \alpha e^{\alpha x} \int_x^\infty e^{-\alpha t}\, dt\right) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Кроме того, справедливы равенства :

$$\gamma(\alpha) = \int_0^\infty V_0(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-\alpha t} V(t)\,dt.$$

Так как $\gamma(0) > 1$ и $\gamma(+\infty) = 0$, то существует такое значение $\alpha > 0$, что $\gamma(\alpha) = 1$. Покажем теперь, что при таком выборе α функция g_0, определенная по (6), обладает свойствами (b). В самом деле, в равенстве (6) имеем $g \in L_1(\mathbb{R}^+)$ и

$$\alpha \int_0^\infty e^{-\alpha x} dx \int_0^x e^{\alpha u} g(u)\,du = \int_0^\infty g(u)\,du < \infty.$$

Следовательно $g_0 \in L_1(\mathbb{R}^+)$. Далее, так как g удовлетворяет (b) и

$$\alpha \int_0^\infty x e^{-\alpha x} dx \int_0^x e^{\alpha u} g(u)\,du = \int_0^\infty u g(u)\,du + \int_0^\infty g(u)\,du < \infty,$$

то получаем $\int_0^\infty t|g_0(t)|\,dt < \infty$. Следовательно, функции V_0 и g_0, определяемые равенствами (5) и (6) удовлетворяют условиям Теоремы 1. Таким образом, существует суммируемое решение f уравнения (2). В силу вышеизложенных рассуждений эта функция будет удовлетворять также и исходному уравнению (1). Теорема 2 доказана.

§3. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим теперь однородное уравнение

$$S(x) = \int_0^\infty V(t) S(x+t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{7}$$

где ядро V удовлетворяет условию (a).

Теорема 3. При условии (a) однородное уравнение (7) в $L_1(\mathbb{R}^+)$ обладает единственным (с точностью до постоянного множителя) решением вида $S(x) = e^{-\alpha x}$, где $\alpha \in \mathbb{R}^+$ и определяется однозначно из уравнения

$$\int_0^\infty V(t) e^{-\alpha t}\,dt = 1. \tag{8}$$

Доказательство : Пусть $S \in L_1(\mathbb{R}^+)$ - произвольное решение уравнения (7). Так как ядро V удовлетворяет (a), то существует консервативное ядро V_0, удовлетворяющее (4) (с параметром α, удовлетворяющим (8)). Тогда из (7) имеем

$$S(x) = \int_0^\infty \left[V_0(t) + \alpha \int_t^\infty V_0(u)\,du \right] S(x+t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Отделяя интегралы в правой части и меняя порядок интегрирования во втором интеграле, получаем

$$\widetilde{S}(x) = \int_0^\infty V_0(t)\widetilde{S}(x+t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{9}$$

где $\widetilde{S}(x) \equiv S(x) - \alpha \int_x^\infty S(t)\,dt$, $x \in \mathbb{R}^+$. Пусть

$$F_h(x) \equiv \int_x^{x+h} \widetilde{S}(t)\,dt, \quad h \in \mathbb{R}^+.$$

Так как $\widetilde{S} \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap C(\mathbb{R}^+)$ находим

$$F_h(x) \to 0, \quad \text{при} \quad x \to \infty. \tag{10}$$

Из (9) получаем

$$F_h(x) = \int_0^\infty V_0(t)F_h(x+t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{11}$$

В [8] показано, что консервативное уравнение (11) в классе функций (10) имеет на $\mathbb{R}^+$ лишь тривиальное решение $F_h(x) \equiv 0$. Так как это равенство выполняется при любом $h \in \mathbb{R}^+$, то

$$S(x) - \alpha \int_x^\infty S(t)\,dt \equiv 0, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Тогда S будет дифференцируемой на $\mathbb{R}^+$ функцией удовлетворяющей уравнению $\frac{dS}{dx} + \alpha S = 0$. Следовательно $S(x) = Ce^{-\alpha x}$. Теорема 3 доказана.

Автор выражает благодарность профессору Н. Б. Енгибаряну за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Hopf, Mathematical Problems of Radiative Equilibrium, Cambridge Tract., 1934
2. В. Феллер , Введение в Теорию Вероятностей и ее Приложения, Москва, Мир, том II, 1984.
3. А. А. Боровков, Вероятностные Процессы в Теории Массового Обслуживания, Москва, Наука, 1972.
4. R. Bellman, K. Cooke, Differential- Difference Equations, Academic Press, 1963.
5. В. В. Соболев, Курс Теоретической Астрофизики, Москва, Наука, 1967.
6. Н. Б. Енгибарян, Л. Г. Арабаджян, О нелинейных уравнениях факторизации операторов Винера-Хопфа, Препринт, № 01, Ереванский Университет, 1979.
7. Л. Г. Арабаджян, "О консервативном уравнении Винера-Хопфа", Изв. АН Арм. ССР, Сер. Матем., том 16, № 1, стр. 65 — 80, 1981.
8. Л. Г. Арабаджян, Н. В. Енгибарян, "Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения", Итоги Науки и Техники, Матем. Анализ, том 22, ВИНИТИ, Москва, стр. 175 — 244, 1984.
9. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, Элементы Теории Функций и Функционального Анализа, Наука, Москва, 1976.

1 Декабря 1998

Армянский государственный педагогический институт им. Х. Абовяна