ЗАДАЧА О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ДЛЯ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ПОЛУЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Г. А. Карапетян, В. Т. Сардарян, А. П. Крмзян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 2, 1999

В работе изучается асимптотическое поведение собственных значений семиэллиптических дифференциальных операторов вида $A(x,D) = \sum_{(\alpha,\mu)\le k} a_\alpha(x) D^\alpha$, определенных на анизотропном пространстве Соболева $H_{k\mu}(\Omega)$, где Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Условия при которых спектр оператора A дискретный, а его собственные значения имеют конечные кратности задаются вместе с асимптотическим соотношением $N(\lambda) = c\lambda^{|\mu|/k} + o\left(\lambda^{|\mu|/k}\right)$, $\lambda \to \infty$, где $N(\lambda)$ – число собственных значений λ_j удовлетворяющих условию $|\lambda_j| < \lambda$, а $c > 0$ – постоянная зависящая от A и Ω.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть Ω — ограниченная область, удовлетворяющая свойству конуса, а m_1, $m_2, \dots, m_n$ – натуральные числа. Для $\mu = \left(\frac{1}{2m_1}, \dots, \frac{1}{2m_n}\right)$, $p \ge 1$ и $k \ge 1$ обозначим через $W_p^{k\mu}(\Omega)$ анизотропное пространство Соболева, т.е. множество функций f, для которых существуют производные $D^\alpha f \in L_p(\Omega)$ для любого мультииндекса α с $(\alpha,\mu) \le k$. При $p = 2$ пространство $W_p^{k\mu}(\Omega) \equiv H_{k\mu}(\Omega)$ является гильбертовым с нормой $||u||_k$ и полунормой $|u|_k$:

$$||u||_k = \left(\int_\Omega \sum_{(\alpha,\mu)\le k} |D^\alpha u|^2 \, dx\right)^{1/2}, \qquad |u|_k = \left(\int_\Omega \sum_{(\alpha,\mu)= k} |D^\alpha u|^2 \, dx\right)^{1/2}.$$

Для ограниченного линейного преобразования T на гильбертовом пространстве X определим двойную норму $|||T||| = \left(\sum_{i=1}^\infty ||T\varphi_i||^2\right)^{1/2}$, где $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ — ортонормированный базис в X. Проверим, что эта величина не зависит от выбора базиса $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$. Действительно, если $\{\psi_1, \psi_2, \dots\}$ – другой базис в X, то $\sum_{i=1}^\infty ||T\varphi_i||^2 = \sum_{i=1}^\infty ||T\psi_i||^2 = \sum_{i=1}^\infty ||T^*\varphi_i||^2 = \sum_{j,i=1}^\infty ||(T\varphi_i, \psi_j)||^2$. След $\mathrm{tr}(T \cdot S)$

оператора $T \cdot S$ определим следующим образом :

$$\mathrm{tr}(T \cdot S) = \sum_{i=1}^{\infty} (TS\varphi_i, \varphi_j),$$

где S — ограниченное линейное преобразование.

Имеют место следующие соотношения :

$$\mathrm{tr}(T \cdot S) = \sum_{i,j=1}^{\infty} (T\varphi_j, \varphi_i)(S\varphi_i, \varphi_j), \qquad \mathrm{tr}(TS) \le |||T||| \cdot |||S|||.$$

Для линейного оператора A обозначим через $\rho(A)$ и $\tau(A)$ резольвентное множество и спектр оператора A, соответственно. Множество всех ненулевых комплексных чисел λ, для которых $R(1-\lambda A) = X$, а $(1-\lambda A)^{-1}$ — ограниченное линейное преобразование на X, мы будем обозначать через $\rho_m(A)$ и называть видоизмененным резольвентным множеством оператора A. Отметим, что $\lambda \in \rho_m(A)$ эквивалентно условию $\lambda^{-1} \in \rho(A)$. Пусть λ - собственное значение оператора A. Вектор $f \neq 0$ называется обобщенным собственным вектором оператора A, соответствующим собственному значению λ, если для некоторого целого $k > 0$ имеем $(\lambda - A)^k f = 0$. Пусть λ — характеристическое значение оператора A, т.е. $\lambda A g = g$ для некоторого $g \neq 0$. Вектор $f \neq 0$ называется обобщенным характеристическим вектором оператора A, если $(1-\lambda A)^k f = 0$ для некоторого целого k. Для действительного числа θ и положительного a положим $E(\theta, a) = \{re^{i\theta} : r > a\}$.

Определение 1. Пусть A - линейный оператор. Направление θ в комплексной плоскости будем называть направлением минимального роста резольвенты оператора A, если $E(\theta, a) \subset \rho(A)$ для некоторого положительного a и $\|(\lambda - A)^{-1}\| = O\left(|\lambda|^{-1}\right)$ для $\lambda \in E(\theta, a)$, $|la| \to \infty$. Вектор θ назовем направлением минимального роста видоизмененной резольвенты оператора A, если $E(\theta, a) \subset \rho_m(A)$ для некоторого $a > 0$ и $\|A_\lambda\| \equiv \|A(1-\lambda A)^{-1}\| = O(|\lambda|^{-1})$ для $\lambda \in E(\theta, a)$ при $|\lambda| \to \infty$.

§1. СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ, ДЕЙСТВУЮЩИХ ИЗ $L_2(\Omega)$ В $H_{k\mu}(\Omega)$

Лемма 1.1. *Пусть $\dfrac{|\mu|}{2k} < 1$ и $u \in H_{k\mu}(\Omega)$. Тогда функция u может быть изменена на множестве меры нуль так, что $u \in C(\overline{\Omega})$. Существует постоянная $\gamma = \gamma(\Omega, \mu)$ такая, что для всех $x \in \overline{\Omega}$ имеем*

$$|u(x)| \le \gamma \cdot \left(|u|_0^{1-|\mu|/(2k)} |u|_k^{|\mu|/(2k)} + |u|_0\right). \tag{1.1}$$

Доказательство : По теореме Соболева для анизотропных классов (см. [2]) имеем

$$|u(x)| \leq \gamma \cdot r^{-(k-|\mu|/2)} \left(|u|_{k,\Omega} + r^k |u|_{0,\Omega}\right), r \geq 1.$$

Если $|u|_k \leq |u|_0$ возьмем $r = 1$ и получим $|u(x)| \leq \gamma \cdot \left(|u|_0^{1-|\mu|/(2k)}|u|_k^{|\mu|/(2k)} + |u|_0\right)$. Для $|u|_k > |u|_0$ имеем $r^k = |u|_0^{-1}|u|_k$ и получим $|u(x)| \leq 2\gamma \cdot |u|_0^{1-|\mu|/(2k)}|u|_k^{|\mu|/(2k)} \leq 2\gamma \cdot \left(|u|_0^{1-|\mu|/(2k)}|u|_k^{|\mu|/(2k)} + |u_0|\right)$. Лемма 1.1 доказана. Следующие две леммы доказываются аналогично.

Лемма 1.2. Пусть $\dfrac{|\mu|}{2k} < 1$ и $u \in H_{k\mu}(\Omega)$. Существует постоянная γ_*, зависящая только от Ω и μ такая, что после изменения функции u на множестве меры нуль

$$|u(x)| \leq \gamma_* \|u\|_k^{|\mu|/(2k)} \|u\|_0^{1-|\mu|/(2k)}, x \in \overline{\Omega}. \tag{1.2}$$

Лемма 1.3. Существует постоянная $\gamma = \gamma(\Omega, \mu)$ такая, что для всех $u \in H_{k\mu}(\Omega)$ и $0 \leq j \leq k$

$$|u|_{j,\Omega} \leq \gamma \cdot \left[|u|_0^{1-j/k}|u|_k^{j/k} + |u|_0\right] \leq 2\gamma \cdot |u|_0^{1-j/k}\|u\|_k^{j/k}. \tag{1.3}$$

Пусть T — ограниченное линейное преобразование на $L_2(\Omega)$ такое, что $R(T) \subset H_{k\mu}(\Omega)$. Для $0 \leq l \leq k$ положим

$$\|T\|_l = \sup_{f \in L_2(\Omega), \|f\|_{0,\Omega}=1} \|Tf\|_l, \qquad |T|_l = \sup_{f \in L_2(\Omega), \|f\|_{0,\Omega}=1} |Tf|_l.$$

Теорема 1.1. Пусть T — ограниченное линейное преобразование на $L_2(\Omega)$ такое, что $R(T) \subset H_{k\mu}(\Omega)$, где $\dfrac{|\mu|}{2k} < 1$. Тогда T имеет конечную двойную норму $|||T|||$, удовлетворяющую неравенствам

$$|||T||| \leq \gamma \cdot |\Omega|^{1/2} \left(|T|_k^{|\mu|/(2k)}|T|_0^{1-|\mu|/(2k)} + |T|_0\right), \tag{1.4}$$

$$|||T||| \leq \gamma_* \cdot |\Omega|^{1/2}\|T\|_k^{|\mu|/(2k)}\|T\|_0^{1-|\mu|/(2k)}, \tag{1.5}$$

где $|\cdot|$ — мера Лебега, а γ - постоянная из (1.1).

Доказательство : Пусть $\{\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n, ...\}$ является ортонормальным базисом в $L_2(\Omega)$ и $u_j = T\Phi_j$ для $j = 1, 2, ...,$ и пусть $a_1, a_2, ..., a_N$ - произвольные комплексные числа. Пусть $f = \sum_{j=1}^N a_j\Phi_j(x)$. Тогда из непрерывности функций u_j и $u = Tf$ следует, что $u(x) = \sum_{j=1}^N a_j u_j(x)$ для всех $x \in \Omega$. В силу

Леммы 1.1 для всех $x \in \Omega$ и любых комплексных $a_1, a_2, \dots, a_N$ имеем $|u(x)| \le \gamma \cdot \left(|T|_0^{1-|\mu|/(2k)}|T|_k^{|\mu|/(2k)} + |T|_0\right) \cdot \|f\|_{0,\Omega}$, т.е.

$$\left|\sum_{j=1}^{N} a_j u_j(x)\right| \le \gamma \cdot \left(|T|_0^{1-|\mu|/(2k)}|T|_k^{|\mu|/(2k)} + |T|_0\right) \left[\sum_{j=1}^{N} |a_j|^2\right]^{1/2}. \tag{1.6}$$

Если для фиксированного x положить $a_j = \overline{u_j(x)}$, то из (1.6) получим

$$\sum_{j=1}^{N} |u_j(x)|^2 \le \gamma^2 \cdot \left(|T|_0^{1-|\mu|/(2k)}|T|_k^{|\mu|/(2k)} + |T|_0\right)^2 \quad \text{для любого} \quad x \in \Omega.$$

Интегрируя по Ω, получаем

$$\sum_{j=1}^{N} \|T\Phi_j\|_{0,\Omega}^2 \le \gamma^2 |\Omega| \cdot \left(|T|_0^{1-|\mu|/(2k)}|T|_k^{|\mu|/(2k)} + |T|_0\right)^2.$$

Так как это неравенство имеет место для всех N, то

$$|||T||| \le \gamma^2 |\Omega|^{1/2} \cdot \left(|T|_0^{1-|\mu|/(2k)}|T|_k^{|\mu|/(2k)} + |T|_0\right).$$

Аналогично доказывается неравенство (1.5). Теорема 1.1 доказана.

Теорема 1.2. Пусть T — ограниченное линейное преобразование на $L_2(\Omega)$ такое, что $R(T) \subset H_{k\mu}(\Omega)$, где $\dfrac{|\mu|}{2k} < 1$. Предположим также, что существует хотя бы одно направление минимального роста видоизмененной резольвенты оператора T. Пусть $N(t)$ – сумма кратностей характеристических значений $\{\lambda_j\}$ оператора T, удовлетворяющих условию $|\lambda_j| \le t$. Для всех $\lambda \in \rho_m(T)$ при $t \to \infty$ имеем $N(t) = O(t^{|\mu|/k})$ и

$$\mathrm{tr}(TT_\lambda) = \sum_j \frac{1}{(\lambda_j - \lambda)\,\lambda_j}, \tag{1.7}$$

где $T_\lambda = T(I - \lambda T)^{-1}$. Если $\|T_\lambda\|_0 \le c|\lambda|^{-1}$ для $\lambda \in E(\theta, a)$, тогда для $t \ge a > 0$ имеем $N(t) \le 4\gamma_s^2\,|\Omega|\,\|T\|_k^{|\mu|/k}(1+c)^2 t^{|\mu|/k}$.

Доказательство : Для $\lambda \in E(\theta, a)$ имеем $1 = (1 - \lambda T)(1 - \lambda T)^{-1} = (1 - \lambda T)^{-1} - \lambda T(1 - \lambda T)^{-1}$. Отсюда следует, что $(1 - \lambda T)^{-1} = 1 + \lambda T_\lambda$. Следовательно, $\|(1 - \lambda T)^{-1}\|_0 \le 1 + |\lambda|\,|T_\lambda\|_0 \le 1 + C$. Имеем также $\|T_\lambda\|_k = \|T(1 + \lambda T)^{-1}\|_k \le \|T\|_k\,\|(1 - \lambda T)^{-1}\|_0 \le \|T\|_k(1 + C)$. Из Теоремы 1.1 следует, что

$$\begin{aligned} |||T_\lambda||| &\le \gamma_s |\Omega|^{1/2}\,\|T_\lambda\|_k^{|\mu|/(2k)}\,\|T_\lambda\|_0^{1-|\mu|/(2k)} \le \\ &\le \gamma_s\,|\Omega|^{1/2}\,\|T\|_k^{|\mu|/(2k)}\,(C+1)^{|\mu|/(2k)}\,C^{1-|\mu|/(2k)}|\lambda|^{-1+|\mu|/(2k)}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Собственными значениями оператора T_λ являются числа $\dfrac{\lambda_j^{-1}}{1-\lambda_j^{-1}\lambda} = \dfrac{1}{\lambda_j - \lambda}$, а их кратность равна кратности собственных значений λ_j^{-1} оператора T. Следовательно, применяя Теорему 12.14 из [1] к оператору T_λ, получим

$$\sum_j |\lambda_j - \lambda|^{-2} \le |||T_\lambda|||^2. \tag{1.9}$$

Для $|\lambda_j| \le t$ и $|\lambda| = t$ имеем, что $|\lambda_j - \lambda| \le 2t$. В силу (1.8) получаем

$$\sum_{|\lambda_j|\le t} \frac{1}{4t^2} \le |||T|||^2 \le \gamma_s^2\,|\Omega| \cdot ||T||_k^{|\mu|/k}(1+C)^{|\mu|/k} C^{2-|\mu|/k} t^{-2+|\mu|/k}.$$

Умножая полученное неравенство на $4t^2$ находим

$$N(t) \le 4\gamma_s^2\,|\Omega|\,||T||_k^{|\mu|/k}\,(1+C)^{|\mu|/k}\,C^{2-|\mu|/k}\,t^{|\mu|/k}.$$

Теперь докажем (1.7). В силу Теоремы 12.17 из [1], для всех $\lambda \in \rho_m(T)$ имеем

$$\operatorname{tr}(TT_\lambda) = \sum_j \frac{1}{(\lambda_j - \lambda)\lambda_j} + c, \tag{1.10}$$

где c – постоянная. Если $\lambda \in \Lambda(\theta, a)$, то из (1.8) получим

$$\operatorname{tr}(TT_\lambda) \le |||T||| \cdot |||T_\lambda||| \le \text{const} \cdot |\lambda|^{-1+|\mu|/(2k)}.$$

Следовательно, $\operatorname{tr}(TT_\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in E(\theta, a)$. С другой стороны, $[(\lambda_j - \lambda)\,\lambda_j]^{-1} \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$, $\lambda \in E(\theta, a)$. Следовательно, в равенстве (1.10) $c = 0$. Теорема 1.2 доказана.

Следствие 1.1. Пусть для каждого $\lambda \in (\theta, a)$ оператор T_λ в Теореме 1.2 существует и выполняется оценка $||T_\lambda||_0 \le C\,|\lambda|^{-1}$. Если $|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le \ldots$ для $j = 1, 2, \ldots$, то имеем $|\lambda_j| \ge \left[4\gamma_s^2|\Omega|\,(1+C)^2\right]^{-k/|\mu|} ||T||_k^{-1} \cdot j^{k/|\mu|}$.

Доказательство : Утверждение следует из Теоремы 1.2, так как $j \le N(|\lambda_j|)$.

Рассмотрим билинейную форму $B[v, u]$ над замкнутым подпространством V пространства $H_{k\mu}(\Omega)$, $|\mu|/(2k) < 1$, где $|\mu| < 2k$. Предположим, что существуют постоянные $K > 0$ и c_0 такие, что для всех $u, v \in V$ имеем

$$|B[v,u]| \le K\,||v||_{k,\Omega}||u||_{k,\Omega}, \qquad \operatorname{Re} B[u,u] \ge c_0\,||u||_{k,\Omega}^2.$$

По Теореме Лакса–Мильграма (см. [4]) существует единственное линейное преобразование T, действующее из $L_2(\Omega)$ в V и удовлетворяющее следующим соотношениям :

$$B[v, Tf] = (v, f)_{0,\Omega}, \quad f \in L_2(\Omega), \quad v \in V. \tag{1.11}$$

Теорема 1.3. При вышеуказанных условиях полуплоскость $\{\lambda\colon \operatorname{Re}\lambda < 0\}$ содержится в $\rho_m(T)$, а отрицательная действительная ось является направлением минимального роста видоизмененной резольвенты оператора T. Если модули характеристических значений оператора T расположить в порядке неубывания, то

$$|\lambda_j| \geq \frac{c_0}{(16\gamma_s^2\,|\Omega|)^{k/|\mu|}}\, j^{k/|\mu|}.$$

Доказательство : Подставляя $\nu = Tf$ в (1.11), получим

$$\operatorname{Re}(Tf, f) = \operatorname{Re} B[Tf, Tf] \geq c_0\,\|Tf\|_{k,\Omega}^2 \geq 0. \tag{1.12}$$

Так как отображение T из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ является ограниченным, то при достаточно больших $|\lambda|$ имеем $\lambda \in \rho(T)$. Тогда по Теореме 12.8 из [1] следует, что каждое λ с $\operatorname{Re}\lambda < 0$ принадлежит $\rho(T)$. Поэтому $(1-\lambda T)^{-1}$ существует для всех λ таких, что $\operatorname{Re}\lambda^{-1} < 0$, так как $1-\lambda T = \lambda(\lambda^{-1} - T)$ и $\operatorname{Re}\lambda^{-1} < 0$. Из коммутативности T и $(1-\lambda T)^{-1}$ следует, что для $u = T_\lambda f = T(1-\lambda T)^{-1} f$ имеет место соотношение $(1-\lambda T) = Tf$. Следовательно, $u = T(\lambda u + f)$. В силу (1.11) для всех $\nu \in V$ имеем $B[\nu, u] = (\nu, \lambda u + f)$ и $B[\nu, T_\lambda f] = (\nu, \lambda T_\lambda f + f)$, $\operatorname{Re}\lambda < 0$. Полагая $\nu = T_\lambda f$, получаем $B[T_\lambda f, T_\lambda f] = \bar{\lambda}\,\|T_\lambda f\|_0^2 + (T_\lambda f, f)$. Следовательно

$$c_0\,\|T_\lambda f\|_0^2 \leq \operatorname{Re} B[T_\lambda f, T_\lambda f] = \operatorname{Re}\lambda\,\|T_\lambda f\|_0^2 + \operatorname{Re}(T_\lambda f, f) \leq$$
$$\leq \operatorname{Re}\lambda\,\|T_\lambda f\|_0^2 + \|T_\lambda f\|_0 \|f\|_0.$$

Разделив полученное неравенство на $\|T_\lambda f\|_0$ находим $\|T_\lambda\|_0 \leq \dfrac{1}{c_0 - \operatorname{Re}\lambda}$, $\operatorname{Re}\lambda < 0$. Следовательно, если λ – отрицательное вещественное число, то $\|T_\lambda\|_0 \leq \dfrac{1}{c_0 - \lambda} \leq \dfrac{1}{|\lambda|}$. Таким образом, условия Следствия 1.1 выполняются при $C = 1$. Теперь утверждение вытекает из Следствия 1.1, так как в силу (1.12) имеем $\|T\|_k \leq c_0^{-1}$.

Теорема 1.4. Пусть выполнены условия Теоремы 1.3, и пусть билинейная форма $B[\nu, u]$ является эрмито-симметричной, а оператор T, определенный по (1.11), является самосопряженным. Если модули характеристических значений λ_j оператора T расположить в порядке неубывания, то $\lambda_j \geq c_0\,(16\gamma_s^2\,|\Omega|)^{-2k/|\mu|}\, j^{2k/|\mu|}$, $j = 1, 2, \ldots$.

Доказательство : Из (1.12) получаем, что $(Tf, f) \geq 0$ для всех f, т.е. T является положителным, компактным, самосопряженным оператором. Следовательно, существует единственный положителный, компактный, самосопряженный оператор S с характеристическими значениями $\lambda_j^{1/2}$ такой, что $S^2 = T$. Так как $Tf \neq 0$

для $f \neq 0$ имеем $Sf \neq 0$ для $f \neq 0$. Следовательно, область значений оператора S плотна в $L_2(\Omega)$. Используя (1.11) для $\nu = Tf$, получаем

$$B[Tf, Tf] = (Tf, f) = (S^2 f, f) = \|Sf\|_0^2.$$

Обозначая $Sf = g$, по условию теоремы $c_0 \|Sg\|_k^2 = c_0 \|Tf\|_k^2 \le B[Tf, Tf] = \|g\|_0^2$. Так как область значений оператора S плотна в $L_2(\Omega)$, то из последнего неравенства следует, что область значений содержится в $H_{k\mu}(\Omega)$ и $\|S\|_k \le c_0^{-1/2}$. Рассмотрим теперь видоизмененную резольвенту S_λ вдоль положительной мнимой оси. Из неравенства $\|T_\lambda\| \le |\csc\theta|\, |\lambda|^{-1}$, $\arg\lambda = \theta$ следует, что $\|S_\lambda\|_0 \le |\lambda|^{-1}$. Таким образом, предположения Следствия 1.1 выполнены для S_λ и $C = 1$. Таким образом, результат вытекает из Следствия 1.1 и из вышедоказанной оценки для $\|S\|_k$. Теорема 1.4 доказана.

Теорема 1.5. Пусть T — ограниченное линейное преобразование на $L_2(\Omega)$ такое, что $R(T) \subset H_{k\mu}(\Omega)$, где $k > 2\left[\frac{|\mu|}{2}\right] + 1$. Если $R(T^*) \subset H_{k\mu}(\Omega)$ и $l = k - \left[\frac{|\mu|}{2}\right] - 1$, то T – интегральный оператор с ядром Гильберта–Шмидта $K(x, y) \in H_{l\overline{\mu}}(\Omega \times \Omega)$, причем $\overline{\mu} = (\mu, \mu)$ и

$$\left[\int_\Omega |K(x,x)|^2\, dx\right]^{1/2} \le \gamma \cdot \left[\left(|T|_k^{|\mu|/k} + |T^*|_k^{|\mu|/k}\right) |T|_0^{1-|\mu|/k} + |T|_0\right], \tag{1.13}$$

где $\gamma = \gamma(\Omega, \mu)$.

Доказательство : Из Теоремы 1.1 следует, что T имеет конечную двойную норму. Следовательно, (см. [1]) T – интегральный оператор с ядром Гильберта–Шмидта $K(x, y)$. Остается показать, что $K \in H_{l\overline{\mu}}(\Omega \times \Omega)$ и имеет место оценка (1.13). Полагая $r = \max\left\{|T|_k^{1/k}\, |T|_0^{-1/k}, |T^*|_k^{1/k}\, |T|_0^{-1/k}, 1\right\}$ имеем

$$|T|_k \le r^k |T|_0, \qquad |T^*|_k \le r^k |T|_0, \qquad 1 \le r. \tag{1.14}$$

Отметим, что T^* – интегральный оператор с ядром Гильберта–Шмидта $K^*(x, y) = \overline{K(y, x)}$. Рассмотрим оператор T^α, отображающий $f \in L_2(\Omega)$ в $D^\alpha T f$, $(\alpha, \mu] \le l$. Так как $Tf \in H_{k\mu}(\Omega)$, то $D^\alpha Tf \in H_{(k-(\alpha,\mu))\mu}(\Omega)$ и $k - (\alpha, \mu) \ge k - l = [|\mu|/2] + 1 > |\mu|/2$. Следовательно, T^α – ограниченное линейное отображение из $L_2(\Omega)$ в $H(k-c)\mu(\Omega)$ и T^α – интегральный оператор с ядром Гильберта–Шмидта $K^\alpha(x, y)$. Пусть $\{\Phi_j\}$ является ортонормальным базисом в $L_2(\Omega)$ и пусть $u_j = T\Phi_j$, $f = \sum_{j=1}^N a_j \Phi_j$, $u = Tf = \sum_{j=1}^N a_j u_j$, где $a_1, \ldots, a_N$ суть комплексные числа. Из теоремы вложения Соболева для анизотропных классов, с точностью до множества меры нуль имеем $u_j \in C^l(\Omega)$, $u \in C^l(\Omega)$. Следовательно, для фиксированного индекса α, удовлетворяющего условию $(\alpha, \mu) \leq l$, для всех $x \in (\Omega)$, получаем

$$u(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j u_j(x), \qquad D^\alpha u(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j D^\alpha u_j(x). \tag{1.15}$$

Полагая $u = Tf$ при $r \geq 1$, получим $|D^\alpha u(x)| \leq \gamma \cdot r^{-(k-|\mu|/2-(\alpha,\mu))}(|T|_k + +r^k |T|_0) \|f\|_0$. Из (1.15) следует, что

$$\sum_{j=1}^{N} a_j D^\alpha u_j(x) \leq \gamma \cdot r^{-(k-|\mu|/2-(\alpha,\mu))} \left(|T|_k + r^k |T|_0\right) \left(\sum_{j=1}^{N} |a_j|^2\right)^{1/2}$$

для любых постоянных $a_1, \ldots, a_N$ и для всех $x \in \Omega$. Для фиксированного x пусть $a_j = \overline{D^\alpha u_j(x)}$. Имеем

$$\sum_{j=1}^{N} |D^\alpha u_j(x)|^2 \leq \gamma^2 \cdot r^{-2(k-|\mu|/2-(\alpha,\mu))} \left(|T|_k + r^k |T|_0\right)^2.$$

Интегрируя по x на Ω, используя $D^\alpha u_j = D^\alpha T\Phi_j = T^\alpha \Phi$, получаем

$$\sum_{j=1}^{N} \|T^\alpha \Phi_j\|_0^2 \leq \gamma^2 |\Omega| r^{-2(k-|\mu|/2-(\alpha,\mu))} \left(|T|_k + r^k |T|_0\right)^2.$$

Так как последнее неравенство имеет место для всех положительных целых N, то из (1.14) получаем

$$|||D^\alpha T||| = |||T^\alpha||| \leq 2\gamma |\Omega|^{1/2} r^{|\mu|/2+(\alpha,\mu)} |T|_0. \tag{1.16}$$

Теперь покажем, что $K^\alpha(x,y) = D_x^\alpha K(x,y)$. Пусть $\varphi(x,y) = a(x)\,b(y)$, где $a, b \in C_0^\infty(\Omega)$. Так как K^α является ядром соответствующего $T^\alpha = D^\alpha T$, то для почти всех $x \in \Omega$ имеем $\int_\Omega K^\alpha(x,y)\, b(y)\, dy = (D^\alpha T b)(x)$. Следовательно

$$\begin{aligned} \int_{\Omega\times\Omega} K^\alpha(x,y)\,\varphi(x,y)\,dx\,dy = \int_\Omega a\, D^\alpha (Tb)\,dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha a\, T\, b\, dx = \\ = (-1)^\alpha \int_{\Omega\times\Omega} K\, D^\alpha \varphi\, dx\, dy. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Равенство (1.17) выполняется также для любой функции φ вида $\varphi(x,y) = \sum_{j=1}^{N} a_j(x)\, b_j(y)$, где $a_j,\ b_j \in C_0^\infty(\Omega)$. Покажем, что (1.17) имеет место для всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega\times\Omega)$. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\Omega\times\Omega)$. Тогда существует компактно вложенное в

Ω открытое множество Ω' ($\Omega' \subset\subset \Omega$) такое, что $\mathrm{supp}(\varphi) \subset \Omega' \times \Omega'$. Предположим, что функция $\varepsilon(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ выбрана так, что $\varepsilon(x) \equiv 1$ для $x \in \Omega'$. Пусть $Q = \left\{(x, y) : |x_k| < \frac{1}{2}, |y_k| < \frac{1}{2}\right\}$ куб, содержащий $\Omega \times \Omega$. Продолжим функцию $\varphi(x, y)$ на Q так, что $\varphi \equiv 0$ на $Q \setminus \mathrm{supp}(\varphi)$, а затем периодически продолжим на $E_n \times E_n$. Нетрудно убедиться, что так продолженная функция φ будет периодической на $C^\infty(E_n \times E_n)$. Поэтому разложение Фурье функции φ сходится равномерно к $\varphi : \varphi(x, y) = \sum_{\xi,\eta} a_{\xi,\eta} e^{2\pi i(x\cdot\xi + y\cdot\eta)}$, где сумма берется по всем ξ и η с целыми компонентами. Имеем также $D_x^\alpha \varphi(x, y) = \sum\limits_{\xi,\eta} (2\pi i\xi)^\alpha a_{\xi,\eta} e^{2\pi i(x\cdot\xi + y\cdot\eta)}$. Рассмотрим функцию

$$\varphi_N(x, y) = \varepsilon(x)\,\varepsilon(y) \sum_{|\xi|+|\eta|\le N} a_{\xi,\eta}\, e^{2\pi i(x\cdot\xi + y\cdot\eta)} =$$

$$= \sum_{|\xi|+|\eta|\le N} a_{\xi,\eta}\, \varepsilon(x) e^{2\pi i x\cdot\xi}\, \varepsilon(y)\, e^{2\pi i y\cdot\eta)}.$$

Функции $\varepsilon(x)\, e^{2\pi i x\cdot\xi}$ и $\varepsilon(y)\, e^{2\pi i y\cdot\eta}$ принадлежат $C_0^\infty(\Omega)$. Следовательно, для функции $\varphi_N(x, y)$ имеет место равенство (1.17)

$$\int_{\Omega\times\Omega} K^\alpha \varphi_N\, dx\, dy = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega\times\Omega} K\, D_x^\alpha \varphi_N\, dx\, dy,$$

а при $N \to \infty$ предельные соотношения в пространстве $L_2(\Omega)$: $\varphi_N \to \varepsilon(x)\,\varepsilon(y)\varphi(x, y)$ и $D_x^\alpha \varphi_N \to D_x^\alpha(\varepsilon(x)\,\varepsilon(y)\,\varphi(x, y))$. Отсюда получим

$$\int_{\Omega\times\Omega} K^\alpha \varepsilon(x)\,\varepsilon(y)\,\varphi\, dx\, dy = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega\times\Omega} K\, D_x^\alpha(\varepsilon(x)\varepsilon(y)\varphi)\, dx\, dy \text{ или}$$

$$\int_{\mathrm{supp}\Phi} K^\alpha \varepsilon(x)\,\varepsilon(y)\,\varphi\, dx\, dy = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathrm{supp}\Phi} K\, D_x^\alpha(\varepsilon(x)\,\varepsilon(y)\,\varphi)\, dx\, dy.$$

Если $(x, y) \in \mathrm{supp}(\varphi) \subset \Omega' \times \Omega'$, то $\varepsilon(x) \equiv 1$, $\varepsilon(y) \equiv 1$ в некоторой окрестности точки (x, y). Следовательно, формула (1.17) имеет место для всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \times \Omega)$. Отсюда следует, что $K(x, y)$ имеет все слабые производные $D_x^\alpha K(x, y)$, $(\alpha, \mu) \le l$. Для доказательства существования слабых производных $D_y^\alpha K(x, y)$, $(\alpha, \mu) \le l$ выполним все предыдущие шаги, взяв вместо оператора T оператор T^*. Так как $K^*(x, y) = \overline{K(y, x)}$ является ядром оператора T^*, то из вышеполученных результатов следует существование слабых производных $D_x^\alpha \overline{K(y, x)}$, $(\alpha, \mu) \le l$ и имеет место оценка, аналогичная (1.16) :

$$|||D^\alpha T^*||| \le 2\gamma\, |\Omega|^{1/2} r^{|\mu|/2 + (\alpha,\mu)}\, |T|_0. \tag{1.18}$$

Отметим, что $D_x^\alpha \overline{K(y, x)}$ является ядром оператора $D^\alpha T^*$. Это означает, что для $K(x, y)$ существуют все слабые производные $D_y^\alpha K(x, y)$, $(\alpha, \mu) \le l$. Комбинируя

(1.16) и (1.18) с $|||T||| = \|K(x,y)\|_{L_2(\Omega\times\Omega)}$, для $(\alpha,\mu) \le l$ получим

$$\|D_x^\alpha K\|_{0,\Omega\times\Omega} \le 2\gamma\,|\Omega|^{1/2}\, r^{|\mu|/2+(\alpha,\mu)}\,|T|_0,\ \|D_y^\alpha K\|_{0,\Omega\times\Omega} \le 2\gamma|\Omega|^{1/2}\, r^{|\mu|/2+(\alpha,\mu)}\,|T|_0.$$

А так как $\Omega\times\Omega$ — связное множество, удовлетворяющее свойству конуса, то $K \in H_{l,\mu}(\Omega\times\Omega)$ и

$$|K|_{i,\Omega\times\Omega} \le \gamma_1\, r^{|\mu|/2+i}\,|T|_0, \qquad i = 0,1,\dots,l. \tag{1.19}$$

Рассмотрим след $K(x,y)$ на многообразии $x = y$. Так как $K \in H_{l,\mu}(\Omega\times\Omega)$, то по теореме о следах в анизотропных пространствах H_μ (см. [2]) и из (1.19) получаем, что след $K(x,y)$ на диагонали $(\Omega\times\Omega)$ существует и выполняется неравенство

$$\left[\int_\Omega |K(x,x)|^2\,dx\right]^{1/2} \le \gamma_2\, r^{-l+|\mu|/2}\,\left(|K|_{l,\Omega\times\Omega} + r^l\,|K|_0\right) \le 2\gamma_3\, r^{|\mu|}|T|_0, \tag{1.20}$$

где r равно одному из чисел $|T|_k^{1/k}|T|_0^{-1/k}$ или $|T^*|_k^{1/k}|T|_0^{-1/k}$. Следовательно $r^{|\mu|} \le |T|_0^{-|\mu|/k}\left[|T|_k^{|\mu|/k} + |T^*|_k^{|\mu|/k}\right]$ и неравенство (1.13) выполняется. Теорема 1.5 доказана.

Следствие 1.2. Предположим, что для открытого множества $a\Omega$, $a > 0$ и оператора $T_{(a)}$ на $L_2(a\Omega)$ выполнены все условия Теоремы 1.5. Если $K_{(a)}$ – ядро соответствующее оператору $T_{(a)}$, то

$$a^{|\mu|/2}\left[\int_{a\Omega}\left|K_{(a)}(x,x)\right|^2\,dx\right]^{1/2} \le$$
$$\le \gamma\left[a^{|\mu|}\left(|T_{(a)}|_k^{|\mu|/k} + |T_{(a)}^*|_k^{|\mu|/k}\right)|T_{(a)}|_0^{1-|\mu|/k} + |T_{(a)}|_0\right].$$

Доказательство : Пусть $u(y)$ — функция, определенная на Ω и $u_1^0(x) = u(a^{-\mu}x)$, $x \in a\Omega$. Имеем $u_1^0(a^\mu x) = u(x)$, $x \in \Omega$. Если $u \in H_{l,\mu}(\Omega)$, то $u_1^0 \in H_{l,\mu}(\Omega)$ и

$$|u_1^0|_{l,a\Omega} = a^{|\mu|/2-l}\,|u|_{l,\Omega}. \tag{1.21}$$

Для $f \in L_2(\Omega)$ определим оператор T согласно соотношению $(Tf)_1^0 = T_{(a)}f_1^0$. Так как $R(T_{(a)}) \subset H_{k,\mu}(a\Omega)$, то получаем $Tf \in H_{k,\mu}(\Omega)$. Легко проверить, что $(T^*f)_1^0 = T_{(a)}^*f_1^0$. Из (1.21) имеем

$$\frac{|Tf|_{l,\Omega}}{|f|_{0,\Omega}} = \frac{a^{l-|\mu|/2}\,|(Tf)_1^0|_{l,a\Omega}}{a^{-|\mu|/2}|f_1^0|_{0,a\Omega}} = \frac{a^l|T_{(a)}f_1^0|_{l,a\Omega}}{|f_1^0|_{0,a\Omega}}.$$

Следовательно, $|T|_l = a^l\,|T_{(a)}|_l$, $|T^*|_l = a^l\,|T^*_{(a)}|_l$. Подставляя эти соотношения в (1.13), для ядра K оператора T получаем

$$\left[\int_\Omega |K_{(a)}(x,x)|^2\,dx\right]^{1/2} \le \gamma\left[a^{|\mu|}\left(|T_{(a)}|_k^{|\mu|/k} + |T^*_{(a)}|_k^{|\mu|/k}\right)|T_{(a)}|_0^{1-|\mu|/k} + |T_{(a)}|_0\right]. \tag{1.22}$$

Обозначая через $K_{(a)}(x,y)$ ядро оператора $T_{(a)}$, для $f \in L_2(\Omega)$ и $y = a^\mu\xi$ получаем

$$(Tf)^0_1(x) = (Tf)(a^{-|\mu|}x) == \int_{a\Omega} K(a^{-|\mu|}x, a^{-|\mu|}y)\,f^0_1(y)\,dy =$$
$$= (T_{(a)}\,f^0_1)(x) = \int_{a\Omega} K_{(a)}(x,y)\,f^0_1(y)\,dy.$$

Следовательно, $K_{(a)}(x,y) = a^{-|\mu|}\,K(a^{-|\mu|}x, a^{-|\mu|}y)$. Полагая $y = a^{-|\mu|}\,x$, имеем

$$\int_{a\Omega}|K_{(a)}(x,x)|^2\,dx = \int_{a\Omega} a^{-2|\mu|}\,|K(a^{-|\mu|}x, a^{-|\mu|}x)|^2\,dx = a^{-|\mu|}\int_{a\Omega}|K(y,y)|^2\,dy.$$

Сравнение с (1.22) завершает доказательство Следствия 1.2.

Теорема 1.6. При условиях Теоремы 1.5, пусть θ – направление минимального роста видоизмененной резольвенты оператора T и $\{\lambda_j\}$ – последовательность характеристических чисел оператора T. Тогда для каждого λ, $\lambda \neq \lambda_j$ видоизмененная резольвента T_λ является интегральным оператором с ядром Гильберта-Шмидта $K_\lambda(x,y) \in H_{\lambda\mu}(\Omega\times\Omega)$. Кроме того, $K_\lambda(x,y)$ имеет след на диагонали $x = y$ и

$$\left[\int_\Omega |K_\lambda(x,x)|^2\,dx\right]^{1/2} = O(|\lambda|^{-1+|\mu|/k}) \tag{1.23}$$

при $|\lambda| \to \infty$, $\arg\lambda = \theta$. Для $\lambda \neq \lambda_j$ имеем

$$\int_\Omega |K_\lambda(x,x)|\,dx = \sum_j \frac{1}{\lambda_j - \lambda}. \tag{1.24}$$

Доказательство : Для $\lambda \in \rho_m(T)$ и $T_\lambda = T(1-\lambda T)^{-1}$ имеем $R(T_\lambda) \subset R(T) \subset H_{k\mu}(\Omega)$. Так как T и $(1-\lambda T)^{-1}$ коммутативны, то $R(T^*_\lambda) \subset R(T^*) \subset H_{k\mu}(\Omega)$. Поэтому, согласно Теореме 1.5 оператор T_λ имеет ядро Гильберта-Шмидта $K_\lambda(x,y) \in H_{\lambda\mu}(\Omega\times\Omega)$ и

$$\left[\int_\Omega |K_\lambda(x,x)|^2\,dx\right]^{1/2} \le \gamma\left[\left(|T_\lambda|_k^{|\mu|/k} + |(T_\lambda)^*|_k^{|\mu|/k}\right)|T_\lambda|_0^{1-|\mu|/k} + |T_\lambda|_0\right]. \tag{1.25}$$

Для $\lambda \in E(\theta, a)$ имеем $|T_\lambda|_0 \le c\,|\lambda|^{-1}$, $\|T_\lambda\|_k \le \|T\|_k\,(1+c)$. Так как $(1-\lambda T)^{-1} = 1 + \lambda T_\lambda$ для $\lambda \in E(\theta, a)$, то очевидно получаем $\|(T_\lambda)^*\|_k \le \|T^*\|_k \|(1-\lambda T)^{-1*}\|_0 = \|T^*\|_k \|(1-\lambda T)^{-1}\|_0 \le \|T^*\|_k\,(1+c)$. Следовательно, из (1.25) получаем

$$\left[\int_\Omega |K_\lambda(x,x)|^2 dx\right]^{1/2} \le \gamma \left[(1+c)^{|\mu|/k}\left(\|T\|_k^{|\mu|/k} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \|(T^*\|_k^{|\mu|/k}\right) c^{-1+|\mu|/k}\,|\lambda|^{-1+|\mu|/k} + c|\lambda|^{-1}\right] \le c\,|\lambda|^{-1+|\mu|/k}. \tag{1.26}$$

Остается доказать (1.24). Из Следствия 1.1 вытекает, что $\lambda_j \ge \mathrm{const}\, j^{k/|\mu|}$ для достаточно большого j. Так как $k > |\mu|$, то ряд $\sum_j |\lambda_j|^{-1}$ сходится. По теореме 12.21 из [1], для $\lambda \in \rho_m(T)$ имеем

$$\mathrm{tr}(\lambda T T_\lambda) = \sum_j \frac{\lambda}{(\lambda_j - \lambda)\,\lambda_j} = \sum_j \frac{1}{\lambda_j - \lambda} - \sum_j \frac{1}{\lambda_j}. \tag{1.27}$$

Так как $(1-\lambda T)T_\lambda = (1-\lambda T)T(1-\lambda T)^{-1} = (1-\lambda T)(1-\lambda T)^{-1}T = T$, то $\lambda T T_\lambda = T_\lambda - T$. По Теореме 1.5 интеграл $\int_\Omega K(x,x)dx$ существует, и поэтому имеем

$$\mathrm{tr}(\lambda T T_\lambda) = \int_\Omega [K_\lambda(x,x) - K(x,x)]\,dx.$$

Из (1.27) следует, что

$$\int_\Omega |K_\lambda(x,x)|\,dx = \sum_j \frac{1}{\lambda_j - \lambda} + c,$$

где c - постоянная, не зависящая от λ. Покажем, что $c = 0$. Из оценки (1.23) следует, что $\int_\Omega K_\lambda(x,x)\,dx \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$, $\arg\lambda = \theta$. Следовательно, нам надо показать, что $\sum_j \dfrac{1}{\lambda_j - \lambda} \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$, $\arg\lambda = \theta$. По теореме 12.6 из [1] имеем $|\arg\lambda_j - \theta| < \delta$ для $|\lambda_j| > a$ и некоторого $\delta > 0$. Теперь, если $z = r e^{i\theta}$, $w = s e^{i\varphi}$ и $\delta \le |\theta - \varphi| \le \pi/2$, то имеем $|z-w|^2 = r^2 - 2rs\cos(\theta-\varphi) + s^2 = r^2\sin^2(\theta-\varphi) + (r\cos(\theta-\varphi) - s^2) \ge |z|^2\sin^2\delta$. Если $\pi/2 \le |\theta-\varphi| \le \pi$, то $|z-w|^2 \ge r^2 + s^2 \ge |z|^2$. Следовательно, $|z-w| \ge |z|\sin\delta$ для $\delta \le |\theta-\varphi| \le \pi$. Применяя это неравенство для λ_j и λ получаем

$$|\lambda_j - \lambda| \ge \max(|\lambda_j|, |\lambda|)\sin\delta. \tag{1.28}$$

Следовательно, если $j \ge j_0$, $\lambda \in E(\theta, a)$ и все λ_j лежат вне этого угла, то для $|\lambda| \to \infty$ и $\lambda \in E(\theta, a)$ имеем

$$\left|\sum_j \frac{1}{\lambda_j - \lambda}\right| \le \frac{\mathrm{const}}{|\lambda|} + \csc\delta \sum_{j \le j_0} \frac{1}{\max(|\lambda_j|, |\lambda|)} \to 0.$$

Отсюда получаем, что $c = 0$. Теорема 1.6 доказана.

§2. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ПОЛУЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

В этом параграфе изучается линейный дифференциальный оператор $P(x, D) = \sum_{(\alpha,\mu)\leq k} a_\alpha(x) D^\alpha$, где $a_\alpha(x)$ — действительные функции, определенные на множестве Ω. Оператор $P_0(x, D) = \sum_{(\alpha,\mu)=k} a_\alpha(x) D^\alpha$ называется главной частью оператора $P(x, D)$. Оператор $P(x, D)$ называется полуэллиптическим, если существует постоянная $C > 0$ такая, что для каждого $\xi \in R^n$ и $x \in \Omega$ $P_0(x, \xi) \geq C\left(\xi_1^{2m_1} + \ldots + \xi_n^{2m_n}\right)^k$.

Теорема 2.1. **Пусть T — ограниченное линейное преобразование на $L_2(\Omega)$ такое, что области значений операторов T и T^* содержатся в $H_{k\mu}(\Omega)$, где $k > 2[|\mu|/2] + 1$, а θ — направление минимального роста видоизмененной резольвенты оператора T. Предположим, что существует открытое множество $\Omega_0 \subset \Omega$ и полуэллиптический оператор $P(x, D)$ в Ω_0 вида $P(x, D) = \sum_{(\alpha,\mu)\leq k} a_\alpha(x)\, D^\alpha$, где $a_\alpha \in C^0(\Omega_0)$ и удовлетворяются следующие условия :**

1°. Для $x \in \Omega_0$, всех вещественных ξ и всех комплексных λ таких, что $\arg\lambda = \theta$ имеем $P(x, i\xi) \neq \lambda$;

2°. Для любого $x^0 \in \Omega_0$ и $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U \subset \Omega_0$ точки x^0 и константа c_ε такие, что для всех $f \in L_2(\Omega)$ имеем

$$\begin{aligned} &\|P_0 T f - f\|_{0,U} \leq \varepsilon \|f\|_{0,\Omega} + c_\varepsilon \|Tf\|_{k-1,\Omega}, \\ &\|P_0^* T^* f - f\|_{0,U} \leq \varepsilon \|f\|_{0,\Omega} + c_\varepsilon \|T^* f\|_{k-1,\Omega}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где P_0^* – сопряженный оператор для P_0, а $P_0(D)$ — главная часть оператора $P(x, D)$. Тогда имеют место следующие утверждения :

a) Для любого $\lambda \in \rho_m(T)$, T_λ является интегральным оператором с ядром Гильберта–Шмидта $K_\lambda \in H_{l\mu}(\Omega \times \Omega)$, где $l = k - \left[\frac{|\mu|}{2}\right] - 1$.

b) Ядро K_λ имеет след $K_\lambda(x, x) \in L_2(\Omega)$ на диагонали $(\Omega \times \Omega)$ и для $\lambda \in E(\theta, a)$, $|\lambda| \to \infty$ и постоянной c, зависящей только от P, θ и Ω_0, имеем

$$\left[\int_\Omega |K_\lambda(x, x)|^2\, dx\right]^{1/2} = O(|\lambda|^{-1+|\mu|/k}),\ \int_\Omega K_\lambda(x, x)\, dx =$$
$$= c|\lambda|^{-1+|\mu|/k} + o(|\lambda|^{-1+|\mu|/k}).$$

c) Если $\rho_\theta(x) = (2\pi)^n \int_{E_n} (P(x, i\xi) - e^{i\theta})^{-1}\, d\xi$ и $\Omega_\delta \subset\subset \Omega_{\delta'} \subset\subset \Omega_0$, где $\Omega_\delta \subset \Omega_0$ состоит из точек, расстояния которых от $\partial\Omega_0$ больше δ, то $c = \lim_{\delta\to 0} \int_{\Omega_{\delta'}} \rho_\theta(x)\, dx$.

Доказательство : Вначале покажем, что из условия 2 вытекает : для произвольного $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U' \subset \Omega_0$ точки x_0 и постоянная c'_ε такие, что для всех $f \in L_2(\Omega)$ и достаточно больших $|\lambda|$, $\arg\lambda = \theta$ имеем

$$\begin{gathered} \|(P_0 - \lambda)\, T_\lambda f - f\|_{0,U'} \le \varepsilon \, \|f\|_{0,\Omega} + c'_\varepsilon \|T_\lambda f\|_{k-1,\Omega}, \\ \|(P_0^* - \lambda)\,(T_\lambda)^* f - f\|_{0,U'} \le \varepsilon \, \|f\|_{0,\Omega} + c'_\varepsilon \|(T_\lambda)^* f\|_{k-1,\Omega}. \end{gathered} \tag{2.1'}$$

В самом деле, имеем $(P_0 - \lambda)\, T_\lambda f - f = P_0 T\,(1-\lambda T)^{-1} - (1-\lambda T)^{-1} f$. Для заданного ε, пусть U - окрестность точки x_0 такая, что условие (2.1) выполняется. Тогда применяя неравенство (2.1) к $(1-\lambda T)^{-1} f$, получаем $\|(P_0 - \lambda) T_\lambda f - f\|_{0,U'} \le \varepsilon \, \|(1 - \lambda T)^{-1}\|_0 \, \|f\|_{0,\Omega} + c_\varepsilon \, \|T_\lambda f\|_{k-1,\Omega}$. Для достаточно большого $|\lambda|$, $\arg\lambda = \theta$ имеем

$$\|(1 - \lambda T)^{-1}\|_{0,\Omega} \le 1 + |\lambda| \, \|T_\lambda\|_0 \le 1 + K,$$

где K - постоянная такая, что $\|T_\lambda\|_0 \le K\,|\lambda|^{-1}$. Обозначая $\varepsilon' = \varepsilon(1 + K)^{-1}$ и выбирая U', удовлетворяющей условию (2.1) с $\varepsilon = \varepsilon'$, получаем первое неравенство в (2.1′). Второе неравенство в (2.1′) доказывается аналогично. Пусть Ω'_δ фиксировано и $\Omega' \subset\subset \Omega'_\delta$. Для $\varepsilon > 0$ существует группа конгруентных непересекающихся кубов Q'_j таких, что $\Omega' \subset \bigcup_{j=1}^{N} Q'_j \subset \Omega'_\delta$ и оценки (2.1′) имеют место в Q_j, где Q_j - куб концентрический с Q'_j и имеющий стороны $b^{\mu_k} = 2a^{\mu_k}$, $k = \overline{1,n}$, где a^{μ_k} — стороны куба Q'_j. Пусть $\arg\lambda = \theta$. Существует фундаментальное решение $F^j_\lambda(x)$ для полуэллиптического оператора $P(x^j, D)$ с постоянными коэффициентами, где x^j - центр куба Q'_j. Для достаточно большого $|\lambda|$, $\arg\lambda = \theta$ существует видоизмененная резольвента T_λ. Продолжим функцию $f \in L_2(Q'_j)$ вне Q'_j, полагая $f(x) \equiv 0$, $x \notin Q'_j$, и определим оператор S^j_λ на $L_2(Q'_j)$ по формуле $S^j_\lambda f = T_\lambda f - F^j_\lambda * f$. Из соотношений $R(T_\lambda) \subset R(T) \subset H_{k\mu}(\Omega)$ и $F^j_\lambda * f \in H_{k\mu}(E_n)$ следует, что $R(S^j_\lambda) \subset H_{k\mu}(Q'_j)$. Следовательно S^j_λ — ограниченное линейное преобразование из $L_2(Q'_j)$ в $H_{k\mu}(Q'_j)$. Так как $k > 2\left[\frac{|\mu|}{2}\right] + 1$, то условия Теоремы 1.6 выполнены. Поэтому для оператора T_λ существует ядро Гильберта-Шмидта $K_\lambda(x, x) \in L_2(\Omega)$. Согласно Теореме 1.5, аналогичные аргументы применимы к ядру $G^j_\lambda(x, y)$ оператора S^j_λ. В этом случае оператор $(S^j_\lambda)^*$ определяется по формуле $(S^j_\lambda)^* = (T_\lambda)^* f - \int_{Q'_j} \overline{F^j_\lambda(y - x)}\, f(y)\, dy$ и фундаментальное решение оператора $P^*(x^j, D) - \overline{\lambda}$ является $(F^j_\lambda)^* = \overline{F^j_\lambda(-x)}$. Следовательно, $R((S^j_\lambda)^*) \subset H_{k\mu}(Q'_j)$. По Теореме 1.5, для ядер операторов S^j_λ и $(S^j_\lambda)^*$ имеем

$$G^j_\lambda(x, y) = K_\lambda(x, y) - F^j_\lambda(x - y), \quad (G^j_\lambda)^*(x, y) = K^*_\lambda(x, y) - (F^j_\lambda)^*(x - y), \tag{2.2}$$

где $(G_\lambda^j)^*$ и K_λ^* суть ядра операторов $(S_\lambda^j)^*$ и T_λ^*, соответственно. Для куба Q_{δ_0} со сторонами $(\delta_0^{\mu_1}, \ldots, \delta_0^{\mu_n})$ пусть $\gamma = \gamma(Q_{\delta_0}, \mu)$ – постоянная, удовлетворяющая (1.2). По Следствию 1.2, для $b^{\mu_i} < \delta_0^{\mu_i}$, $i = \overline{1, n}$ имеем

$$\left(\frac{b}{\delta_0}\right)^{|\mu|/2} \left(\int_{Q'_j} |G_\lambda^j(x,x)|^2 \, dx\right)^{1/2} \leq \gamma \left[\left(\frac{b}{\delta_0}\right)^{|\mu|} \left(|S_\lambda^j|_k^{|\mu|/k} + \right.\right. \tag{2.3}$$
$$\left.\left. + |(S_\lambda^j)^*|_k^{|\mu|/k}\right) \cdot |S_\lambda^j|_0^{1-|\mu|/k} + |S_\lambda^j|_0\right].$$

Получим некоторые грубые оценки для полунорм оператора S_λ^j. По неравенству треугольника для $f \in L_2(Q'_j)$ имеем

$$|S_\lambda^j f|_i \leq |T_\lambda f|_i + |F_\lambda^j * f|_i. \tag{2.4}$$

Так как $||T_\lambda|_0 \leq K\,|\lambda|^{-1}$, то для достаточно большого $|\lambda|$, $\arg\lambda = \theta$ имеем $||T_\lambda||_k \leq ||T||_k\,(1 + K)$. Отсюда получаем $||S_\lambda^j f||_{k,Q_j} \leq [||T||_k\,(1 + K) + \mathrm{const}]\;||f||_{0,Q_j}$. Следовательно, $||S_\lambda^j f||_k$ ограничена для всех λ. Из Леммы 1.3 получаем

$$|S_\lambda^j|_i \leq \mathrm{const}\,|S_\lambda^j|_0^{1-i/k} ||S_\lambda^j||_k^{i/k} \leq \mathrm{const}\,|S_\lambda^j|_0^{1-i/k}. \tag{2.5}$$

Для $f \in L_2(Q'_j)$ имеем

$$||F_\lambda^j * f||_{0,Q'_j} \leq |\lambda|^{-1} \left[\omega ||f||_{0,E_n} + \mathrm{const}||F_\lambda^j * f||_{k,E_n}\right] \leq \mathrm{const}\,|\lambda|^{-1}\,||f||_{0,Q'_j}.$$

Таким образом, из (2.4), находим $|S_\lambda^j|_0 \leq |T_\lambda|_0 + \mathrm{const}\,|\lambda|^{-1} \leq \mathrm{const}|\lambda|^{-1}$. А из (2.5) следует, что $|S_\lambda^j|_i \leq \mathrm{const}\,|\lambda|^{i/k-1}$, $0 \leq i \leq k-1$. Следовательно, для достаточно большого $|\lambda|$ имеем

$$||S_\lambda^j||_{k-1} \leq \mathrm{const}\,|\lambda|^{-1/k}. \tag{2.6}$$

Теперь используя (2.1′), получим более точные оценки. По Лемме 1.3 для $f \in L_2(Q'_j)$ имеем

$$||(P(x^j, D) - \lambda)\,T_\lambda f - f||_{0,Q_j} = ||(P(x^j, D) - \lambda)\,S_\lambda^j f||_{0,Q_j} \leq$$
$$\leq \varepsilon ||f||_{0,Q_j} + c'_\varepsilon\,||T_\lambda f||_{k-1,Q_j} \leq \left[\varepsilon + c_\varepsilon\,|\lambda|^{-1/k}\right] ||f||_{0,Q_j}.$$

Следовательно, для достаточно большого $|\lambda|$, $\arg\lambda = \theta$ получаем

$$||(P(x^j, D) - \lambda)\,S_\lambda^j f||_0 \leq 2\varepsilon\,||f||_{0,Q'_j}. \tag{2.7}$$

Применяя лемму 14.2 из [1] для случая полуэллиптических операторов, из (2.6) находим

$$|S_\lambda^j f|_{i,Q_j} \leq |\lambda|^{i/k-1} \left[2\omega\varepsilon ||f||_{0,Q'_j} + |\lambda|^{-1/k}\,||f||_{0,Q'_j}\right].$$

Следовательно, для достаточно большого $|\lambda|$, $\arg\lambda = \theta$ имеем $|S_\lambda^j|_{i,Q_j} \leq 3\omega\varepsilon|\lambda|^{i/k-1}$, $(|S_\lambda^j)^*|_{i,Q_j} \leq 3\omega\varepsilon|\lambda|^{i/k-1}$. Подставляя в (2.3) и используя (2.2), для достаточно больших $|\lambda|$ находим

$$\int_{Q_j} |K_\lambda(x,x) - F_\lambda^j(0)|^2\,dx \leq (12\gamma\omega)^2\,\varepsilon^2\left(\frac{b}{\delta_0}\right)^{\mu}|\lambda|^{2|\mu|/k-2}.$$

Просуммировав по всем кубам Q'_j и используя $b^{|\mu|} = |Q'_j|$, получаем

$$\sum_j \int_{Q'_j}\left|K_\lambda(x,x) - F_\lambda^j(0)\right|^2 dx \leq (12\gamma\omega)^2\,\varepsilon^2\,\delta_0^{-|\mu|}\left|\bigcup_{j=1}^{N} Q'_j\right||\lambda|^{2|\mu|/k-2} \leq \tag{2.8}$$
$$\leq c\varepsilon^2\,|\lambda|^{2|\mu|/k-2}.$$

Имеем

$$F_\lambda^j(0) = |\lambda|^{|\mu|/k-1}(2\pi)^{-n}\int_{E_n}\left(P(x^j, i\xi) - e^{i\theta}\right)^{-1} d\xi = |\lambda|^{|\mu|/k-1}\rho_\theta(x^j).$$

Поэтому из (2.8) выводим, что

$$\sum_j \int_{Q'_j}\left||\lambda|^{1-|\mu|/k}\,K_\lambda(x,x) - \rho_\theta(x^j)\right|^2 dx \leq c\,\varepsilon^2. \tag{2.9}$$

Пусть $\widetilde{\rho}_\theta(x)$ — функция, определенная на Ω_0 такая, что $\widetilde{\rho}_\theta(x) \equiv \rho_\theta(x^j)$, $x \in Q'_j$, $\widetilde{\rho}_\theta(x) \equiv 0$, $x \in \Omega_0 \setminus \bigcup_j Q'_j = \Omega_0 \setminus E$. Используя (2.9) и неравенство Коши-Шварца получим

$$\left|\int_E |\lambda|^{1-|\mu|/k} K_\lambda(x,x)\,dx - \int_E \widetilde{\rho}_\theta(x)\,dx\right| \leq \tag{2.10}$$
$$\left[\int_E\left||\lambda|^{1-|\mu|/k}\,K_\lambda(x,x) - \widetilde{\rho}_\theta(x)\right|^2 dx\right]^{1/2} \leq c\,|\Omega_0|^{1/2}\,\varepsilon.$$

Применяя Теорему 1.6 получим, что $K_\lambda \in H_{k\mu}(\Omega\times\Omega)$ и для достаточно больших $|\lambda|$, $\arg\lambda = \theta$ имеем

$$|\lambda|^{1-|\mu|/k}\left[\int_\Omega |K_\lambda(x,x)|^2\,dx\right]^{1/2} \leq c.$$

Следовательно, по неравенству Коши-Шварца имеем

$$|\lambda|^{1-|\mu|/k}\left[\int_{\Omega_0\setminus E}|K_\lambda(x,x)|\,dx\right] \leq c\,|\Omega_0 \setminus E|^{1/2}.$$

Из (2.10), применяя неравенство треугольника, получаем

$$\lim_{\substack{|\lambda|\to\infty \\ \arg\lambda=\theta}}\sup\left||\lambda|^{1-|\mu|/k}\int_{\Omega_0} K_\lambda(x,x)\,dx - \int_{\Omega'_\varepsilon}\rho_\theta(x)\,dx\right| \leq$$
$$\leq c\,|\Omega_0|^{1/2}\,\varepsilon + c\,|\Omega_0 \setminus E|^{1/2} + \left|\int_E \rho_\theta(x)\,dx - \int_E \widetilde{\rho}_\theta(x)\,dx\right| + \int_{\Omega'_\varepsilon - \Omega'}|\rho_\theta(x)|\,dx.$$

Очевидно $\int_E \widetilde{\rho}_\theta(x)\,dx$ является суммой Римана интеграла $\int_E \rho_\theta(x)\,dx$, поэтому

$$\lim_{\substack{|\lambda|\to\infty \\ \arg\lambda=\theta}} \sup \left| |\lambda|^{1-|\mu|/k} \int_{\Omega_0} K_\lambda(x,x)\,dx - \int_{\Omega'_\delta} \rho_\theta(x)\,dx \right| \le$$
$$\le c\,|\Omega_0|^{1/2}\varepsilon + c\,|\Omega_0 - \Omega'|^{1/2} + \int_{\Omega'_\delta - \Omega'} |\rho_\theta(x)|\,dx.$$

Так как $\Omega' \subset\subset \Omega'_\delta$ и $\varepsilon > 0$ произвольны, то из последнего неравенства следует

$$\lim_{\substack{|\lambda|\to\infty \\ \arg\lambda=\theta}} \sup \left| |\lambda|^{1-|\mu|/k} \int_{\Omega_0} K_\lambda(x,x)\,dx - \int_{\Omega'_\delta} \rho_\theta(x)\,dx \right| \le c\,|\Omega_0 - \Omega'|^{1/2} \le c\,|\Omega_0 - \Omega_\delta|^{1/2}.$$

Так как $|\lambda|^{1-|\mu|/k} \int_{\Omega_0} K_\lambda(x,x)\,dx$ не зависит от δ, а $\int_{\Omega'_\delta} \rho_\theta(x)\,dx$ не зависит от λ, то оба предела $\lim_{\substack{|\lambda|\to\infty \\ \arg\lambda=\theta}} |\lambda|^{1-|\mu|/k} \int_{\Omega_0} K_\lambda(x,x)\,dx$ и $\lim_{\delta\to 0} \int_{\Omega'_\delta} \rho_\theta(x)\,dx$ существуют и равны друг другу. Теорема 2.1 доказана.

Теорема 2.2. Пусть $A(x,D) = \sum_{(\alpha,\mu)\le k} a_\alpha(x)\,D^\alpha$ – полуэллиптический оператор в Ω с ограниченными коэффициентами. 1) Если старшие коэффициенты оператора $A(x,D)$ непрерывны, а A симметричен на $C_0^\infty(\Omega)$ в том смысле, что $A(\varphi,\Psi)_{0,\Omega} = (\varphi, A\Psi)_{0,\Omega}$ для всех $\varphi,\Psi \in C_0^\infty(\Omega)$; 2) если существует неограниченный самосопряженный оператор G на $L_2(\Omega)$, удовлетворяющий условию $C_0^\infty(\Omega) \subset D(G) \subset H_{k\mu}(\Omega)$ и $Gu = Au$ для $u \in D(G)$; 3) для $k < 2[|\mu|/2]+1$ существует нечетное число $b > \dfrac{2\left[\dfrac{|\mu|}{2}\right]+1}{k}$ такое, что A принадлежит $(C^{(b-1)k}(\Omega))^*$ и $D(G^b) \subset H_{bk\mu}(\Omega)$, то спектр оператора G дискретен и собственные значения оператора G имеют конечную кратность. Для $\lambda > 0$ обозначим через $N_+(\lambda)$ сумму всех неотрицательных собственных значений λ_j оператора G, удовлетворяющих условию $\lambda_j < \lambda$, а через $N_-(\lambda)$ аналогичную сумму для отрицательных λ_j, $\lambda_j \ge -\lambda$. Имеем

$$N_\pm(\lambda) = c_\pm \lambda^{|\mu|/k} + o\left(\lambda^{|\mu|/k}\right) \quad \textbf{при} \quad \lambda \to \infty,$$

где $c_\pm = (2\pi)^{-n} \int_\Omega \omega_\pm(x)\,dx$ **и** $\omega_\pm(x) = |\{\xi:\ 0 < \pm A'(x,i\xi) < 1\}|$.

Доказательство : Имеем, что $(\lambda - G)^{-1}$ существует для всех невещественных λ и все невещественные $e^{i\theta}$ являются направлениями минимального роста резольвенты оператора G. Так как $D(G) \subset H_{k\mu}(\Omega)$, то $(\lambda - G)^{-1}$ отображает $L_2(\Omega)$ в $H_{k\mu}(\Omega)$. Следовательно, по теореме Реллиха (см. [1]) оператор $(\lambda -$

$G)^{-1}$ компактен. Отсюда следует, что спектр оператора $(\lambda - G)^{-1}$ состоит только из собственных значений конечной кратности, а единственной возможной предельной точкой является точка 0, которая тоже входит в спектр оператора $(\lambda - G)^{-1}$. Следовательно, спектр самого оператора G дискретен и собственные значения имеют конечную кратность. Следовательно, первое утверждение Теоремы доказано. Для доказательства второго утверждения нам понадобится Теорема 2.1. Не умаляя общности, можно предположить, что точка 0 не принадлежит спектру оператора G. Следовательно, $T = G^{-1}$ является ограниченным линейным самосопряженным оператором на $L_2(\Omega)$. Так как $(\lambda - G)^{-1} = -T_\lambda$, то каждому невещественному $e^{i\theta}$ соответствует направление минимального роста оператора T_λ. Рассмотрим случай $k < 2\left[\frac{|\mu|}{2}\right] + 1$. По условию существует нечетное целое b такое, что $bk > 2\left[\frac{|\mu|}{2}\right] + 1$. Положим $T^b = (G^b)^{-1}$. Легко видеть, что A^b существует и его коэффициенты непрерывны и ограничены в Ω. Главной частью оператора A^b является оператор $(A^b)'(x,\xi) = (A'(x,\xi))^b$. Следовательно, A^b – семиэллиптический оператор порядка bk. Так как $R(T^b) \subset H_{bk\mu}(\Omega)$ и $bk > 2\left[\frac{|\mu|}{2}\right] + 1$, то T^b является самосопряженным оператором. Осталось проверить условия 1 и 2 Теоремы 2.1. Отметим, что в случае $k > 2\left[\frac{|\mu|}{2}\right] + 1$ мы берем $b = 1$. Для каждого $f \in L_2(\Omega)$ имеем

$$A^b T^b f = f. \tag{2.11}$$

Пусть теперь $\Omega_0 = \Omega$. Обозначим через P главную часть оператора A^b, т.е. $A^b = P + B$, где B – оператор порядка меньше чем bk с ограниченными коэффициентами. Из (2.11) получаем

$$\|PT^b f - f\|_{0,\Omega} \le \|BT^b f\|_{0,\Omega} \le C\,\|T^b f\|_{bk-1,\Omega}. \tag{2.12}$$

Для фиксированного $x^0 \in \Omega$ и произвольного $\varepsilon > 0$ обозначим через $U(x^0)$ окрестность точки x^0 такую, что $|a_\alpha(x) - a_\alpha(x^0)| < \varepsilon$ для всех $x \in U(x^0)$, где $a_\alpha(x)$ суть коэффициенты оператора P. Обозначая через P_0 оператор с коэффициентами $a_\alpha(x)$, из (2.12) находим

$$\begin{aligned} \|P_0 T^b f - f\|_{0,U} &\le \|(P_0 - P)T^b f\|_{0,U} + C\,\|T^b f\|_{bk-1,U} \le \\ &\le \gamma\,\varepsilon\,\|T^b\|_{bk}\,\|f\|_{0,\Omega} + C\|T^b f\|_{bk-1,\Omega}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

где γ – постоянная, зависящая от k, μ и n. Из (2.13) получаем первое неравенство в (2.1). Второе неравенство в (2.1) выводится аналогично. Следовательно, проверили условие 2 Теоремы 2.1. Далее, если $e^{i\theta}$ вещественно, то оно является направлением минимального роста резольвенты самосопряженного оператора G. Следовательно, для всех $u \in D(G)$ и $\arg \lambda = \theta$ имеем $\|u\|_{0,\Omega} \leq \dfrac{\mathrm{const}}{|\lambda|} \|(G-\lambda)\, u\|_{0,\Omega}$. В частности, так как $D(G) \subset C_0^\infty(\Omega)$, то для каждого $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ находим

$$\|\varphi\|_{0,\Omega} \leq \frac{\mathrm{const}}{|\lambda|} \|(G-\lambda)\,\varphi\|_{0,\Omega}.$$

Отсюда следует, что $A'(x, i\xi) - e^{i\theta} \neq 0$. Следовательно, $(A'(x, i\xi))^k - e^{i\theta} \neq 0$ для $\xi \in \mathbb{R}$. Так как $A'(x, i\xi)$ вещественно для всех $\xi \in \mathbb{R}$, то условие 1 Теоремы 2.1 также выполнено. Таким образом, имеем

$$\int_{\Omega_0} K_\lambda(x,x)\,dx = c\,|\lambda|^{|\mu|/(bk)-1} + o\left(|\lambda|^{|\mu|/(bk)-1}\right), \tag{2.14}$$

где $K_\lambda(x,x)$ — ядро оператора $(T^b)_\lambda$, а c — постоянная из Теоремы 2.1.
Так как характеристическими значениями оператора T^b являются $\{\lambda_j\}$, где $\{\lambda_j\}$ – собственные значения оператора G, то из Теоремы 1.6 и (2.14) для $\arg \lambda = \theta$ и невещественного $e^{i\theta}$ получаем

$$\int_{\Omega_0} K_\lambda(x,x)\,dx = \sum_j \frac{1}{\lambda_j^b - \lambda} = c\,|\lambda|^{|\mu|/(bk)-1} + o\left(|\lambda|^{|\mu|/(bk)-1}\right), \quad |\lambda| \to \infty. \tag{2.15}$$

Для $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, $\lambda = it$, $t > 0$ имеем

$$\sum_j \frac{1}{\lambda_j^b - it} = c\,|t|^{|\mu|/(bk)-1} + o\left(|t|^{|\mu|/(bk)-1}\right).$$

По Теореме 2.1, имеем $c = \int_\Omega \rho(x)\,dx$, где

$$\rho(x) = (2\pi)^{-n} \int_{E_n} \frac{d\xi}{[A'(x, i\xi)]^b - i}. \tag{2.16}$$

Пусть $q = |\mu|/k$; $0 < q < b$. Если c_1 и c_2, соответственно, вещественная и мнимая части c, то из (2.15) получаем

$$\sum_j \frac{\lambda_j^b}{\lambda_j^{2b} + t^2} = c_1\, t^{q/b-1} + o\left(t^{q/b-1}\right), \quad \sum_j \frac{t}{\lambda_j^{2b} + t^2} = c_2\, t^{q/b-1} + o\left(t^{q/b-1}\right). \tag{2.17}$$

Последнее соотношение можно переписать в виде

$$\sum_j \frac{1}{\lambda_j^{2b} + t} = \int_0^\infty \frac{dN\left(\lambda^{1/(2b)}\right)}{\lambda + t} = c_2\, t^{q/(2b)-1} + o\left(t^{q/(2b)-1}\right), \tag{2.18}$$

где $N(\lambda) = N_+(\lambda) + N_-(\lambda)$.

Используя теорему Харди–Литтлвуда (см. [1]) получим

$$N(\lambda^{1/2b}) = c_2 \frac{\sin(\pi q/(2b))}{\pi q/(2b)} \lambda^{1/(2b)} + o(\lambda^{1/(2b)}). \tag{2.19}$$

Подставляя в (2.19) $\mu = \lambda^{1/(2b)}$ получим

$$N(\mu) = 2\, b\, c_2 \frac{\sin(\pi q/(2b))}{\pi q} \mu^b + o(\mu^b). \tag{2.20}$$

Рассмотрим величины $N_+(\lambda)$ и $N_-(\lambda)$. Так как, по предположению, b нечетно, то знаки λ_j и λ_j^b совпадают. Следовательно

$$\begin{gathered}\sum_j \frac{\lambda_j^b}{\lambda_j^{2b} + t^2} = \sum_{\lambda_j > 0} \frac{\lambda_j^b}{\lambda_j^{2b} + t^2} + \sum_{\lambda_j < 0} \frac{\lambda_j^b}{\lambda_j^{2b} + t^2} = \int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda + t^2}\, dN_+ \\ + (\lambda^{1/(2b)}) - \int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda + t^2}\, dN_-(\lambda^{1/(2b)}) = \int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda + t^2}\, dN(\lambda^{1/(2b)}) - \\ - 2\int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda + t^2}\, dN_-(\lambda^{1/(2b)}) = c_1\, t^{q/k - 1} + o(t^{q/k-1}).\end{gathered} \tag{2.21}$$

Пусть $\overline{N}(\lambda) = \int_0^\lambda \sqrt{\tau}\, dN(\tau^{1/(2b)})$. Интегрируя по частям и используя (2.19) находим

$$\begin{aligned}\overline{N}(\lambda) &= \sqrt{\lambda}\, N(\lambda^{1/(2b)}) - \frac{1}{2}\int_0^\lambda \tau^{-1/2}\, N(\lambda^{1/(2b)})\, d\tau = \\ &= 2\, b\, c_2 \frac{\sin(\pi q/(2b))}{\pi q} \left[\lambda^{q/(2b)+1/2} - \frac{1}{2}\int_0^\lambda \tau^{-1/2+q/(2b)}\, d\tau\right] + \\ &+ o\left(\lambda^{q/(2b)+1/2}\right) = c_2 \frac{\sin(\pi q/(2b))}{\pi} \frac{\lambda^{q/(2b)+1/2}}{q/(2b)+1/2} + o\left(\lambda^{q/(2b)+1/2}\right).\end{aligned}$$

Следовательно, имеет место результат, обратный теореме Харди–Литтлвуда :

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda + t^2}\, dN(\lambda^{1/2b}) = \int_0^\infty \frac{d\overline{N}(\lambda)}{\lambda + t^2} = c_2 \tan(\pi q/(2b))\, t^{q/b-1} + o\left(t^{q/b-1}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda + t^2}\, dN_-(\lambda^{1/(2b)}) = [c_2 \tan(\pi q/(2b)) - c_1]\, t^{q/b-1} + o\left(t^{q/b-1}\right).$$

Пусть теперь

$$\overline{N}_-(\lambda) = \int_0^\lambda \sqrt{\tau}\, dN_-(\tau^{1/(2b)}). \tag{2.22}$$

Из предыдущей асимптотической формулы получаем

$$\int_0^\infty \frac{1}{\lambda + t^2}\, d\overline{N}_-(\lambda) = \frac{1}{2}\, [c_2 \tan(\pi q/(2b) - c_1]\, t^{q/(2b)-1/2} + o\left(t^{q/(2b)-1/2}\right).$$

Вновь используя теорему Харли–Литтлвуда получаем

$$\overline{N}_-(\lambda) = \frac{1}{2}\left[c_2 \sin(\pi q/(2b)) - c_1 \cos(\pi q/(2b))\right] \frac{\lambda^{q/(2b)+1/2}}{\pi\,(\pi q/(2b)+1/2)} + o\left(\lambda^{q/(2b)+1/2}\right).$$

Следовательно

$$N_-(\lambda^{b/2}) = \text{const} + \int_0^\lambda \tau^{-1/2}\, dN_-(\tau) =$$
$$= \frac{1}{2}\left[c_2 \sin(\pi q/(2b)) - c_1 \cos(\pi q/(2b))\right] \frac{b\,\lambda^{q/(2b)}}{\pi q} + o\left(\lambda^{q/(2b)}\right).$$

Подставляя λ вместо λ^{2b} находим

$$N_-(\lambda) = \frac{1}{2}\left[c_2 \sin(\pi q/(2b)) - c_1 \cos(\pi q/(2b))\right] \frac{b\,\lambda^q}{\pi q} + o(\lambda^q).$$

Рассуждая аналогично, получаем

$$N_+(\lambda) = \frac{1}{2}\left[c_2 \sin(\pi q/(2b)) + c_1 \cos(\pi q/(2b))\right] \frac{b\,\lambda^q}{\pi q} + o(\lambda^q).$$

Следовательно, для завершения доказательства теоремы, нам надо вычислить постоянную $c = c_1 + i c_2$. Так как $A'(x, i\xi) \in \mathbb{R}$ для $\xi \in \mathbb{R}$, полагая $p(\xi) = (A'(x, i\xi))^k$ из (2.16) получаем

$$(2\pi)^n \rho(x) = \int_{E_n} \frac{d\xi}{p(\xi) - 1} = \int_{E_n} \frac{p(\xi)\, d\xi}{p^2(\xi) + 1} + i \int_{E_n} \frac{d\xi}{p^2(\xi) + 1}.$$

Для $0 < t < \infty$ положим $V(t^\mu) = \left\{\xi : \left|p\left(\frac{\xi_1}{t^{\mu_1}}, \dots, \frac{\xi_n}{t^{\mu_n}}\right)\right| < 1\right\}$. Обозначим через $v(t^\mu) = |V(t^\mu)|$ меру Лебега множества $V(t^\mu)$. Из μ–однородности A' следует, что $v(t^\mu) = t^{q/b}\, v(1)$. Следовательно

$$(2\pi)^n \operatorname{Im} \rho(x) = \int_0^\infty \frac{1}{t^2 + 1}\, dv(t^\mu) = \frac{q}{b}\, v(1) \int_0^\infty \frac{t^{q/b-1}}{t^2 + 1}\, dt = \frac{q}{b}\, v(1)\, \frac{\pi}{\sin(\pi q/(2b))}. \tag{2.23}$$

Рассмотрим следующие два случая :

1) k – четно. В этом случае $p(\xi)$ является нечетной функцией и поэтому $\operatorname{Re}(p(\xi)) = 0$. Мы также имеем $v(1) = |\{\xi : |p(\xi)| < 1\}| = 2\omega_+(x) = 2\omega_-(x)$. В силу (2.23) получаем

$$\rho(x) = i \operatorname{Im} \rho(x) = i\,(2\pi)^{-n}\, 2\,\omega_\pm(x)\, \frac{\pi q}{b \sin(\pi q/(2b))}.$$

Так как $c = \int_\Omega \rho(x)\, dx$, то

$$c_1 + i c_2 = i\,(2\pi)^{-n} \frac{\pi q}{b \sin(\pi q/(2b))} \cdot \int_\Omega \omega_\pm(x)\, dx = \frac{\pi q}{b \sin(\pi q/(2b))}\, i\, c_\pm.$$

Таким образом, $c_1 = 0$ и $\sin(\pi q/(2b))\, c_2 = \frac{\pi q}{b} c_\pm$. Следовательно, $N_\pm(\lambda) = c_\pm \lambda^q + o(\lambda^q)$. Для нечетного k Теорема доказана.

2) Пусть k четно. В этом случае $p(\xi)$ является четной функцией. Из полуэллиптичности оператора A следует, что $z = \operatorname{sign} p(\xi)$ не меняется. Поэтому

$$(2\pi)^n \operatorname{Re} \rho(x) = \int_{E_n} \frac{p(\xi)\, d\xi}{p^2(\xi)+1} =$$

$$= z \int_0^\infty \frac{t}{t^2+1}\, dv(t^\mu) = z\, \frac{q}{b}\, v(1) \int_0^\infty \frac{t^{q/b}}{t^2+1}\, dt = z\, \frac{q}{2b}\, v(1)\, \frac{\pi}{\cos(\pi q/(2b))}.$$

Имеем $v(1) = \omega_z(x)$, $\omega_{-z}(x) = |\{\xi:\ -1 < z\, A'(x, \imath\xi) < 0\}| = 0$. Следовательно

$$c_1 + i c_2 = z\, \frac{q}{2b}\, \frac{\pi}{\cos(\pi q/(2b))}\, c_z + i\, \frac{q}{2b}\, \frac{\pi}{\sin(\pi q/(2b))}\, c_z.$$

Отсюда следует, что $\cos(\pi q/(2b))\, c_1 = z\, \frac{\pi q}{2b} c_z$ и $\sin(\pi q/(2b))\, c_2 = \frac{\pi q}{2b} c_z$. Следовательно $N_-(\lambda) = \frac{1-z}{2} c_z \lambda^q + o(\lambda^q)$, $N_+(\lambda) = \frac{1+z}{2} c_z \lambda^q + o(\lambda^q)$. Наконец, имеем: $N_-(\lambda) = c_- \lambda^q + o(\lambda^q)$ и $N_+(\lambda) = c_+ \lambda^q + o(\lambda^q)$. Теорема 2.2 доказана.

ABSTRACT. The paper investigates the asymptotic behavior of eigenvalues of selfadjoint semielliptic differential operators of the form $A(x, D) = \sum_{(\alpha,\mu)\le k} a_\alpha(x) D^\alpha$, defined on nonisotropic Sobolev space $H_{k\mu}(\Omega)$, where Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^n$. Conditions under which the spectrum of A is discrete and its eigenvalues are of finite multiplicities are given together with the asymptotic relation $N(\lambda) = c\lambda^{|\mu|/k} + o\left(\lambda^{|\mu|/k}\right)$, $\lambda \to \infty$, where $N(\lambda)$ is the number of eigenvalues λ_j satisfying $|\lambda_j| < \lambda$, and c is a positive constant depending on A and Ω.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Agmon, Lectures on Elliptic Boundary Value Problems, D. Van Nostrand Company, Inc., 1965.
2. О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, Интегральные Представления Функций и Теоремы Вложения, Москва, Мир, 1975.
3. В. А. Солонников, О некоторых неравенствах для функций из классов $W_p(R^n)$, Записки Научн. Семин. ЛОМИ АН СССР, том 6, стр. 194 — 210, 1972.
4. К. Иосида, Функциональный Анализ, Москва, Мир, 1967.

21 Октября 1998 Ереванский государственный университет