НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ СПЕКТРА ОДНОРОДНЫХ ГАУССОВСКИХ ПОЛЕЙ

М. С. Гиновян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 2, 1999

Пусть $X(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in U^n$ — центрированное вещественнозначное однородное гауссовское поле со спектральной плотностью $f(\mathbf{t}) = f(t_1, \ldots, t_n)$. В работе рассматривается задача непараметрического статистического оценивания спектральных средних $\varphi(f) = \int g(\mathbf{t}) f(\mathbf{t})\, d\mathbf{t}$ на основе выборки $\mathbf{X}_T$ объема $T = (T_1, \ldots, T_n)$. В качестве оценки $\varphi(f)$ мы рассматриваем статистику $\widehat{\varphi}_T = \int g(\mathbf{t})\, I_T(\mathbf{t})\, d\mathbf{t}$, где $I_T(\mathbf{t})$ – периодограмма поля $X(\mathbf{u})$. В статье описаны классы спектральных плотностей, для которых $\widehat{\varphi}_T$ является асимптотически несмещенной и среднеквадратически состоятельной оценкой для функционала $\varphi(f)$ и имеет асимптотически нормальное распределение. В работе рассмотрены случаи как дискретного, так и непрерывного параметров.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $X(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in U^n$ — центрированное вещественнозначное однородное гауссовское поле со спектральной плотностью (с.п.) $f(\mathbf{t})$, $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in Q^n$, т.е. $\mathbb{E} X(\mathbf{u}) = 0$ и

$$\mathbb{E} X(\mathbf{u})\, X(\mathbf{v}) = r(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \int_{Q^n} e^{i(\mathbf{u}-\mathbf{v},\mathbf{t})} f(\mathbf{t})\, d\mathbf{t}, \qquad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in U^n, \tag{1}$$

где $r(\mathbf{u})$ – ковариационная функция поля $X(\mathbf{u})$, а $\mathbf{u} - \mathbf{v} = (u_1 - v_1, \ldots, u_n - v_n)$ и $(\mathbf{u}, \mathbf{t}) = u_1 t_1 + \cdots + u_n t_n$ – обычные векторные обозначения.

Рассматриваются одновременно два случая : случай дискретного параметра (д. п.) и случай непрерывного параметра (н. п.). В случае д. п. областью изменения U^n переменной $\mathbf{u}$ является множество всевозможных узлов целочисленной решетки в n-мерном евклидовом пространстве, т. е. $U^n = \{\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n),\ u_k = 0, \pm 1, \ldots, k = \overline{1, n}\}$, а в случае н. п. – n-мерное евклидово пространство $U^n = \mathbb{R}^n$. В случае д. п. областью изменения Q^n переменной $\mathbf{t}$ является n-мерный тор $Q^n = [-\pi, \pi]^n = \{\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n),\ -\pi \le t_k \le \pi,\ k = \overline{1, n}\}$, а в случае н. п. – $Q^n = \mathbb{R}^n$. В случае непрерывного параметра поле $X(\mathbf{u})$ предполагается измеримым и среднеквадратично непрерывным.

Спектр поля $X(\mathbf{u})$ характеризуется линейным функционалом $\varphi(f)$ (см. [2], [5], [10]) :

$$\varphi(f) = \int_{Q^n} g(\mathbf{t})\, f(\mathbf{t})\, d\mathbf{t}, \tag{2}$$

где $g(\mathbf{t}) = g(t_1, \ldots, t_n)$ – некоторая интегрируемая функция.

Отметим, что если $g(\mathbf{t})$ является индикатором n-мерного интервала $[-\pi, s_1] \times \cdots \times [-\pi, s_n]$ в случае д.п. (или $[-\infty, s_1] \times \cdots \times [-\infty, s_n]$ – в случае н.п.), то $\varphi(f) = F(\mathbf{s})$, $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)$, где $F(\mathbf{s})$ – спектральная функция поля $X(\mathbf{u})$. Если $g(\mathbf{t}) = e^{i(\mathbf{u},\mathbf{t})}$, то $\varphi(f)$ совпадает с ковариационной функцией $r(\mathbf{u})$.

В этой статье рассматривается задача непараметрического статистического оценивания функционала $\varphi(f)$ по наблюдениям :

$$\begin{aligned} &\mathbf{X}_T = \{X(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n), \quad u_k = \overline{1, T_k},\ k = \overline{1, n}\} && \text{в случае д.п.,} \\ &\mathbf{X}_T = \{X(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n), \quad 0 \le u_k \le T_k,\ k = \overline{1, n}\} && \text{в случае н.п.,} \end{aligned} \tag{3}$$

где $T = (T_1, \ldots, T_n)$.

В качестве оценки для $\varphi(f)$ рассмотрим статистику $\widehat{\varphi}_T$ (см. [2], [5], [10]) :

$$\widehat{\varphi}_T \stackrel{def}{=} \varphi(I_T) = \int_{Q^n} g(\mathbf{t})\, I_T(\mathbf{t})\, d\mathbf{t}, \tag{4}$$

где $I_T(\mathbf{t})$ — так называемая **периодограмма**, построенная по выборке (3), т.е.

$$I_T(\mathbf{t}) = \frac{1}{(2\pi)^n\, |T|} \left| \sum_{u_1=1}^{T_1} \cdots \sum_{u_n=1}^{T_n} X(\mathbf{u})\, e^{-i(\mathbf{u},\mathbf{t})} \right|^2 \qquad \text{в случае д.п.} \tag{5}$$

и

$$I_T(\mathbf{t}) = \frac{1}{(2\pi)^n |T|} \left| \int_0^{T_1} \cdots \int_0^{T_n} X(\mathbf{u})\, e^{-i(\mathbf{u},\mathbf{t})}\, d\mathbf{u} \right|^2 \qquad \text{в случае н.п.,} \tag{6}$$

где $|T| = \prod_{k=1}^{n} T_k$.

Используя (1), (5) и (6), легко проверить, что статистика $\widehat{\varphi}_T$, определенная по (4) допускает следующее спектральное представление :

$$\widehat{\varphi}_T = \frac{1}{(2\pi)^n |T|} \int_{Q^n} \int_{Q^n} \int_{Q^n} G_T(\mathbf{t}, \mathbf{w})\, G_T(\mathbf{w}, \mathbf{s})\, g(\mathbf{w})\, d\mathbf{w}\, Z(d\mathbf{t})\, Z(d\mathbf{s}), \tag{7}$$

где

$$G_T(\mathbf{t}, \mathbf{s}) = \prod_{k=1}^{n} G_{T_k}(t_k, s_k), \tag{8}$$

$$G_{T_k}(t_k, s_k) = \sum_{m=1}^{T_k} e^{i m(t_k - s_k)} = e^{i T_k(t_k - s_k)/2} \cdot \frac{\sin(T_k(t_k - s_k)/2)}{\sin((t_k - s_k)/2)} \quad \text{в случае д.п.,} \tag{9}$$

$$G_{T_k}(t_k, s_k) = \int_0^{T_k} e^{i \lambda(t_k - s_k)}\, d\lambda = e^{i T_k(t_k - s_k)/2} \cdot \frac{\sin(T_k(t_k - s_k)/2)}{(t_k - s_k)/2} \quad \text{в случае н.п.,} \tag{10}$$

а $Z(d\mathbf{t})$ — ортогональная стохастическая мера, участвующая в спектральном представлении поля $X(\mathbf{u})$ (см. [14], глава 7) :

$$X(\mathbf{u}) = \int_{Q^n} e^{i(\mathbf{u}, \mathbf{t})}\, Z(d\mathbf{t}),$$

и удовлетворяющая условию

$$\mathbb{E} Z(d\mathbf{t}) Z(d\mathbf{s}) = \delta(\mathbf{t}, \mathbf{s})\, f(\mathbf{t})\, d\mathbf{t}, \tag{11}$$

где $\delta(\mathbf{t}, \mathbf{s}) = \delta(\mathbf{t} - \mathbf{s})$ – δ–функция Дирака.

В настоящей статье исследуются асимптотические (при $T \to \infty$) свойства статистики $\widehat{\varphi}_T$, определенной по формуле (4). Описаны некоторые классы спектральных плотностей, для которых $\widehat{\varphi}_T$ является асимптотически несмещенной и среднеквадратически состоятельной оценкой для функционала $\varphi(f)$, и имеет асимптотически нормальное распределение. Некоторые результаты этой статьи были анонсированы в [5].

Наше исследование асимптотических свойств оценки $\widehat{\varphi}_T$ основано на следующем представлении кумулянта $\chi_k(\widehat{\varphi}_T)$ порядка k оценки $\widehat{\varphi}_T$ (ср. [9], [12]) :

$$\chi_k(\widehat{\varphi}_T) = |T|^{-k}\, 2^{k-1}(k-1)!\, \mathrm{tr}[\mathbb{B}_T(f)\mathbb{B}_T(g)]^k, \tag{12}$$

где $\mathbb{B}_T(f)$ и $\mathbb{B}_T(g)$ — усеченные теплицевы операторы, порожденные функциями $f(\mathbf{t})$ и $g(\mathbf{t})$, соответственно.

Статья имеет следующую структуру : в §2 исследуется асимптотическое поведение следа произведений усеченных теплицевых операторов, а в §3 изучаются асимптотические свойства оценки $\widehat{\varphi}_T$.

§2. ПРОИЗВЕДЕНИЯ УСЕЧЕННЫХ ТЕПЛИЦЕВЫХ ОПЕРАТОРОВ

Обозначим через $\mathbf{P}_T$ интегральный оператор в $\mathbf{L}_2([-\pi, \pi]^n)$ с ядром (8), (9), а через $\widetilde{\mathbf{P}}_T$ – интегральный оператор в $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n)$ с ядром (8), (10). Заметим, что $\mathbf{P}_T$ является ортогональным проектором в $\mathbf{L}_2([-\pi, \pi]^n)$ на подпространство тригонометрических многочленов степени не выше $T = (T_1, \ldots, T_n)$, а $\widetilde{\mathbf{P}}_T$

– ортогональным проектором в $L_2(\mathbb{R}^n)$ на подпространство целых функций экспоненциального типа не выше $\leq T = (T_1, \ldots, T_n)$, сужения которых на $\mathbb{R}^n$ принадлежат $L_2(\mathbb{R}^n)$. Для функций $\psi(t) \in L_1([-\pi,\pi]^n)$ и $\widetilde{\psi}(t) \in L_1(\mathbb{R}^n)$ определим усеченные теплицевы операторы :

$$\mathbb{B}_T(\psi) = \mathbf{P}_T \psi \mathbf{P}_T \quad \text{и} \quad \widetilde{\mathbb{B}}_T(\widetilde{\psi}) = \widetilde{\mathbf{P}}_T \widetilde{\psi} \widetilde{\mathbf{P}}_T, \tag{13}$$

где ψ и $\widetilde{\psi}$ – операторы умножения на функции $\psi(t)$ и $\widetilde{\psi}(t)$, соответственно.

Теорема 1. Пусть $\psi_k(t) \in L_{p_k}([-\pi,\pi]^n)$, $1 \leq p_k < \infty$ для $k = \overline{1,m}$. Положим $\nu = \sum_{k=1}^m (p_k)^{-1}$.

a) Если $\nu \leq 1$, то

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{|T|} \mathrm{tr}\left[\prod_{k=1}^m \mathbb{B}_T(\psi_k)\right] = (2\pi)^{n(m-1)} \cdot \int_{[-\pi,\pi]^n} \prod_{k=1}^m \psi_k(t)\, dt. \tag{14}$$

b) Если $\alpha = \nu + \varepsilon > 1$ с $\varepsilon > 0$, то

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{|T|^\alpha} \mathrm{tr}\left[\prod_{k=1}^m \mathbb{B}_T(\psi_k)\right] = 0. \tag{15}$$

Здесь и ниже запись $T = (T_1, \ldots, T_n) \to \infty$ означает, что $T_k \to \infty$ для всех $k = \overline{1,n}$, а $\mathrm{tr}[B]$ обозначает след оператора B.

В случае непрерывного параметра имеет место аналогичный результат при том же самом ν.

Теорема 2. Пусть $\widetilde{\psi}_k(t) \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_{p_k}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p_k < \infty$ для $k = \overline{1,m}$.

a) Если $\nu \leq 1$, то

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{|T|} \mathrm{tr}\left[\prod_{k=1}^m \widetilde{\mathbb{B}}_T(\widetilde{\psi}_k)\right] = (2\pi)^{n(m-1)} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{k=1}^m \widetilde{\psi}_k(t)\, dt.$$

b) Если $\alpha = \nu + \varepsilon > 1$ и $\varepsilon > 0$, то

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{|T|^\alpha} \mathrm{tr}\left[\prod_{k=1}^m \widetilde{\mathbb{B}}_T(\widetilde{\psi}_k)\right] = 0.$$

Замечание 1. Аналоги Теорем 1 и 2 для $n = 1$ доказаны в [1] и [6], соответственно.

Ниже мы приводим результаты только для дискретного параметра. В случае непрерывного параметра соответствующие результаты формулируются и доказываются аналогичным образом.

Начнем с некоторых вспомогательных результатов. Обозначим через $\{s_j(B)\}_{j\geq 1}$ множество сингулярных чисел компактного оператора B, т.е. множество собственных значений оператора $K = (B^* B)^{1/2}$, где B^* оператор, сопряженный к B. Для числа p ($1 \leq p \leq \infty$) определим p–норму Шаттена компактного оператора B равенством

$$\|B\|_p = \begin{cases} (\sum_{j=1}^{\infty} s_j^p(B))^{1/p}, & \text{при} \quad 1 \leq p < \infty \\ \sup_j s_j(B), & \text{при} \quad p = \infty. \end{cases}$$

Обозначим через $\mathcal{S}_p$ ($1 \leq p \leq \infty$) класс всех компактных операторов B, для которых $\|B\|_p < \infty$. Приведем список ниже используемых свойств классов $\mathcal{S}_p$. Доказательства можно найти в [8].

P1). $\mathrm{tr}[B] \leq \|B\|_1$, причем знак равенства достигается для неотрицательного B.

P2). Если $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$ и $B \in \mathcal{S}_{p_1}$, то $B \in \mathcal{S}_{p_2}$ и $\|B\|_{p_2} \leq \|B\|_{p_1}$.

P3). Если $B_k \in \mathcal{S}_{p_k}$, $p_k \geq 1$, $k = \overline{1,n}$ и $p^{-1} = \sum_{k=1}^{n} (p_k)^{-1} \leq 1$, то $B = B_1 \times \cdots \times B_n \in \mathcal{S}_p$ и $\|B\|_p \leq \|B_1\|_{p_1} \cdot \cdots \cdot \|B_n\|_{p_n}$.

P4). $\|B\|_\infty = \|B\|$, где $\|B\|$ – операторная норма B, определенная равенством $\|B\| = \sup_{\|h\|_2=1} |(Bh, h)|$.

Следующая лемма дает верхнюю границу для p–нормы Шаттена теплицева оператора $\mathbb{B}_T(\psi)$.

Лемма 1. Пусть $\psi(\mathbf{t}) \in \mathbf{L}_p(Q^n)$, $1 \leq p \leq \infty$. Тогда

$$\|\mathbb{B}_T(\psi)\|_p \leq (2\pi)^n |T|^{1/p} \|\psi\|_p. \tag{16}$$

Доказательство : В силу интерполяционной теоремы Рисса–Торина для классов $\mathcal{S}_p$ (см. [8]), неравенство (16) достаточно доказать для $p = 1$ и $p = \infty$.

Случай $p = \infty$. Из P4) имеем

$$\|\mathbb{B}_T(\psi)\|_\infty = \sup_{\|h\|_2=1} |(\mathbb{B}_T(\psi)h, h)| =$$

$$= \sup_{\|h\|_2=1} \left| \int_{Q^n} \psi(\mathbf{t}) \left| \sum_{u_1=1}^{T_1} \cdots \sum_{u_n=1}^{T_n} h(\mathbf{u})\, e^{i(\mathbf{u},\mathbf{t})} \right|^2 d\mathbf{t} \right| \leq$$

$$\leq \|\psi(\mathbf{t})\|_\infty \sup_{\|h\|_2=1} \int_{Q^n} \left| \sum_{u_1=1}^{T_1} \cdots \sum_{u_n=1}^{T_n} h(\mathbf{u})\, e^{i(\mathbf{u},\mathbf{t})} \right|^2 d\mathbf{t} = (2\pi)^n \|\psi(\mathbf{t})\|_\infty,$$

т.е. (16) для $p = \infty$.

Случай $p = 1$. Функцию $\psi(\mathbf{t}) \in \mathbf{L}_1(Q^n)$ представим в виде $\psi(\mathbf{t}) = \psi_1(\mathbf{t})\, \psi_2(\mathbf{t})$ таким образом, чтобы $\|\psi\|_1 = \|\psi_1\|_2 \cdot \|\psi_2\|_2$. Применяя P3) для $n = 2$ и $p_1 = p_2 = 2$, получаем

$$\|\mathbb{B}_T(\psi)\|_1 = \|\mathbf{P}_T\,\psi\,\mathbf{P}_T\|_1 = \|\mathbf{P}_T\,\psi_1\cdot\psi_2\,\mathbf{P}_T\|_1 \le \|\mathbf{P}_T\,\psi_1\|_2\cdot\|\psi_2\,\mathbf{P}_T\|_2. \tag{17}$$

Покажем, что

$$\|\mathbf{P}_T\,\psi_1\|_2^2 = (2\pi)^n|T|\int_{Q^n}|\psi_1(\mathbf{t})|^2\,dt, \tag{18}$$

где $|T| = \prod_{k=1}^n T_k$. Имеем

$$[\mathbf{P}_T\,\psi_1]\,h(\mathbf{s}) = \int_{Q^n} G_T(\mathbf{s},\mathbf{t})\psi_1(\mathbf{t})\,h(\mathbf{t})\,d\mathbf{t}. \tag{19}$$

Поэтому (см. [8], стр. 141)

$$\begin{aligned}\|\mathbf{P}_T\psi_1\|_2^2 &= \int_{Q^n}\int_{Q^n}|G_T(\mathbf{s},\mathbf{t})\psi_1(\mathbf{t})|^2\,dt\,ds = \\ &= \int_{Q^n}\left(\int_{Q^n} G_T(\mathbf{s},\mathbf{t})G_T(\mathbf{t},\mathbf{s})\,ds\right)|\psi_1(\mathbf{t})|^2\,d\mathbf{t}.\end{aligned} \tag{20}$$

Прямым вычислением из (8) - (10) получаем

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{Q^n} G_T(\mathbf{t},\mathbf{s})\,G_T(\mathbf{s},\mathbf{t})\,ds = G_T(\mathbf{t},\mathbf{t}) = |T| = \prod_{k=1}^n T_k. \tag{21}$$

Следовательно, (18) вытекает из (20) и (21). Аналогичным образом можно показать, что

$$\|\psi_2\,\mathbf{P}_T\|_2^2 = (2\pi)^n|T|\int_{Q^n}|\psi_2(\mathbf{t})|^2\,d\mathbf{t}. \tag{22}$$

Таким образом, из (17), (18) и (22) имеем

$$\|\mathbb{B}_T(\psi)\|_1 \le (2\pi)^{n/2}|T|^{1/2}\|\psi_1\|_2\cdot(2\pi)^{n/2}|T|^{1/2}\|\psi_2\|_2 = (2\pi)^n|T|\cdot\|\psi\|_1.$$

Лемма 1 доказана.

Доказательство Теоремы 1 : а) Пусть $l(1 \le l \le m)$ - число тех функций $\psi_k(\mathbf{t})$ в (14), которые не являются многочленами (т.е. имеющие бесконечно много ненулевых коэффициентов Фурье). Мы применяем индукцию по m. Для $m = 0$ (все $\psi_k(\mathbf{t})$ являются многочленами) легко проверить, что (14) выполняется. Теперь предположим, что (14) имеет место в случае, когда среди функций $\psi_k(\mathbf{t})$ имеются не более l функций, которые не являются многочленами и докажем, что (14) выполняется в случае, когда среди функций $\psi_k(\mathbf{t})$ имеются не более $l+1$ функций, которые не являются многочленами. Без потери общности мы можем предполагать, что $\psi_1(t)$ не является многочленом. Для $M = (M_1, \dots, M_n)$ и $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$ обозначим

$$\psi_{1,M}(\mathbf{t}) = (\psi_1 * F_M)(\mathbf{t}) = \int_{Q^n} F_M(\mathbf{t} - \mathbf{s})\,\psi_1(\mathbf{s})\,d\mathbf{s} \tag{23}$$

сингулярный интеграл Фейера, порожденный функцией $\psi_1(\mathbf{t}) \in \mathbf{L}_1(Q^n)$, где

$$F_M(\mathbf{t}) = F_{M_1}(t_1)\cdots F_{M_n}(t_n), \tag{24}$$

а

$$F_{M_k}(t_k) = \frac{1}{2\pi M_k}\left(\frac{\sin\dfrac{M_k t_k}{2}}{\sin\dfrac{t_k}{2}}\right)^2, \qquad t_k \in [-\pi, \pi] \tag{25}$$

– одномерное ядро Фейера. Заметим, что функция $\psi_{1,M}(\mathbf{t})$, определенная по формуле (23), является тригонометрическим многочленом от n переменных степени $M = (M_1, \dots, M_n)$. Положим

$$\psi_1^M(\mathbf{t}) = \psi_1(\mathbf{t}) - \psi_{1,M}(\mathbf{t}). \tag{26}$$

В силу индукционного предположения имеем

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{|T|}\mathrm{tr}\left[\mathbb{B}_T(\psi_{1,M})\prod_{k=2}^m \mathbb{B}_T(\psi_k)\right] = (2\pi)^{n(m-1)}\cdot\int_{Q^n}\psi_{1,M}(\mathbf{t})\prod_{k=2}^m \psi_k(\mathbf{t})\,d\mathbf{t}. \tag{27}$$

Известно (см. [16], том II, Теорема (1.23)), что для $\psi_1(\mathbf{t}) \in \mathbf{L}_{p_1}(Q^n)$ $(1 \le p_1 < \infty)$ имеет место соотношение

$$\|\psi_1 - \psi_{1,M}\|_{p_1} \to 0 \quad \text{при} \quad M \to \infty. \tag{28}$$

Поэтому, учитывая, что $\prod_{k=2}^m \psi_k(\mathbf{t}) \in \mathbf{L}_{q_1}(Q^n)$, где $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} \le 1$, получаем, что правая часть (27) сходится к $(2\pi)^{n(m-1)}\cdot\int_{Q^n}\prod_{k=1}^m \psi_k(\mathbf{t})\,d\mathbf{t}$ при $M \to \infty$. Следовательно

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{|T|}\mathrm{tr}\left[\mathbb{B}_T(\psi_{1,M})\prod_{k=2}^m \mathbb{B}_T(\psi_k)\right] = (2\pi)^{n(m-1)}\cdot\int_{Q^n}\prod_{k=1}^m \psi_k(\mathbf{t})\,d\mathbf{t}. \tag{29}$$

Таким образом, для завершения доказательства пункта а) остается показать, что

$$\lim_{M\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{|T|}\mathrm{tr}\left[\mathbb{B}_T(\psi_1^M)\prod_{k=2}^m \mathbb{B}_T(\psi_k)\right] = 0. \tag{30}$$

Применяя P1), P3) (для $n = m$) и Лемму 1, получим

$$\frac{1}{|T|}\left|\mathrm{tr}\left[\mathbb{B}_T(\psi_1^M)\prod_{k=2}^{m}\mathbb{B}_T(\psi_k)\right]\right| \le \frac{1}{|T|}\left\|\mathbb{B}_T(\psi_1^M)\prod_{k=2}^{m}\mathbb{B}_T(\psi_k)\right\|_1 \le$$
$$\le \frac{1}{|T|}\|\mathbb{B}_T(\psi_1^M)\|_{p_1}\prod_{k=2}^{m}\|\mathbb{B}_T(\psi_k)\|_{p_k} \le C\,|T|^{\nu-1}\,\|\psi_1^M\|_{p_1}\prod_{k=2}^{m}\|\psi_k\|_{p_k}.$$

Отсюда следует (30), так как по предположению $\nu - 1 = \sum_{k=1}^{m}(p_k)^{-1} - 1 \le 0$ и, в силу (26) и (28), имеем $\|\psi_1^M\|_{p_1} \to 0$ при $M \to \infty$. Доказательство пункта a) завершено.

Для доказательства пункта b) предположим, что $\nu = \sum_{k=1}^{m}(p_k)^{-1} > 1$ (в противном случае требуемое утверждение следует из пункта a)). Если все функции $\psi_k(\mathbf{t})$ являются многочленами, то соотношение (15) выполнено, так как по предположению $\alpha > 1$. В противном случае применим индукцию по числу тех функций, которые не являются многочленами. Не умаляя общности предположим, что $\psi_1(\mathbf{t})$ не является многочленом, и пусть $\psi_1(\mathbf{t}) = \psi_{1,M}(\mathbf{t}) + \psi_1^M(\mathbf{t})$, где $\psi_{1,M}(\mathbf{t})$ задается по (23). Имеем

$$\frac{1}{|T|^\alpha}\mathrm{tr}\left[\prod_{k=1}^{m}\mathbb{B}_T(\psi_k)\right] =$$
$$= \frac{1}{|T|^\alpha}\mathrm{tr}\left[\mathbb{B}_T(\psi_{1,M})\prod_{k=2}^{m}\mathbb{B}_T(\psi_k)\right] + \frac{1}{|T|^\alpha}\mathrm{tr}\left[\mathbb{B}_T(\psi_1^M)\prod_{k=2}^{m}\mathbb{B}_T(\psi_k)\right]. \tag{31}$$

В силу индукционного предположения, первое слагаемое в правой части (31) стремится к нулю (при $M \to \infty$ и $T \to \infty$). Далее, так как по предположению $\nu > 1$, применяя P1), P2), P3) (для $n = m$) и Лемму 1 получаем

$$\left|\mathrm{tr}\left[\mathbb{B}_T(\psi_1^M)\prod_{k=2}^{m}\mathbb{B}_T(\psi_k)\right]\right| \le$$
$$\le \left\|\mathbb{B}_T(\psi_1^M)\prod_{k=2}^{m}\mathbb{B}_T(\psi_k)\right\|_1 \le \|\mathbb{B}_T(\psi_1^M)\|_{\nu p_1}\prod_{k=2}^{m}\|\mathbb{B}_T(\psi_k)\|_{\nu p_k} \le$$
$$\le \|\mathbb{B}_T(\psi_1^M)\|_{p_1}\prod_{k=2}^{m}\|\mathbb{B}_T(\psi_k)\|_{p_k} \le C\,|T|^{\nu}\,\|\psi_1^M\|_{p_1}\prod_{k=2}^{m}\|\psi_k\|_{p_k}.$$

Следовательно, для второго слагаемого в правой части (31) получаем

$$\frac{1}{|T|^\alpha}\mathrm{tr}\left[\mathbb{B}_T(\psi_1^M)\prod_{k=2}^{m}\mathbb{B}_T(\psi_k)\right] \le C\,|T|^{\nu-\alpha}\|\psi_1^M\|_{p_1}\prod_{k=2}^{m}\|\psi_k\|_{p_k}. \tag{32}$$

По предположению, $\nu - \alpha = -\varepsilon < 0$ и $\psi_k \in \mathbf{L}_{p_k}(Q^n)$ для $k = \overline{2,m}$, а из (26) и (28) имеем $\|\psi_1^M\|_{p_1} \to 0$ при $M \to \infty$. Следовательно, последнее выражение в (32) стремится к нулю при $M \to \infty$ и $T \to \infty$.

Теорема 1 доказана.

§3. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СПЕКТРАЛЬНЫХ ОЦЕНОК

3.1. Асимптотическая несмещенность. Положим

$$h(\mathbf{w}) = \int_{Q^n} f(\mathbf{t})g(\mathbf{t}+\mathbf{w})\,d\mathbf{t}. \tag{33}$$

Пусть функционал $\varphi(f)$ и оценка $\widehat{\varphi}_T$ определены по формулам (2) и (4), соответственно.

Теорема 3. Пусть выполнено одно из следующих условий :

a) $f(\mathbf{t}) \in \mathbf{L}_{p_1}(Q^n)$ **и** $g(\mathbf{t}) \in \mathbf{L}_{p_2}(Q^n)$ **с** $p_1, p_2 \geq 1$, $1/p_1 + 1/p_2 \leq 1$ **или**

b) $h(\mathbf{w})$ **– ограничена и непрерывна в** $\mathbf{w} = 0 \stackrel{def}{=} \underbrace{(0,\dots,0)}_{n}$.

Тогда статистика $\widehat{\varphi}_T$ **является асимптотически несмещенной оценкой для** $\varphi(f)$**, т.е.**

$$\lim_{T\to\infty}[\mathbb{E}(\widehat{\varphi}_T) - \varphi(f)] = 0. \tag{34}$$

Доказательство : Вначале докажем, что при условии a), (34) следует из Теоремы 1. Положим

$$\Delta_T \stackrel{def}{=} \mathbb{E}(\widehat{\varphi}_T) - \varphi(f) \tag{35}$$

и покажем, что

$$\Delta_T = \frac{1}{(2\pi)^n|T|}\mathrm{tr}[\mathbb{B}_T(f)\mathbb{B}_T(g) - \mathbb{B}_T(fg)], \tag{36}$$

где $\mathbb{B}_T(f)$, $\mathbb{B}_T(g)$ и $\mathbb{B}_T(fg)$ – усеченные теплицевы операторы, порожденные функциями $f(\mathbf{t})$, $g(\mathbf{t})$ и $f(\mathbf{t})\,g(\mathbf{t})$, соответственно (см. (13)).

Действительно, из спектрального представления (7) и формулы (11) имеем

$$\mathbb{E}(\widehat{\varphi}_T) = \frac{1}{(2\pi)^n|T|}\int_{Q^n}\int_{Q^n}|G_T(\mathbf{t},\mathbf{s})|^2 f(\mathbf{t})\,g(\mathbf{s})\,d\mathbf{t}\,d\mathbf{s}, \tag{37}$$

где ядро $G_T(\mathbf{t},\mathbf{s})$ определяется по (8) и (9).

С другой стороны, легко убедиться (ср. [11], гл. 15), что оператор $\mathbb{B}_T(h)$ может быть реализован как интегральный оператор в $\mathbf{L}_2(Q^n)$ с ядром

$$\Gamma_{T,h}(\mathbf{t},\mathbf{s}) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{Q^n} G_T(\mathbf{t},\mathbf{w})\,G_T(\mathbf{w},\mathbf{s})h(\mathbf{w})\,d\mathbf{w}. \tag{38}$$

Поэтому и $\mathbb{B}_T(f)\,\mathbb{B}_T(g)$ может быть реализован как интегральный оператор в $\mathbf{L}_2(Q^n)$ с ядром

$$\Gamma_T(\mathbf{t},\mathbf{s}) \stackrel{def}{=} \int_{Q^n}\Gamma_{T,f}(\mathbf{t},\mathbf{w})\Gamma_{T,g}(\mathbf{w},\mathbf{s})\,d\mathbf{w} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int_{Q^n} \int_{Q^n} \int_{Q^n} G_T(\mathbf{t},\mathbf{u}) G_T(\mathbf{u},\mathbf{w}) G_T(\mathbf{w},\mathbf{v}) G_T(\mathbf{v},\mathbf{s})\, f(\mathbf{u})\, g(\mathbf{v})\, d\mathbf{w}\, d\mathbf{u}\, d\mathbf{v}. \tag{39}$$

Учитывая воспроизводящее свойство ядра $G_T(\mathbf{u},\mathbf{v})$:

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{Q^n} G_T(\mathbf{u},\mathbf{w}) G_T(\mathbf{w},\mathbf{v})\, d\mathbf{w} = G_T(\mathbf{u},\mathbf{v}), \tag{40}$$

из (39) находим

$$\Gamma_T(\mathbf{t},\mathbf{s}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{Q^n} \int_{Q^n} G_T(\mathbf{t},\mathbf{u}) G_T(\mathbf{u},\mathbf{v}) G_T(\mathbf{v},\mathbf{s})\, f(\mathbf{u})\, g(\mathbf{v})\, d\mathbf{u}\, d\mathbf{v}. \tag{41}$$

По известной формуле для вычисления следа интегральных операторов (см. [8], стр. 147) и (40), находим

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}[\mathbb{B}_T(f)\,\mathbb{B}_T(g)] &= \int_{Q^n} \Gamma_T(\mathbf{t},\mathbf{t})\, d\mathbf{t} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{Q^n} \int_{Q^n} \int_{Q^n} G_T(\mathbf{t},\mathbf{u}) G_T(\mathbf{u},\mathbf{v}) G_T(\mathbf{v},\mathbf{t}) f(\mathbf{u}) g(\mathbf{v})\, d\mathbf{u}\, d\mathbf{v}\, d\mathbf{t} = \\ &= \int_{Q^n} \int_{Q^n} G_T(\mathbf{u},\mathbf{v}) G_T(\mathbf{v},\mathbf{u}) f(\mathbf{u}) g(\mathbf{v})\, d\mathbf{u}\, d\mathbf{v} = \int_{Q^n} \int_{Q^n} |G_T(\mathbf{u},\mathbf{v})|^2 f(\mathbf{u}) g(\mathbf{v})\, d\mathbf{u}\, d\mathbf{v}. \end{aligned} \tag{42}$$

Из (21), (38) с $h = fg$ и (40) получаем

$$\operatorname{tr}[\mathbb{B}_T(fg)] = \int_{Q^n} \int_{Q^n} G_T(\mathbf{t},\mathbf{u}) G_T(\mathbf{u},\mathbf{t})\, f(\mathbf{u})\, g(\mathbf{u})\, d\mathbf{u}\, d\mathbf{t} = (2\pi)^n |T| \int_{Q^n} f(\mathbf{u}) g(\mathbf{u})\, d\mathbf{u}. \tag{43}$$

Теперь нетрудно заметить, что (36) следует из (2), (35), (37), (42) и (43). Применяя Теорему 1, пункт a) для $m = 2$, $\psi_1 = f$ и $\psi_2 = g$, из (36) и (43) находим

$$\Delta_T = o(1) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{44}$$

Отсюда и из (35) получаем (34). Тем самым, при выполнении условия a) теорема доказана.

Для доказательства утверждения теоремы при выполнении условия b) нам понадобится следующий результат из теории кратных тригонометрических рядов (см. [16], том II, Теорема (1.20)).

Лемма 2. **Пусть $\psi(\mathbf{t})$ – ограниченная функция. Тогда в каждой точке непрерывности $\mathbf{t} = \mathbf{t}_0$ функции $\psi(\mathbf{t})$ имеем**

$$\lim_{T\to\infty} \int_{Q^n} F_T(\mathbf{t}_0 - \mathbf{s}) \psi(\mathbf{s})\, d\mathbf{s} = \psi(\mathbf{t}_0),$$

где $F_T(\mathbf{t})$ – ядро Фейера, определенное по (24) и (25).

Имеем

$$\frac{1}{(2\pi)^n|T|}|G_T(\mathbf{u}-\mathbf{v})|^2 = F_T(\mathbf{u}-\mathbf{v}). \tag{45}$$

Поэтому, из (33), (37) и (45) находим

$$\mathbb{E}(\widehat{\varphi}_T) = \int_{Q^n}\int_{Q^n} F_T(\mathbf{t}-\mathbf{s})\, f(\mathbf{t})\, g(\mathbf{s})\, d\mathbf{t}\, d\mathbf{s} = \int_{Q^n} F_T(\mathbf{u})\, h(\mathbf{u})\, d\mathbf{u}. \tag{46}$$

Отсюда и из (2) и (33) получаем

$$\mathbb{E}(\widehat{\varphi}_T) - \varphi(f) = \int_{Q^n} F_T(\mathbf{u})\, h(\mathbf{u})\, d\mathbf{u} - h(\mathbf{0}). \tag{47}$$

Так как, по предположению, функция $h(\mathbf{w})$ ограничена и непрерывна в точке $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, то требуемый результат следует из Леммы 2. Теорема 3 доказана.

Замечание 2. Теорема 3 для случая a) другим методом была доказана в [2].

3.2. Состоятельность. Сперва изучим асимптотическое поведение дисперсии оценки $\widehat{\varphi}_T$, определенной по (4).

Теорема 4. Пусть $f(\mathbf{t}) \in \mathbf{L}_{p_1}(Q^n)$ и $g(\mathbf{t}) \in \mathbf{L}_{p_2}(Q^n)$, где $p_1, p_2 \geq 1$ и $1/p_1 + 1/p_2 \leq 1/2$. Тогда

$$\lim_{T\to\infty} |T|\, \mathbb{E}(\widehat{\varphi}_T - \mathbb{E}(\widehat{\varphi}_T))^2 = 2\cdot(2\pi)^{3n}\int_{Q^n} f^2(\mathbf{t})\, g^2(\mathbf{t})\, d\mathbf{t}. \tag{48}$$

Доказательство : Из (12) находим

$$\mathbb{D}(\widehat{\varphi}_T) = \chi_2(|T|^{1/2}(\widehat{\varphi}_T - \mathbb{E}(\widehat{\varphi}_T))) = \frac{2}{|T|}\operatorname{tr}[\mathbb{B}_T(f)\mathbb{B}_T(g)]^2. \tag{49}$$

Поэтому, полагая $m = 4$, $\psi_1 = \psi_3 = f$, $\psi_2 = \psi_4 = g$, и применяя Теорему 1 a), из (49) получаем (48). Теорема 4 доказана.

Теорема 5. При условиях Теоремы 4 статистика $\widehat{\varphi}_T$, определенная по формуле (4), является среднеквадратически состоятельной оценкой для функционала (2) :

$$\lim_{T\to\infty} \mathbb{E}(\widehat{\varphi}_T - \varphi(f))^2 = 0. \tag{50}$$

Доказательство : Имеем

$$\mathbb{E}(\widehat{\varphi}_T - \varphi(f))^2 = \mathbb{E}(\widehat{\varphi}_T - \mathbb{E}(\widehat{\varphi}_T))^2 + K_T^2, \tag{51}$$

где $K_T = \varphi(f) - \mathbb{E}(\widehat{\varphi}_T)$. Поэтому, (50) является непосредственным следствием (51) и Теорем 3 и 4. Теорема 5 доказана.

3.3. Асимптотическая нормальность.

Теорема 6. При условиях Теоремы 4 распределение нормированной случайной величины $|T|^{1/2}(\widehat{\varphi}_T - \mathbb{E}(\widehat{\varphi}_T))$ слабо сходится (при $T \to \infty$) к нормальному распределению $N(0, \sigma^2)$ с дисперсией σ^2 :

$$\sigma^2 = 2 \cdot (2\pi)^{3n} \int_{Q^n} f^2(\mathbf{t})\, g^2(\mathbf{t})\, d\mathbf{t}. \tag{52}$$

Доказательство : Применим метод кумулянтов : в силу (12) находим

$$\chi_k\left(|T|^{1/2}(\widehat{\varphi}_T - \mathbb{E}(\widehat{\varphi}_T))\right) = \begin{cases} 0, & \text{для } k = 1 \\ \dfrac{2^{k-1}}{|T|^{k/2}}(k-1)!\,\mathrm{tr}\,[\mathbb{B}_T(f)\,\mathbb{B}_T(g)]^k, & \text{для } k \geq 2 \end{cases} \tag{53}$$

По Теореме 4 при $T \to \infty$ имеем

$$\chi_2\left(|T|^{1/2}(\widehat{\varphi}_T - \mathbb{E}(\widehat{\varphi}_T))\right) = \frac{2}{|T|}\mathrm{tr}\,[\mathbb{B}_T(f)\,\mathbb{B}_T(g)]^2 \to 2\,(2\pi)^{3n} \int_{Q^n} f^2(\mathbf{t})\, g^2(\mathbf{t})\, d\mathbf{t}. \tag{54}$$

Далее, из (53) и Теоремы 1, b) для $k \geq 3$ получаем

$$\chi_k\left(|T|^{1/2}(\widehat{\varphi}_T - \mathbb{E}(\widehat{\varphi}_T))\right) \to 0 \qquad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{55}$$

Комбинируя (53) - (55) завершаем доказательство Теоремы 6.

3.4. Локальные условия. В этом пункте, используя хорошо известную теорему вложения для классов Никольского, мы получаем "локальные" достаточные условия для вышеприведенных асимптотических свойств оценки $\widehat{\varphi}_T$. Напомним определение класса Никольского $\mathbf{H}_p(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ (см. [4], [15]).

Определение 1. Для заданных чисел $1 \leq p \leq \infty$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $0 < \alpha_k < 1$ и $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n)$, $r_k \in \mathbb{N}_0$ $(k = \overline{1,n})$, где $\mathbb{N}_0$ - множество неотрицательных целых чисел, положим $\gamma_k = r_k + \alpha_k$ $(k = \overline{1,n})$ и $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. Функция $\psi(\mathbf{t}) = \psi(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbf{L}_p(Q^n)$ принадлежит классу $\mathbf{H}_{p,k}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, если $\psi(\mathbf{t})$ имеет обобщенную производную $\psi_{t_k}^{(r_k)}(\mathbf{t}) \in \mathbf{L}_p(Q^n)$, удовлетворяющую следующему условию :

$$\|\psi_{t_k}^{(r_k)}(\cdot + e_k h) - \psi_{t_k}^{(r_k)}(\cdot)\|_p \leq C_k |h|^{\alpha_k},$$

где $C_k > 0$ - постоянная, а e_k - единичный вектор направленный по оси t_k. Пространство $\mathbf{H}_p(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ определяется следующим образом :

$$\mathbf{H}_p(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = \bigcap_{k=1}^{n} \mathbf{H}_{p,k}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$$

Для заданных $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ и $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\beta_k, \gamma_k > 0$ $(k = \overline{1,n})$, положим

$$\overline{\beta} = \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k^{-1}\right)^{-1} \quad \text{и} \quad \overline{\gamma} = \left(\sum_{k=1}^{n} \gamma_k^{-1}\right)^{-1}. \tag{56}$$

Следующая теорема вложения принадлежит С. М. Никольскому (см. [4], [13], [15]).

Лемма 3. Пусть $\psi(t) \in \mathbf{H}_p(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ с $p \geq 1$ и $\gamma_k > 0$ $(k = \overline{1,n})$. Пусть p_1 удовлетворяет условию $p < p_1 \leq \infty$ и $\chi = 1 - (1/p - 1/p_1)\, 1/\overline{\gamma} > 0$. Тогда $\psi(t) \in \mathbf{H}_{p_1}(\rho_1, \ldots, \rho_n)$, где $\rho_k = \chi\gamma_k$, $k = \overline{1,n}$. В частности, если $\overline{\gamma} > 1/p$, то $\psi(t)$ непрерывна и $\|\psi\|_\infty < \infty$.

Определение 2. Пусть $\Sigma_p(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ – множество всех спектральных плотностей из класса $\mathbf{H}_p(\beta_1, \ldots, \beta_n)$. Будем говорить, что пара (f, g) функций $f(t)$ и $g(t)$ удовлетворяет **условию** $(\mathcal{H})$, если $f(t) \in \Sigma_p(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ и $g(t) \in \mathbf{H}_q(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ для некоторых $\beta_k, \gamma_k > 0$ $(k = \overline{1,n})$ и $p, q \geq 1$ $(1/p + 1/q = 1)$, удовлетворяющих одному из следующих условий c1) – c4) :

c1) $\overline{\beta} > 1/p$, $\overline{\gamma} > 1/q$,

c2) $\overline{\beta} \leq 1/p$, $\overline{\gamma} \leq 1/q$ и $\overline{\beta} + \overline{\gamma} > 1/2$,

c3) $\overline{\beta} > 1/p$, $1/q - 1/2 < \overline{\gamma} \leq 1/q$,

c4) $\overline{\gamma} > 1/q$, $\quad 1/p - 1/2 < \overline{\beta} \leq 1/p$,

где $\overline{\beta}$ и $\overline{\gamma}$ задаются формулой (56).

Теорема 7. Пусть пара (f, g) функций $f(t)$ и $g(t)$ удовлетворяет условию $(\mathcal{H})$. Тогда статистика $\widehat{\varphi}_T$, определенная формулой (4), является асимптотически несмещенной и среднеквадратически состоятельной оценкой для функционала (2), и имеет асимптотически (при $T \to \infty$) нормальное $N(0, \sigma^2)$ распределение с дисперсией σ^2, задаваемой по формуле (52).

Доказательство : Достаточно показать, что в условиях теоремы существуют числа p_1 $(p_1 > p)$ и q_1 $(q_1 > q)$, удовлетворяющие условию $1/p_1 + 1/q_1 \leq 1/2$ такие, что $\Sigma_p(\beta_1, \ldots, \beta_n) \subset \mathbf{L}_{p_1}(Q^n)$ и $\mathbf{H}_q(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \subset \mathbf{L}_{q_1}(Q^n)$.

Случай $\overline{\beta} > 1/p$, $\overline{\gamma} > 1/q$ очевиден, так как из Леммы 3 имеем $\Sigma_p(\beta_1, \ldots, \beta_n) \subset \mathbf{L}_\infty(Q^n)$ и $\mathbf{H}_q(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \subset \mathbf{L}_\infty(Q^n)$.

Пусть теперь $\overline{\beta} \leq 1/p$, $\overline{\gamma} \leq 1/q$ и $\overline{\beta} + \overline{\gamma} > 1/2$. Для произвольного числа $\varepsilon > 0$, удовлетворяющего условиям $\overline{\beta} > \varepsilon$ и $\overline{\gamma} > \varepsilon$, полагаем

$$\frac{1}{p_1} = \frac{1}{p} - \overline{\beta} + \varepsilon, \qquad \frac{1}{q_1} = \frac{1}{q} - \overline{\gamma} + \varepsilon. \tag{57}$$

Легко видеть, что $p_1 > p$, $q_1 > q$, $\chi_1 = 1 - (1/p - 1/p_1)\,1/\overline{\beta} > 0$ и $\chi_2 = 1 - (1/q - 1/q_1)\,1/\overline{\gamma} > 0$. Следовательно, из Леммы 3 находим $\Sigma_p(\beta_1, \ldots, \beta_n) \subset \mathbf{L}_{p_1}(Q^n)$ и $\mathbf{H}_q(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \subset \mathbf{L}_{q_1}(Q^n)$. Далее, используя (57) получаем

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - (\overline{\beta} + \overline{\gamma}) + 2\epsilon = 1 - (\overline{\beta} + \overline{\gamma}) + 2\epsilon.$$

Так как ϵ произвольно и по предположению $\overline{\beta} + \overline{\gamma} > 1/2$, получаем $1/p_1 + 1/q_1 \leq 1/2$.

Пусть теперь $\overline{\beta} > 1/p$ и $1/q - 1/2 < \overline{\gamma} \leq 1/q$. По Лемме 3 имеем $\Sigma_p(\beta_1, \ldots, \beta_n) \subset \mathbf{L}_\infty(Q^n)$. Для произвольного $\varepsilon > 0$, удовлетворяющего условию $\overline{\gamma} > \varepsilon$, положим

$$\frac{1}{q_1} = \frac{1}{q} - \overline{\gamma} + \varepsilon. \tag{58}$$

Очевидно $q_1 > q$ и $\chi_2 = 1 - (1/q - 1/q_1)\,1/\overline{\gamma} > 0$. Следовательно, в силу Леммы 3, имеем $\mathbf{H}_q(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \subset \mathbf{L}_{q_1}(Q^n)$. Далее, из (58) находим

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{q} - \overline{\gamma} + \varepsilon.$$

Так как ϵ произвольно и по предположению $1/q - \overline{\gamma} < 1/2$, получаем $1/p_1 + 1/q_1 \leq 1/2$.

Случай $\overline{\gamma} > 1/q$ и $1/p - 1/2 < \overline{\beta} \leq 1/p$ исследуется аналогичным образом. Применяя Теоремы 3, 5 и 6 мы завершаем доказательство Теоремы 7.

Замечание 3. Для стационарных гауссовских процессов ($n = 1$) в [7] было показано, что в условиях Теоремы 7, статистика $\widehat{\varphi}_T$, определенная по (4), есть $T^{1/2}$-состоятельная, асимптотически нормальна и асимптотически эффективная оценка для функционала (2). Для однородных гауссовских полей ($n > 1$) этот результат становится не верным.

Действительно, используя стандартные аргументы (см. [2], [7], [10]), можно показать, что когда $T = (T_1, \ldots T_n)$ стремится к бесконечности с постоянной скоростью во всех направлениях, то в силу Теоремы 7, смещение $K_T = |\mathbb{E}(\widehat{\varphi}_T) - \varphi(f)|$ оценки $\widehat{\varphi}_T$ зависит от размерности n и имеет порядок $O\left(|T|^{-1/n}\right)$. Следовательно, в отличии от случая $n = 1$, для $n > 1$ случайные величины $\xi_T = |T|^{1/2}(\widehat{\varphi}_T - \mathbb{E}(\widehat{\varphi}_T))$ и $\eta_T = |T|^{1/2}(\widehat{\varphi}_T - \varphi(f))$ имеют различные асимптотические (при $T \to \infty$) распределения.

Отметим, что в [10] найдены условия, при которых модифицированная периодограммная статистика является $|T|^{1/2}$ состоятельной оценкой для функционала (2)

ABSTRACT. Let $X(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in U^n$ be a centered real-valued homogeneous Gaussian field with spectral density $f(\mathbf{t}) = f(t_1, \ldots, t_n)$. We consider the problem of nonparametric statistical estimation of spectral averages $\varphi(f) = \int g(\mathbf{t}) f(\mathbf{t})\, d\mathbf{t}$, on the basis of a sample $\mathbf{X}_T$ of size $T = (T_1, \ldots, T_n)$. As an estimator for $\varphi(f)$ we take the statistics $\widehat{\varphi}_T = \int g(\mathbf{t}) I_T(\mathbf{t})\, d\mathbf{t}$, where $I_T(\mathbf{t})$ is the periodogram of $X(\mathbf{u})$. The paper describes some classes of spectral densities, where $\widehat{\varphi}_T$ is asymptotically unbiased, mean square consistent estimator for the functional $\varphi(f)$ and has asymptotically normal distribution. Both continuous and discrete parameter cases are treated.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Avram, "On bilinear forms in Gaussian random Variables and Toeplitz matrices," Probab. Theory Relat. Fields, vol. 79, pp. 37 — 45, 1988.
2. Р. Бенткус, Р. Рудзкис, Ю. Сушинскас, "О среднем оценок спектра однородного поля", Литовский Мат. Сб., том 14, стр. 67 — 74, 1974.
3. Р. Бенткус, В. Руткаускас, "Об асимптотике первых двух моментов спектральных оценок второго порядка", Литовский Мат. Сб., том 13, стр. 29 — 45, 1973.
4. В. И. Буренков, "Теоремы вложения и продолжения для классов дифференцируемых функций многих переменных, заданных во всем пространстве", Итоги Науки ; Мат. Анализ, 1965, № 13, стр. 71 — 155, Москва, 1966.
5. М. С. Гиновян, "Асимптотические свойства оценки спектра однородного гауссовского поля", ДАН Армении, том 94, стр. 264 — 269, 1993.
6. M. S. Ginovian, "On Toeplitz Type Quadratic Functionals in Gaussian Stationary Process", Probability Theory and Related Fields, vol. 100, pp. 395 - 406, 1994.
7. М. С. Гиновян, "Асимптотические свойства спектральных оценок стационарных гауссовских процессов", Изв. АН Армении, Математика, том 30, № 1, стр. 3 — 20, 1995.
8. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Введение в Теорию Линейных Несамосопряженных Операторов в Гильбертовом Пространстве, Москва, Наука, 1965.
9. U. Grenander and G. Szegö, Toeplitz Forms and their Applications, Berkeley and Los Angeles, University of California Press, 1958.
10. X. Guyon, "Some parameter estimation for a stationary process on a d–dimensional lattice," Biometrika, vol. 69, pp. 95 — 105, 1982.
11. P. R. Halmosh, A Hilbert Space Problem Book, Princeton-New Jersey, D. Van Nostrand Company, Inc., 1967.
12. И. А. Ибрагимов, "Об оценке спектральной функции стационарного гауссовского процесса", Теория Вер. и Прим., том 8, стр. 391 — 430, 1963.
13. В. И. Коляда, "О вложении классов $H_p^{\omega_1, \ldots, \omega_n}$", Мат. Сборник, том 127 (169), № 3, стр. 352 — 383, 1985.
14. Г. Крамер, М. Р. Лидбеттер, Стационарные Случайные Процессы. Свойства Выборочных Функций и их Приложения, Мир, Москва, 1969.
15. С. М. Никольский, Приближение Функций Многих Переменных и Теоремы Вложения, Москва, Наука, 1977.
16. A. Zygmund, Trigonometric Series, vol. I, II, Cambridge University Press, 1965.

12 Декабря 1998

Институт математики
Национальной Академии Наук Армении
E-mail : mamgin@instmath.sci.am