# ОБРАЩЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРОВ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА С ОСОБЕННОСТЯМИ ЯДЕР НА СФЕРЕ

**В. А. Ногин, А. Н. Карапетянц**

**Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 1, 1999**

**В работе рассматриваются мультипликативные операторы $A^\alpha_{a,\gamma}$ с символами $a(|\xi|)\,|\xi|^{-\alpha}e^{i\gamma|\xi|}$, $(n-1)/2 < \operatorname{Re}\alpha < n$, $\gamma > 0$, действующие на функциях $\varphi \in L_p(\mathbb{R}^n)$. Для $1 \le p < n/\operatorname{Re}\alpha$ они часто реализуются в виде операторов типа потенциала со степенными или логарифмическими особенностями ядер на сфере. Строится обращение указанных операторов на функциях из $L_p$ в эллиптическом $(\inf\limits_{t>0}|a(t)| > 0)$, квазиэллиптическом $(a(t) \neq 0,\ t > 0)$ и в общем неэллиптическом $(\operatorname{mes}\{t > 0 : a(t) = 0\} = 0)$ случаях. В первых двух случаях приводится также описание образов $A^\alpha_{a,\gamma}(L_p)$.**

## §1. ВВЕДЕНИЕ

Задача обращения операторов типа потенциала

$$I^\alpha_\theta\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\theta(y)}{|y|^{n-\alpha}}\,\varphi(x-y)\,dy, \qquad 0 < \operatorname{Re}\alpha < n \tag{1}$$

с гладкими характеристиками $\theta(x)$ в настоящее время представляет значительный интерес. Первые работы в этом направлении принадлежат С. Г. Самко, построившему обращение и получившему описание потенциалов Рисса с $L_p$-плотностями (см. [1], [2]), а также обобщенных потенциалов Рисса с однородными характеристиками (см. [3]). Эти и дальнейшие исследования по обращению операторов вида (1) отражены в обзорной статье [4].

Естественным развитием указанной тематики является обращение операторов типа потенциала с особенностями ядер, "размазанными" по подмножествам из $\mathbb{R}^n$. Такие потенциалы находят приложение в теории дробных степеней дифференциальных операторов, в частности, классических операторов математической физики, волновых операторов, операторов Клейна–Гордона–Фока и

*Данное исследование финансировано Русским Фондом фундаментальных исследований (грант № 96-01-00098а)*

Шредингера, телеграфного оператора (см. [4] — [8]), а также гипоэллиптических операторов второго порядка с постоянными коэффициентами (см. [9]).

В настоящей статье в рамках $L_p$-пространств методом аппроксимативных обратных операторов строится обращение мультипликативных операторов $A^{\alpha}_{a,\gamma}$ с символами

$$m_{\alpha,\gamma}(|\xi|) = a(|\xi|)\,|\xi|^{-\alpha} \exp\{i\gamma\,|\xi|\}, \quad \gamma > 0, \quad \frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n, \tag{2}$$

$$a(t) \in \Lambda^m(\mathbb{R}^1_+) \equiv \{\omega \in C^m(\mathbb{R}^1_+) : |\omega^{(k)}(t)| \le c\,t^{-k}, \quad 0 \le k \le m\}.$$

Эти операторы представимы в виде операторов типа потенциала со степенными или логарифмическими особенностями ядер на сфере $|x| = \gamma$ при $\frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < \frac{n+1}{2}$. Как будет доказано ниже, при достаточно гладких $a(|\xi|)$ операторы $A^{\alpha}_{a,\gamma}$ не имеют особенности в начале координат (т.е. они непрерывны в нуле). Интересно, что потенциалы, определенные по (1) с радиальными характеристиками $\theta(x) = \theta(|x|)$, являются предельными операторами (при $\gamma \to 0$) операторов в классе операторов $\{A^{\alpha}_{a,\gamma}\}_{\gamma \ge 0}$.

Операторы $A^{\alpha}_{a,\gamma}$, действующие на функциях $\varphi \in L_p$, реализуются в виде свертки :

$$A^{\alpha}_{a,\gamma}\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Omega_{\alpha,\gamma}(|y|)\,\varphi(x-y)\,dy, \quad \frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n, \quad 1 \le p < \frac{n}{\operatorname{Re}\alpha}, \tag{3}$$

где

$$\Omega_{\alpha,\gamma}(|x|) = (2\pi)^{-n/2}|x|^{\alpha-n} \int_0^\infty t^{n/2-\alpha} a(t\,|x|^{-1}) \exp(i\gamma\,t\,|x|^{-1})\, J_{\frac{n-2}{2}}(t)\,dt, \tag{4}$$

при $\frac{n+1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$, а при $\frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < \frac{n+1}{2}$ понимается аналитическое продолжение (относительно $\alpha$) правой части равенства (4) в полосу $\frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$ (см. Теорему 3).

Для "достаточно хороших" функций операторы, определенные по (3), имеют представление

$$\widehat{A^{\alpha}_{a,\gamma}\varphi}(\xi) = m_{\alpha,\gamma}(|\xi|)\,\widehat{\varphi}(\xi), \tag{5}$$

где $m_{\alpha,\gamma}(|\xi|)$ определена по (2).

В рамках пространств $L_p$ строится обращение для операторов $A^{\alpha}_{a,\gamma}$ в эллиптическом ($\inf_{t>0}|a(t)| > 0$), квазиэллиптическом ($a(t) \ne 0$, $t > 0$), а также в общем неэллиптическом ($\operatorname{mes}\{t > 0 : a(t) = 0\} = 0$) случаях. В квазиэллиптическом случае мы предполагаем, что в нуле и на бесконечности $a(|\xi|)$ может иметь нуль даже экспоненциального порядка, т.е. $|a(|\xi|)|^{-1}\exp(-\eta\,|\xi|-\theta/|\xi|)\le c$ для некоторых $\eta,\theta\ge 0$.

В эллиптическом и квазиэллиптическом случаях обратный к $A^{\alpha}_{a,\gamma}$ оператор имеет вид

$$B^{\alpha}_{a,\gamma}f(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}B^{\alpha}_{a,\gamma,\varepsilon}f(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}b^{\delta}_{\alpha,\varepsilon}(|y|)\,\varphi(x-y)\,dy, \tag{6}$$

где

$$b^{\delta}_{\alpha,\varepsilon}(|x|)=\left(F^{-1}B^{\delta}_{\alpha,\varepsilon}\right)(|x|),\qquad B^{\delta}_{\alpha,\varepsilon}(|\xi|)=\frac{|\xi|^{\alpha}}{a(|\xi|)}\exp\left\{-\varepsilon\,|\xi|^2-\delta\,\frac{\varepsilon}{|\xi|^{2n}}-i\gamma\,|\xi|\right\} \tag{7}$$

Выше $\delta=0$ в эллиптическом случае, $\delta=1$ в квазиэллиптическом случае, и $F^{-1}f(x)$ есть обратное преобразование Фурье. Мы докажем следующие теоремы.

**Теорема 1.** **Пусть** $\dfrac{n-1}{2}<\operatorname{Re}\alpha<n$, $1\le p<\dfrac{n}{\operatorname{Re}\alpha}$, $a(t)\in\Lambda^m(\mathbb{R}^1_+)$, $m>\left[\dfrac{n}{2}\right]$, $a(t)\ne 0$ **для** $t>0$ **и** $|a(t)|^{-1}\exp(-\eta t-\theta/t)<c$, $\eta,\theta\ge 0$. **Тогда**

$$B^{\alpha}_{a,\gamma}A^{\alpha}_{a,\gamma}\varphi(x)=\varphi(x),\qquad \varphi\in L_p,$$

**где** $B^{\alpha}_{a,\gamma}$ **– оператор определенный по (6). Предел в (6) понимается по норме** $L_p$ **для** $1<p<\dfrac{n}{\operatorname{Re}\alpha}$ **или почти всюду при** $1\le p<\dfrac{n}{\operatorname{Re}\alpha}$.

В неэллиптическом случае обратный оператор $A^{\alpha}_{a,\gamma}$ строится в виде

$$T^{\alpha}_{a,\gamma}f(x)=\overset{(L_p)}{\lim_{\varepsilon\to 0}}\;\overset{(L_2)}{\lim_{\delta\to 0}}\,T^{\alpha}_{a,\gamma,\varepsilon,\delta}f(x)=\overset{(L_p)}{\lim_{\varepsilon\to 0}}\;\overset{(L_2)}{\lim_{\delta\to 0}}\int_{\mathbb{R}^n}h^{\varepsilon,\delta}_{\alpha,\gamma}(|y|)\,f(x-y)\,dy, \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned}&h^{\varepsilon,\delta}_{\alpha,\gamma}(|x|)=\left(F^{-1}H^{\varepsilon,\delta}_{\alpha,\gamma}\right)(|x|),\\&H^{\varepsilon,\delta}_{\alpha,\gamma}(|\xi|)=\overline{a(|\xi|)}\,|\xi|^{\alpha}\exp\left\{-i\gamma\,|\xi|-\varepsilon\,|\xi|^2\right\}\left(|a(|\xi|)|^2+i\delta\right)^{-1}.\end{aligned} \tag{9}$$

**Теорема 2.** **Пусть** $\dfrac{n-1}{2}<\operatorname{Re}\alpha<n$, $1\le p<\min\left(2,\dfrac{n}{\operatorname{Re}\alpha}\right)$. **Предположим, что** $a(t)\in\Lambda^m(\mathbb{R}^1_+)$, $m>\left[\dfrac{n}{2}\right]$, $\operatorname{mes}\{t>0\colon a(t)=0\}=0$. **Тогда**

$$T^{\alpha}_{a,\gamma}A^{\alpha}_{a,\gamma}\varphi(x)=\varphi(x),\qquad \varphi\in L_p,$$

**где** $T^{\alpha}_{a,\gamma}$ **– оператор, определенный по (8). Предел в (8) можно понимать как по норме** $L_p$**, так и как предел почти всюду.**

Отметим, что ранее задача обращения операторов с символами вида (2) рассматривалась лишь в двух частных случаях : когда $a(|\xi|)\equiv 1$ в [15] и когда $a(|\xi|)$ – полином в [10].

## §2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Мы будем использовать следующие обозначения : $D^k f(x) = \dfrac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \ldots, \partial x_n^{k_n}} f(x)$, где $k = (k_1, \ldots, k_n)$ есть мультииндекс, $|k| = k_1 + \ldots + k_n$ – его длина ; $< f, \omega >= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)}\, \omega(x)\, dx$ ; $Ff(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(x)\, dx$ – преобразование Фурье функции $f(x)$ ; $F^{-1} f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(\xi)\, d\xi$ – обратное преобразование Фурье ; $W(x,\varepsilon) = (4\pi\varepsilon)^{-n/2} \exp\{-|x|^2/(4\varepsilon)\}$ – ядро Гаусса-Вейерштрасса ; $W_\varepsilon \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} W(x-y,\varepsilon)\, \varphi(y)\, dy$, $S = S(\mathbb{R}^n)$ – класс Л. Шварца быстро убывающих гладких функций ; $\mathbf{L}_p = \mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n)$ ; $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_0(\mathbb{R}^n) = \{f(\xi)\colon f(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi),\ \varphi \in \mathbf{L}_1\}$ – винеровское кольцо функций ; $M_p^p$ – класс $p$–мультипликаторов ; $\Psi_0 = \Psi_0(\mathbb{R}^n) = \{\psi(x) \in S\colon D^k\psi(0) = 0,\ |k| = 0, 1, 2, \ldots\}$, $\Phi_0 = \Phi_0(\mathbb{R}^n) = \{\varphi(x) \in S\colon \widehat{\varphi}(\xi) \in \Psi_0\}$.

Обозначим через $J_\nu(z)$ функцию Бесселя первого рода. Для достаточно больших значений $|z|$ и $|\arg z| < \pi$ имеет место следующее асимптотическое разложение (см. [11], формула 8.451, стр. 975) :

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[\cos(z - \pi\nu/2 - \pi/4) \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k \Gamma(\nu + 2k + 1/2)}{(2k)!\, \Gamma(\nu - 2k + 1/2)} (2z)^{-2k} + O(|z|^{-2m})\right) - \sin(z - \pi\nu/2 - \pi/4) \times \right.$$
$$\left. \times \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k \Gamma(\nu + 2k + 3/2)}{(2k+1)!\, \Gamma(\nu - 2k - 1/2)} (2z)^{-2k-1} + O(|z|^{-2m-1})\right)\right]. \tag{10}$$

Функция $J_\nu(z)$ допускает следующее интегральное представление (см. [11], формула 8.411.10) :

$$J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu + 1/2)\, \Gamma(1/2)} \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^{\nu - 1/2} e^{izt}\, dt, \qquad \mathrm{Re}\,\nu > -1/2. \tag{11}$$

Из (10) и (11) легко следуют необходимые в дальнейшем оценки

$$|J_\nu(z)| \le c\,|z|^{\mathrm{Re}\,\nu}, \qquad |z| < 1, \qquad \mathrm{Re}\,\nu > -1/2, \tag{12}$$

$$|J_\nu(z)| \le c\,|z|^{-1/2}, \qquad |z| > 1. \tag{13}$$

Нам понадобятся следующие утверждения.

**Лемма 1.** [12]. **Пусть функция $f(x, z)$ аналитична по $z$ в некоторой области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ при почти всех $x \in \Omega$, где $\Omega$ – измеримое множество в $\mathbb{R}^n$ и имеет суммируемую мажоранту : $|f(x, z)| \le F(x) \in \mathbf{L}_1(\Omega)$. Тогда $\int_\Omega f(x, z)\, dx$ аналитичен в $\mathcal{D}$.**

**Лемма 2.** [13]. **a) Пусть** $f \in C^N(\mathbb{R}^n)$, $N > [n/2]$ **и существуют постоянные** $c, \delta > 0$ **такие, что** $|D^k f(x)| \le c\,|x|^{-\delta-|k|}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $0 \le |k| \le N$. **Тогда** $f \in \mathcal{R}_0$.
**b) Пусть** $f \in C^N(\mathbb{R}^n \setminus \{O\})$, $N > [n/2]$ **имеет компактный носитель и существуют такие постоянные** $c, \delta > 0$, **что** $|D^k f(x)| \le c\,|x|^{\delta-|x|}$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$, $0 \le |k| \le N$. **Тогда** $f \in \mathcal{R}_0$.

## §3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ $A^{\alpha}_{a,\gamma}$ С СИМВОЛАМИ $m_{a,\gamma}(|\xi|)$

**1. Востановление ядра $\Omega_{a,\gamma}(|x|)$ оператора $A^{\alpha}_{a,\gamma}$ по его символу $m_{a,\gamma}(|\xi|)$.** Начнем с представления

$$\Omega_{a,\gamma}(|x|) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} m_{a,\gamma}(|\xi|)\, e^{ix\xi}\, d\xi.$$

Переходя к полярным координатам и используя формулу Бохнера (см. [14], стр. 358) для $\frac{n+1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$ получаем (4). Тогда из (12) и (13) следует, что интеграл в (4) абсолютно сходится. Из указанных выше оценок и Леммы 1 следует аналитичность (по $\alpha$) функции $\Omega_{\alpha,\gamma}(|x|)$ в полосе $\frac{n+1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$

**Теорема 3.** **Для** $a(t) \in \Lambda^1(\mathbb{R}^1_+)$ **интеграл** $\Omega_{\alpha,\gamma}(|x|)$ **абсолютно сходится при** $\frac{n+1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$ **и допускает аналитическое продолжение в полосу** $\frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$ $(|x| \ne \gamma)$. **Это аналитическое продолжение имеет следующий вид :**

$$\Omega_{\alpha,\gamma}(|x|) = \Omega^1_{\alpha,\gamma}(|x|) + \Omega^2_{\alpha,\gamma}(|x|) + \Omega^3_{\alpha,\gamma}(|x|) + \Omega^4_{\alpha,\gamma}(|x|). \tag{14}$$

где

$$\Omega^1_{a,\gamma}(|x|) = \frac{(2\pi)^{-n/2}}{|x|^{n-\alpha}} \int_0^{\frac{\gamma+|x|}{|\gamma-|x||}} t^{n/2-\alpha} \exp\left(i\gamma t/|x|\right) a(t/|x|)\, J_{\frac{n-2}{2}}(t)\, dt,$$

$$\Omega^2_{\alpha,\gamma}(|x|) = \frac{2^{-(n-1)/2}\pi^{-(n+1)/2}}{|x|^{n-\alpha}} \times$$
$$\times \int_{\frac{\gamma+|x|}{|\gamma-|x||}}^{\infty} t^{(n-1)/2-\alpha} \exp\left(i\gamma t/|x|\right) a(t/|x|) \left[\varphi(t)\cos\left(t - \frac{n-1}{4}\pi\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{(n-1)(n-3)}{8}\left(\frac{1}{t} + \Psi(t)\right) \sin\left(t - \frac{n-1}{4}\pi\right)\right] dt,$$

$$\Omega^3_{\alpha,\gamma}(|x|) = i\,\frac{(2\pi)^{-(n+1)/2}}{|x|^{n-\alpha-1}(\gamma-|x|)} \left[\frac{\gamma-|x|}{\gamma+|x|} \exp\left\{i\left(\frac{(\gamma+|x|)^2}{|x|\,|\gamma-|x||} - \frac{n-1}{4}\pi\right)\right\} + \right.$$
$$\left. + \exp\left\{i\left(\frac{\gamma^2-|x|^2}{|x|\,|\gamma-|x||} + \frac{n-1}{4}\pi\right)\right\}\right] \left(\frac{\gamma+|x|}{|\gamma-|x||}\right)^{(n-1-2\alpha)/2} a\left(\frac{\gamma+|x|}{|x|\,|\gamma-|x||}\right),$$

$$\Omega^4_{\alpha,\gamma}(|x|) = i\,\frac{(2\pi)^{-(n+1)/2}(\gamma+|x|)}{|x|^{n-\alpha-1}(\gamma-|x|)\,|\gamma-|x||}\times$$
$$\times\int_1^\infty\left[\frac{\gamma-|x|}{\gamma+|x|}\exp\left\{i\left(\frac{(\gamma+|x|)^2}{|x|\,|\gamma-|x||}y-\frac{n-1}{4}\pi\right)\right\}+\right.$$
$$\left.+\exp\left\{i\left(\frac{\gamma^2-|x|^2}{|x|\,|\gamma-|x||}y+\frac{n-1}{4}\pi\right)\right\}\right]$$
$$\left[\left(\frac{n-1}{2}-\alpha\right)\left(\frac{\gamma+|x|}{|\gamma-|x||}y\right)^{(n-2\alpha-3)/2}a\left(\frac{\gamma+|x|}{|x|\,|\gamma-|x||}y\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{|x|}\left(\frac{\gamma+|x|}{|\gamma-|x||}y\right)^{(n-2\alpha-1)/2}a'\left(\frac{\gamma+|x|}{|x|\,|\gamma-|x||}y\right)\right]dy$$

с $\varphi(t)=O(t^{-2})$ и $\Psi(t)=O(t^{-3})$ при $t\to\infty$.

**Доказательство** : Для построения аналитического продолжения интеграла $\Omega_{\alpha,\gamma}(|x|)$ (при $|x|\neq\gamma$) перепишем его в виде

$$\Omega_{\alpha,\gamma}(|x|)=\frac{(2\pi)^{-n/2}}{|x|^{n-\alpha}}\left\{\int_0^{\frac{\gamma+|x|}{|\gamma-|x||}}+\int_{\frac{\gamma+|x|}{|\gamma-|x||}}^\infty\right\}t^{n/2-\alpha}\times \tag{15}$$
$$\times\exp\left(i\gamma t/|x|\right)a(t/|x|)\,J_{\frac{n-2}{2}}(t)\,dt\equiv\Omega^1_{\alpha,\gamma}(|x|)+I_{\alpha,\gamma}(|x|).$$

Из (12) и Леммы 1 следует, что для $\frac{n-1}{2}<\mathrm{Re}\,\alpha<n$ интегралы $\Omega^1_{\alpha,\gamma}(|x|)$ и $\Omega^2_{\alpha,\gamma}(|x|)$ абсолютно сходятся и аналитичны (по $\alpha$) в полосе $\frac{n-1}{2}<\mathrm{Re}\,\alpha<n$. Далее, из (10) для $I_{\alpha,\gamma}(|x|)$ имеем

$$I_{\alpha,\gamma}(|x|)=\Omega^2_{\alpha,\gamma}(|x|)+\omega_{\alpha,\gamma}(|x|), \tag{16}$$

где

$$\omega_{\alpha,\gamma}(|x|)=\frac{2^{-(n-1)/2}\pi^{-(n+1)/2}}{|x|^{n-\alpha}}\times$$
$$\times\int_{\frac{\gamma+|x|}{|\gamma-|x||}}^\infty t^{(n-1)/2-\alpha}\exp\left(i\gamma t/|x|\right)a(t/|x|)\cos\left(t-\frac{n-1}{4}\pi\right)dt,$$

Интегрируя по частям и делая замену переменной $t\,\frac{|\gamma-|x||}{\gamma+|x|}=y$ для $\omega_{\alpha,\gamma}(|x|)$ получаем

$$\omega_{\alpha,\gamma}(|x|)=\Omega^3_{\alpha,\gamma}(|x|)+\Omega^4_{\alpha,\gamma}(|x|). \tag{17}$$

Поскольку $a(t)\in A^1(\mathbb{R}^1_-)$, то интеграл $\Omega^4_{\alpha,\gamma}(|x|)$ абсолютно сходится для $\frac{n-1}{2}<\mathrm{Re}\,\alpha<n$, и следовательно, по Лемме 1 является аналитической (по $\alpha$) в этой области. Аналитичность неинтегрального члена $\Omega^3_{\alpha,\gamma}(|x|)$ для $\frac{n-1}{2}<\mathrm{Re}\,\alpha<n$ очевидна. Таким образом, из (15) — (17) для функции $\Omega_{\alpha,\gamma}(|x|)$ определенной по (4), следует аналитическое продолжение в полосу $\frac{n-1}{2}<\mathrm{Re}\,\alpha<n$ ($|x|\neq\gamma$), имеющее вид (14). Теорема 3 доказана.

**2. Свойства ядра $\Omega_{\alpha,\gamma}(|x|)$.** Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

**Лемма 3.** **Пусть** $m = 1, 2, ..., [n/2] + 1$, $\max(n-1)/2, n-m < \mathrm{Re}\,\alpha < n$, $a(t) \in \Lambda^m(\mathbb{R}^1_+)$. **Тогда при** $|x| < \gamma/2$ **функция** $\Omega_{\alpha,\gamma}(|x|)$ **представима в виде**

$$\Omega_{\alpha,\gamma}(|x|) = \frac{2^{1-n}\pi^{-n/2}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma(1/2)} \int_{-1}^{1} (1-\eta^2)^{(n-3)/2}$$

$$\left[\int_0^1 t^{n-\alpha-1} a(t)\, e^{it(\gamma+|x|\,\eta)}\, dt + e^{i(\gamma+|x|\,\eta)} \sum_{k=1}^{m} \frac{i^k}{(\gamma+|x|\,\eta)^k}\, g_{k-1}(\alpha,1) + \right. \tag{18}$$

$$\left. \frac{i^m}{(\gamma+|x|\,\eta)^m} \int_1^\infty g_m(\alpha,t)\, e^{it(\gamma+|x|\,\eta)}\, dt \right] d\eta,$$

где

$$g_k(\alpha,t) = \frac{d^k}{dt^k}\left[t^{n-\alpha-1}\, a(t)\right], \qquad k = 0, 1, .... \tag{19}$$

**Доказательство** : Докажем вначале (18) для $\frac{n-1}{2} < \mathrm{Re}\,\alpha < n$. Из (11) и абсолютной сходимости интеграла (4) для $\frac{n-1}{2} < \mathrm{Re}\,\alpha < n$ имеем

$$\Omega_{\alpha,\gamma}(|x|) = \frac{2^{1-n}\pi^{-n/2}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma(1/2)} \times$$

$$\times \int_0^\infty t^{n-\alpha-1} a(t)\, e^{it\gamma}\, dt \int_{-1}^{1} (1-\eta^2)^{(n-3)/2} e^{it|x|\eta}\, d\eta = \tag{20}$$

$$= \frac{2^{1-n}\pi^{-n/2}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma(1/2)} \lim_{N\to\infty} \Omega^N_{\alpha,\gamma}(|x|),$$

где

$$\Omega^N_{\alpha,\gamma}(|x|) = \int_{-1}^{1} (1-\eta^2)^{(n-3)/2}\, d\eta \int_0^N t^{n-\alpha-1} a(t)\, e^{it(\gamma+|x|\,\eta)}\, dt.$$

Для интеграла

$$\omega^N_{\alpha,\gamma}(|x|,\eta) = \int_1^N t^{n-\alpha-1} a(t)\, e^{it(\gamma+|x|\,\eta)}\, dt$$

интегрирование по частям дает

$$\omega^N_{\alpha,\gamma}(|x|,\eta) = \frac{1}{i(\gamma+|x|\,\eta)} \left[ e^{it(\gamma+|x|\,\eta)}\, t^{n-\alpha-1} a(t)\Big|_1^N - \right.$$

$$\left. - \int_1^N \left[(n-\alpha-1)\, t^{n-\alpha-2} a(t) + t^{n-\alpha-1} a'(t)\right] e^{it(\gamma+|x|\,\eta)}\, dt \right].$$

Подставляя полученное выражение в (20) и переходя к пределу при $N \to \infty$, из теоремы Лебега о мажорантной сходимости получаем

$$\Omega_{\alpha,\gamma}(|x|) = \frac{2^{1-n}\pi^{-n/2}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma(1/2)} \int_{-1}^{1} (1-\eta^2)^{(n-3)/2} \left[\int_0^1 t^{n-\alpha-1} a(t)\, e^{it(\gamma+|x|\eta)}\, dt - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{i(\gamma+|x|\eta)} e^{i(\gamma+|x|\eta)} a(1)\, g_0(\alpha,1) - \frac{1}{i(\gamma+|x|\eta)} \int_1^\infty g_1(\alpha,t)\, e^{it(\gamma+|x|\eta)}\, dt\right] d\eta. \tag{21}$$

Интегрируя по частям $m-1$ раз и учитывая (19), получим (18). Таким образом, при $\frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$ равенство (18) доказано.

Заметим, что функции $(\gamma+|x|\eta)^{-k}\, e^{it(\gamma+|x|\eta)}$ непрерывны и ограничены ($|x| < \gamma/2$), функции $g_k(\alpha,t)$ аналитичны при $\alpha \in \mathbb{C}$ и $|g_m(\alpha,t)| \le c\, t^{n-\operatorname{Re}\alpha-m-1}$, где $c$ не зависит от $\alpha$, $|\operatorname{Re}\alpha| < M$, $|\operatorname{Im}\alpha| < M$, $M > 0$. Следовательно, согласно Лемме 1, выражение в правой части (18) является аналитической функцией в полосе $n-m < \operatorname{Re}\alpha < n$. Отсюда, в силу аналитичности функции $\Omega_{\alpha,\gamma}(|x|)$ ($|x| \ne \gamma$), при $\frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$ получаем равенство (18) для $\max\left(\frac{n-1}{2}, n-m\right) < \operatorname{Re}\alpha < n$. Лемма 3 доказана.

Докажем теперь основной результат этого пункта. В следующей теореме приведены оценки для функции $\Omega_{\alpha,\gamma}(|x|)$.

**Теорема 4.** **Для $a(t) \in \Lambda^1(\mathbb{R}^1_+)$ функция $\Omega_{\alpha,\gamma}(|x|)$ непрерывна в $\mathbb{R}^n \setminus \{O\}$, если $\frac{n+1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$ и в $\mathbb{R}^n \setminus \{\{O\} \bigcup \{x\colon |x| = \gamma\}\}$, если $\frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < \frac{n+1}{2}$. Справедливы следующие оценки :**

$$|\Omega_{\alpha,\gamma}(|x|)| \le c|x|^{\operatorname{Re}\alpha-n} \begin{cases} \left(\dfrac{|x|+\gamma}{||x|-\gamma|}\right)^{(n+1)/2-\operatorname{Re}\alpha} & \text{при } \dfrac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < \dfrac{n+1}{2} \\ 1+\ln\dfrac{|x|+\gamma}{||x|-\gamma|} & \text{при } \operatorname{Re}\alpha = \dfrac{n+1}{2} \\ 1, & \text{при } \dfrac{n+1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n, \end{cases} \tag{22}$$

**где константа $c$ может быть выбрана не зависящей от $\alpha$ в некоторой окрестности каждой точки $\alpha$. Для $a(t) \in \Lambda^m(\mathbb{R}^1_+)$ и $m > n - \operatorname{Re}\alpha$ функция $\Omega_{\alpha,\gamma}(|x|)$ непрерывна в нуле.**

**Доказательство :** Непрерывность следует из (4), (14) и (18). Для доказательства (22) вначале предположим, что $\frac{n+1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$. Из (4), (12) и (13) имеем

$$|\Omega_{\alpha,\gamma}(|x|)| \le c|x|^{\operatorname{Re}\alpha-n} \left\{\int_0^1 t^{n-\operatorname{Re}\alpha-1}\, dt + \int_1^\infty t^{(n-1)/2-\operatorname{Re}\alpha}\, dt\right\} \le c|x|^{\operatorname{Re}\alpha-n}.$$

Пусть теперь $\frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < \frac{n+1}{2}$. Из (12), (13) и (14) получаем

$$|\Omega^1_{\alpha,\gamma}(|x|)| \le c\,|x|^{\operatorname{Re}\alpha-n} \begin{cases} \left(\dfrac{|x|+\gamma}{||x|-\gamma|}\right)^{(n+1)/2-\operatorname{Re}\alpha} & \text{для } \dfrac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < \dfrac{n+1}{2} \\ 1+\ln\dfrac{|x|+\gamma}{||x|-\gamma|} & \text{для } \operatorname{Re}\alpha = \dfrac{n+1}{2}. \end{cases}$$

Легко показать, что $|\Omega^2_{\alpha,\gamma}(|x|)| \le c\,|x|^{\operatorname{Re}\alpha-n}$ и

$$|\Omega^3_{\alpha,\gamma}(|x|)| \le c\,|x|^{\operatorname{Re}\alpha-n}\left(\frac{|x|+\gamma}{|\gamma-|x||}\right)^{(n+1)/2-\operatorname{Re}\alpha} \tag{23}$$

Так как $a(t) \in \Lambda^1(\mathbb{R}^1_+)$, для $\Omega^4_{\alpha,\gamma}(|x|)$ получим ту же оценку как и в (23). Собирая приведенные выше оценки, получаем (22). Теорема 4 доказана.

**Замечание 1.** Оценки, приведенные в Теореме 4, являются точными, так как для $a(|\xi|) = 1$ имеют место следующие асимптотические соотношения (см. [15]) :

$$\Omega_{\alpha,\gamma}(|x|) \underset{|x|\to\gamma}{\sim} c \begin{cases} (\gamma-|x|)^{\alpha-(n+1)/2} & \text{для } \frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha \le \frac{n+1}{2},\ \alpha \ne \frac{n+1}{2}, \\ \ln(|\gamma-|x||) & \text{для } \alpha = \dfrac{n+1}{2}, \end{cases}$$

$$\Omega_{\alpha,\gamma}(|x|) \underset{|x|\to\infty}{\sim} c|x|^{\alpha-n}, \qquad \frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha \le n.$$

Можно показать, что эти асимптотические соотношения справедливы и для функций $a(|\xi|)$ таких, что $a(t)$ принадлежит классу $C^{m,\gamma}(\mathbb{R}^1_+)$ гельдеровских функций, стабилизирующихся на бесконечности степенным образом (см. [16]) и $a(\infty) \ne 0$.

**3. Символ $m_{\alpha,\gamma}(|\xi|)$.** В этом пункте мы покажем, что оператор свертки с ядром $\Omega_{\alpha,\gamma}(|x|)$ действительно имеет своим символом функцию $m_{\alpha,\gamma}(|x|)$. Докажем вначале формулу для преобразования Фурье потенциала $A^{\alpha}_{a,\gamma}\varphi$.

**Лемма 4.** Пусть $\frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$, $a(t) \in \Lambda^1(\mathbb{R}^1_+)$, $\varphi \in \Phi_0$. Тогда справедливо равенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Omega_{\alpha,\gamma}(|y|)\,\varphi(x-y)\,dy = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} m_{\alpha,\gamma}(|\xi|)\,\widehat{\varphi}(\xi)\,e^{-ix\xi}\,d\xi. \tag{24}$$

**Доказательство :** Докажем вначале равенство (24) для $\frac{n+1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$. Имеем

$$\int_{\mathbb{R}^n} m_{\alpha,\gamma}(|\xi|)\,\widehat{\varphi}(\xi)\,e^{-ix\xi}\,d\xi = \lim_{N\to\infty}\int_{|\xi|<N} m_{\alpha,\gamma}(|\xi|)\,e^{-ix\xi}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)\,e^{i\xi y}\,dy\right]d\xi =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)\left[\int_{|\xi|<N} m_{\alpha,\gamma}(|\xi|)\,e^{-i\xi(x-y)}\,d\xi\right]dy.$$

Переходя во внутреннем интеграле к сферическим координатам и применяя формулу Бохнера (см. [14], стр. 358), получаем

$$\int_{\mathbb{R}^n} m_{\alpha,\gamma}(|\xi|)\,\widehat{\varphi}(\xi)\,e^{-ix\xi}\,d\xi = \tag{25}$$
$$= \lim_{N\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\varphi(y)}{|x-y|^{(n-2)/2}}\,dy\int_0^N t^{n/2-\alpha}\,e^{i\gamma t}\,a(t)J_{(n-2)/2}(|x-y|\,t)\,dt.$$

Из (12) и (13) следует

$$|x|^{-(n-2)/2}\left|\int_0^N t^{n/2-\alpha}\,e^{i\gamma t}\,a(t)J_{(n-2)/2}(|x|\,t)\,dt\right| \le c|x|^{\operatorname{Re}\alpha-n}.$$

Так как по теореме Лебега о мажорантной сходимости можно перейти к пределу под знаком интеграла в (25), то получаем (24) для $\frac{n+1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$. Для доказательства (24) при $\frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$ достаточно показать аналитичность по $\alpha$ обеих частей равенства (24) в полосе $\frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$. Аналитичность правой части (24) следует из Леммы 1. Аналитичность левой части (24) следует из Леммы 1 и оценки (22). Лемма 4 доказана.

**Замечание 2.** Вычисляя предел в (24) при $\gamma \to 0$, по теореме Лебега о мажорантной сходимости, получаем

$$\lim_{\gamma\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\Omega_{\alpha,\gamma}(|y|)\,\varphi(x-y)\,dy = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{a(|\xi|)}{|\xi|^\alpha}\,\widehat{\varphi}(\xi)\,e^{-ix\xi}\,d\xi,\qquad \varphi\in\Phi_0.$$

Нетрудно показать, что класс операторов с символами $\frac{a(|\xi|)}{|\xi|^\alpha}$, $a(t) \in \Lambda^\infty(\mathbb{R}^1_+)$ на функциях $\varphi \in \Phi_0$ совпадает с классом операторов типа потенциала (1) с радиальными характеристиками $\theta(x) = \theta(|x|)$, $\theta(t) \in \Lambda^\infty(\mathbb{R}^1_+)$. Поэтому, класс операторов (1) с радиальными характеристиками $\theta(x) = \theta(|x|)$ является предельным при $\gamma \to 0$ в классе операторов $\{A^\alpha_{a,\gamma}\}_{\gamma\geq 0}$.

Следующее утверждение вытекает непосредственно из Леммы 2.

**Лемма 5.** Пусть $a(t) \in \Lambda^m(\mathbb{R}^1_+)$, $m > [n/2]$ и $\varphi \in \Phi_0$. Тогда $m_{\alpha,\gamma}(|\xi|)\,\widehat{\varphi}(\xi) \in \mathcal{R}_0 \bigcap L_1$.

Из Лемм 4 и 5 следует

**Теорема 5.** Пусть $\frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$, $a(t) \in \Lambda^m(\mathbb{R}^1_+)$ и $m > [n/2]$. Тогда для $\varphi \in \Phi_0$ справедливо равенство (5).

**4. Действие операторов $A^\alpha_{a,\gamma}$ в $L_p$.** Следующая теорема легко доказывается на основе оценок (22).

**Теорема 6.** **Пусть** $\frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$, $1 \le p < \frac{n}{\operatorname{Re}\alpha}$ **и** $a(t) \in \Lambda^1(\mathbb{R}^1_+)$. **Тогда для** $\varphi \in \mathbf{L}_p$ **интеграл (3) абсолютно сходится и оператор** $A^\alpha_{a,\gamma}$ **отображает**

$$\mathbf{L}_p \to \mathbf{L}_p + \mathbf{L}_s \quad \text{для} \quad \frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < \frac{n+1}{2}, 1 < p < \frac{n}{\operatorname{Re}\alpha}, \quad s \geq \frac{np}{n - p\operatorname{Re}\alpha},$$

$$\mathbf{L}_p \to \mathbf{L}_s \quad \text{для} \quad \frac{n+1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n, 1 < p < \frac{n}{\operatorname{Re}\alpha}, \quad s = \frac{np}{n - p\operatorname{Re}\alpha},$$

$$\mathbf{L}_1 \to \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_s \quad \text{для} \quad \frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n, \quad s > \frac{n}{n - \operatorname{Re}\alpha}.$$

**Если** $a(t) \in \Lambda^m(\mathbb{R}^1_+)$ **и** $m > n - \operatorname{Re}\alpha$, **то** $s \geq \frac{np}{n - p\operatorname{Re}\alpha}$, $p \neq 1$.

## §4. ОБРАЩЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ $A^\alpha_{a,\gamma}$ В ПРОСТРАНСТВАХ $\mathbf{L}_p$

**1. Эллиптический и квазиэллиптический случаи.** Эллиптический случай характеризуется условием $\inf\limits_{t>0} |a(t)| \neq 0$, а квазиэллиптический – $a(t) \neq 0$, $t > 0$ и один или оба предела $\lim\limits_{t\to 0} a(t)$, $\lim\limits_{t\to\infty} a(t)$ равны нулю. В этом пункте строится обращение операторов $A^\alpha_{a,\gamma}$ в пространствах $\mathbf{L}_p$ в предположении, что $a(t)$ удовлетворяет следующим условиям :

$$0 \neq a(t) \in \Lambda^m(\mathbb{R}^1_+), m > [n/2], \quad |a(t)|^{-1} \exp\left\{-\eta t - \frac{\theta}{t}\right\} \leq c, \quad \eta, \theta \geq 0. \tag{26}$$

Примером функции, удовлетворяющей условиям (26) является функция $a(t) = \exp\{-t - t^{-1}\}$. Следующие две леммы легко следуют из Леммы 2.

**Лемма 6.** **Если** $a(t)$ **удовлетворяет условиям (26), то функция** $b^\delta_{\alpha,\varepsilon}(|x|)$ **из (7) принадлежит** $\mathbf{L}_1$.

Обозначим

$$K_\varepsilon(|\xi|) = \exp\left\{-\varepsilon\, |\xi|^{-2n}\right\} - 1, \quad K(|\xi|) = K_1(|\xi|),$$
$$k(|x|) = (F^{-1}K)(|x|), \quad k_\varepsilon(|\xi|) = \sqrt{\varepsilon}\, k(|\varepsilon^{1/(2n)}x|). \tag{27}$$

**Лемма 7.** **Функция** $k(|x|)$ **принадлежит** $\mathbf{L}_1$ **и**

$$\widehat{k}_\varepsilon(|\xi|) = K_\varepsilon(|\xi|), \qquad \|k_\varepsilon\|_1 = \|k\|_1, \qquad \|k_\varepsilon\|_\infty \leq c\sqrt{\varepsilon}. \tag{28}$$

Для доказательства формулы обращения нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

**Лемма 8.** **Пусть** $\frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$, $\varphi \in \mathbf{L}_p$ **и** $1 \leq p < \frac{n}{\operatorname{Re}\alpha}$. **Если** $a(t)$ **удовлетворяет условию (26), то**

$$B^\alpha_{a,\gamma,\varepsilon} A^\alpha_{a,\gamma}\varphi(x) = \delta\, W_\varepsilon\, Q_\varepsilon \varphi(x) + W_\varepsilon \varphi(x), \tag{29}$$

**где** $\delta = 0$ **в эллиптическом случае, 1 – в квазиэллиптическом, и** $Q_\varepsilon$ **— оператор с символом** $K_\varepsilon(|\xi|)$.

**Доказательство :** Для $\varphi \in \Phi_0$ равенство (29) проверяется переходом к образам Фурье. Операторы в (29) ограничены и действуют из $\mathbf{L}_p$ в $\mathbf{L}_p + \mathbf{L}_q$, $q > \dfrac{np}{n - p\,\mathrm{Re}\,\alpha}$. Поскольку класс $\Phi_0$ плотен в $\mathbf{L}_p$ для $p > 1$ (см. [3], §3), то (29) имеет место для $\varphi \in \mathbf{L}_p$, $p > 1$. Для $\varphi \in \mathbf{L}_1$ равенство (29) доказывается вначале в смысле $\Phi_0'$-распределений, а далее так как две локально суммируемые функции из $S'$ совпадающие в смысле $\Phi_0'$ могут отличаться лишь многочленом, то отсюда следует справедливость (29) для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$. Лемма 8 доказана.

**Доказательство Теоремы 1 :** В эллиптическом случае $\delta = 0$ и утверждение теоремы следует из (29). Для доказательства утверждения Теоремы 1 в квазиэллиптическом случае ($\delta = 1$), заметим, что $|Q_\varepsilon \varphi(x)| \le \|k_\varepsilon\|_{p'} \|\varphi\|_p \to 0$, $\varepsilon \to 0$, $1 \le p < \infty$ следует из интерполяционного неравенства

$$\|k_\varepsilon\|_q \le c\,\varepsilon^{(1-s)/2} \|k\|_1^s \|k\|_\infty^{1-s}, \qquad 1 < q \le \infty, \qquad s = \frac{1}{q}.$$

Следовательно, для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$W_\varepsilon Q_\varepsilon \varphi(x) \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \quad \varphi \in \mathbf{L}_p, \quad 1 \le p < \frac{n}{\mathrm{Re}\,\alpha}. \tag{30}$$

Теперь докажем, что

$$W_\varepsilon Q_\varepsilon \varphi \overset{(\mathbf{L}_p)}{\to} 0, \quad \varepsilon \to 0, \quad \varphi \in \mathbf{L}_p, \quad 1 < p < \frac{n}{\mathrm{Re}\,\alpha}. \tag{31}$$

Для $\varphi \in S$ используя равенство Парсеваля и интерполяционное неравенство, при $\varepsilon \to 0$ получаем

$$\|Q_\varepsilon \varphi\|_p \le \|Q_\varepsilon \varphi\|_q^{1-s} \|Q_\varepsilon \varphi\|_2^s \le c\,\|\varphi\|_q^{1-s}\, \|K_\varepsilon(|\xi|)\,\widehat{\varphi}\|_2^s \to 0, \tag{32}$$

где $q$ таково, что $2 < p < q$ и $\dfrac{1}{p} = \dfrac{s}{2} + \dfrac{1-s}{q}$, $1 < p < \infty$. Так как

$$\|Q_\varepsilon \varphi\|_p \le c\,\|k_\varepsilon\|_1\, \|\varphi\|_p = c\,\|\varphi\|_p, \varphi \in \mathbf{L}_p,$$

из (32) получаем $\|Q_\varepsilon \varphi\|_p \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ для $\varphi \in \mathbf{L}_p$ и $1 < p < \infty$. Откуда следует (31). Остается заметить, что $W_\varepsilon \varphi \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ как по норме $\mathbf{L}_p$ при $1 \le p < \infty$, так и почти всюду для $1 \le p \le \infty$. Теорема 1 доказана.

**2. Описание образа $A^\alpha_{a,\gamma}(\mathbf{L}_p)$ в эллиптическом и квазиэллиптическом случаях.** В этом пункте приведено описание образа $A^\alpha_{a,\gamma}(\mathbf{L}_p)$ в терминах обратного к $A^\alpha_{a,\gamma}$ оператора. Пусть $X$ – одно из пространств, в которое согласно Теореме 6 ограниченно действует оператор $A^\alpha_{a,\gamma}$.

**Теорема 7.** **Пусть** $\frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$ **и** $a(t)$ **удовлетворяет условию (26). Предположим, что** $1 \le p < \frac{n}{\operatorname{Re}\alpha}$ **в эллиптическом случае и** $1 < p < \frac{n}{\operatorname{Re}\alpha}$ **в квазиэллиптическом случае. Тогда**

$$A^{\alpha}_{a,\gamma}(\mathbf{L}_p) = \{f \in X : B^{\alpha}_{a,\gamma} f \in \mathbf{L}_p\},$$

**где** $B^{\alpha}_{a,\gamma}$ **— оператор, определенный по (6), а предел понимается в смысле нормы пространства** $\mathbf{L}_p$**.**

**Доказательство** : Вложение $A^{\alpha}_{a,\gamma}(\mathbf{L}_p) \subset \{f \in X : B^{\alpha}_{a,\gamma} f \in \mathbf{L}_p\}$ следует из Теорем 1 и 6. Для доказательства обратного вложения предположим, что $f \in X$ и $B^{\alpha}_{a,\gamma} f \in \mathbf{L}_p$. Для $\omega \in \Phi_0$ имеем

$$< A^{\alpha}_{a,\gamma} B^{\alpha}_{a,\gamma} f, \omega > = < B^{\alpha}_{a,\gamma} f, \overline{A^{\alpha}_{a,\gamma}} \omega > = < \overset{(\mathbf{L}_p)}{\lim_{\varepsilon \to 0}} B^{\alpha}_{a,\gamma,\varepsilon} f, \overline{A^{\alpha}_{a,\gamma}} \omega > =$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} < f, \overline{B^{\alpha}_{a,\gamma,\varepsilon}}\, \overline{A^{\alpha}_{a,\gamma}} \omega > = < f, \omega >,$$

где $\overline{A^{\alpha}_{a,\gamma}}$ и $\overline{B^{\alpha}_{a,\gamma,\varepsilon}}$ суть операторы с символами $\overline{m_{a,\gamma}(|\xi|)}$, $\overline{B^{\delta}_{a,\varepsilon}(|\xi|)}$ соответственно. Первое, третье и четвертое равенства в приведенной выше цепочке равенств обосновываются при помощи теоремы Фубини и очевидного соотношения

$$\overline{B^{\alpha}_{a,\gamma,\varepsilon}}\, \overline{A^{\alpha}_{a,\gamma}} \omega \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{(\mathbf{L}_q)} \omega, \qquad \omega \in \Phi_0, \quad 1 < q < \infty.$$

Наконец, из равенства $< A^{\alpha}_{a,\gamma} B^{\alpha}_{a,\gamma} f, \omega > = < f, \omega >$ получаем $f(x) = A^{\alpha}_{a,\gamma} \varphi(x)$, $\varphi = B^{\alpha}_{a,\gamma} f \in \mathbf{L}_p$. Теорема 7 доказана.

В эллиптическом случае $(\inf_{t>0} |a(t)| \neq 0)$ возникает естественный вопрос о взаимосвязи образов операторов $A^{\alpha}_{a,\gamma}$ и $A^{\alpha}_{1,\gamma}$, где символ оператора $A^{\alpha}_{1,\gamma}$ равен $e^{i\gamma|\xi|}\,|\xi|^{-\alpha}$.

**Теорема 8.** **Пусть** $a(t) \in \Lambda^m(\mathbb{R}^1_+)$, $m > [n/2]$ **и** $\inf_{t>0} |a(t)| \neq 0$. **Тогда** $A^{\alpha}_{a,\gamma}(\mathbf{L}_p) = A^{\alpha}_{1,\gamma}(\mathbf{L}_p)$, $1 < p < \frac{n}{\operatorname{Re}\alpha}$.

**Доказательство** : следует из включений $a(|x|), \frac{1}{a(|x|)} \in M^p_p$.

**3. Обращение операторов $A^{\alpha}_{a,\gamma}$ в неэллиптическом случае.** Строя обращения операторов $A^{\alpha}_{a,\gamma}$ мы используем идеи развитые в работе [16] при обращении операторов типа потенциала (1) в неэллиптическом случае.

Будем считать, что $a(t)$ удовлетворяет следующим условиям :

$$a(t) \in \Lambda^m(\mathbb{R}^1_+), \quad m > [n/2], \quad \operatorname{mes}\{t \in \mathbb{R}^1_+ : a(t) = 0\} = 0. \tag{33}$$

Из Леммы 2 следует

**Лемма 9.** Если $a(t)$ удовлетворяет (33), то функция $h^{\varepsilon,\delta}_{a,\gamma}(|x|)$ в (9) принадлежит пространству $\mathbf{L}_1$.

Для доказательства формулы обращения будем пользоваться следующей леммой, которая доказывается аналогично Лемме 8.

**Лемма 10.** Пусть $\dfrac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$, $1 \le p < \dfrac{n}{\operatorname{Re}\alpha}$, и $p \le 2$. Если $\operatorname{Re}\alpha < n/2$ и $a(t)$ удовлетворяет условию (33), то для $\varphi \in \mathbf{L}_p$ имеем

$$T^{\alpha}_{a,\gamma,\varepsilon,\delta}\, A^{\alpha}_{a,\gamma}\varphi(x) = W_\varepsilon\, \varphi(x) - i\,\delta\, M_{\varepsilon,\delta}\varphi(x), \tag{34}$$

где $T^{\alpha}_{a,\gamma,\varepsilon,\delta}$ определяется по (8) и $M_{\varepsilon,\delta}$ – оператор с символом

$$\omega_{\varepsilon,\delta}(|x|) = e^{-\varepsilon|\xi|^2}\,(|a(|\xi|)|^2 + i\,\delta)^{-1} \in M_2^2.$$

Теперь мы приступим к доказательству основного результата этой статьи.

**Доказательство Теоремы 2 :** С учетом (34) достаточно показать, что

$$\delta\, \|M_{\varepsilon,\delta}\,\varphi\|_2 \to 0, \qquad \delta \to 0. \tag{35}$$

Применяя равенство Парсеваля и теорему Лебега о мажорантной сходимости, получаем

$$\delta^2 \|M_{\varepsilon,\delta}\varphi\|_2^2 = \delta^2 \left\| \frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}|\xi|^2\right)\widehat{W_{\varepsilon/2}\varphi}(\xi)}{|a(|\xi|)|^2 + i\delta} \right\|_2^2 =$$

$$= \delta^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\left|\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}|\xi|^2\right)\widehat{W_{\varepsilon/2}\varphi}(\xi)\right|^2}{|a(|\xi|)|^4 + \delta^2}\, d\xi \to 0, \quad \delta \to 0.$$

Применение указанной теоремы обосновано тем, что

$$\delta^2 \frac{\left|\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}|\xi|^2\right)\widehat{W_{\varepsilon/2}\varphi}(\xi)\right|^2}{|a(|\xi|)|^4 + \delta^2} \le \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{4}|\xi|^4\right)\left|\widehat{W_{\varepsilon/2}\varphi}(\xi)\right|^2 \in \mathbf{L}_1 \quad \text{и}$$

$$\lim_{\delta\to 0} \delta^2 \frac{\left|\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}|\xi|^2\right)\widehat{W_{\varepsilon/2}\varphi}(\xi)\right|^2}{|a(|\xi|)|^4 + \delta^2} = 0$$

для $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{\xi \in \mathbb{R}^n : a(|\xi|) = 0\}$. Следовательно, формула (35) и поэтому и Теорема 2 доказаны.

**ABSTRACT.** The paper considers multiplicator operators $A^{\alpha}_{a,\gamma}$ with symbols $a(|\xi|)\,|\xi|^{-\alpha}\, e^{i\gamma|\xi|}$, $(n-1)/2 < \operatorname{Re}\alpha < n$, $\gamma > 0$ acting on functions $\varphi \in \mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n)$. For $1 \le p < n/\operatorname{Re}\alpha$ they are often realized in the form of potential-type operators with kernels having exponential or logarithmic singularities on the sphere. Inversions of these operators on functions from $\mathbf{L}_p$ are constructed in the elliptic ($\inf\limits_{t>0}|a(t)| > 0$), quasi-elliptic ($a(t) \ne 0$, $t > 0$) and general nonelliptic ($\operatorname{mes}\{t > 0 : a(t) = 0\} = 0$) cases. For the first two cases the images $A^{\alpha}_{a,\gamma}(\mathbf{L}_p)$ are described.

## ЛИТЕРАТУРА


1. С. Г. Самко, "О пространствах риссовых потенциалов", Изв. АН СССР, Сер. Матем., том. 40, № 5, стр. 1143 — 1172, 1976.
2. С. Г. Самко, "К описанию образа $I^{\alpha}(\mathbf{L}_p)$ дробных интегралов (потенциалов Рисса)", Изв. АН Арм.ССР, Сер. Матем., том. 12. № 5, стр. 329 — 334, 1977.
3. С. Г. Самко, Гиперсингулярные Интегралы и их Приложения, Изд-во Ростовского Университета, Ростов, 208 стр., 1984.
4. S. G. Samko, "Inversion theorems for potential type integral transforms in $\mathbb{R}^n$ and on $S^{n-1}$", Integral Transforms and special functions, vol. 1, no. 2, pp. 145 — 163, 1993.
5. В. А. Ногин, Е. В. Сухинин, "Обращение и описание гиперболических потенциалов с $\mathbf{L}_p$-плотностями", Докл. РАН (Россия), том 329, № 5, стр. 550 — 552, 1993.
6. В. А. Ногин, Е. В. Сухинин, "Дробные степени оператора Клейна–Гордона–Фокса в $\mathbf{L}_p$-пространствах", Докл. РАН (Россия), том 341, № 2, стр. 166 — 168, 1995.
7. В. А. Ногин, Е. В. Сухинин, "Дробные степени оператора Шредингера в $\mathbf{L}_p$-пространствах", Препринт, ВИНИТИ, № 1190–В94, 23 стр., 12 Мая 1994.
8. A. P. Chegolin, V. A. Nogin, "Complex powers of the telegraph operator in $L^p$-spaces", Тезисы докладов конференции "Краевые задачи, специальные функции и дробное исчисление", часть 1, стр. 118, Минск, 1996.
9. А. В. Абрамян, В. А. Ногин, "Комплексные степени гипоэллиптических операторов второго порядка с постоянными коэффициентами в $\mathbf{L}_p$ пространствах", Дифференциальные Уравнения, том 33, № 8, стр. 1134 — 1135, 1997.
10. В. А. Ногин, А. П. Чеголин, "Обращение некоторых интегральных операторов с вырождающимися и осциллирующими символами", Изв. Вузов, Сер. Математика, № 10, стр. 36 — 39, 1996.
11. И. С. Градштейн, И.М. Рыжик, Таблицы Интегралов, Сумм, Рядов и Произведений, 5-ое издание, Москва, Физматгиз, 1108 стр., 1971.
12. В. А. Ногин, С. Г. Самко, "О сходимости в $\mathbf{L}_p$ гиперсингулярных интегралов с однородной характеристикой", Препринт, ВИНИТИ, № 179-В81, 47 стр., 14 Января 1981.
13. J. Boman, "Saturation Problems and Distribution Theory", Lect. Notes Math., vol. 187, pp. 249 — 266, 1971.
14. С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, Интегралы и Производные Дробного Порядка и Некоторые их Приложения, Минск, Наука и Техника, 688 стр., 1987.
15. М. М. Заволженский, В. А. Ногин, "Об одном методе обращения операторов типа потенциала", Препринт, ВИНИТИ, № 978–В91, 82 стр., 6 Марта 1991.
16. М. М. Заволженский, В. А. Ногин, "О методе обращения операторов типа потенциала", Докл. РАН (Россия), том 324, № 4, 1992.
17. С. Г. Самко, С. М. Умархаджиев, "Приложения гиперсингулярных интегралов к многомерным интегральным уравнениям первого рода", Труды МИАН, том 172, стр. 299 — 312, 1985.


22 Апреля 1998 Ростовский государственный университет