# О СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО ПОЛНЫМ ОРТОНОРМИРОВАННЫМ СИСТЕМАМ В МЕТРИКЕ $L^p$, $p > 2$

**М. Г. Григорян**

**Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 1, 1999**

**Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – конечная ортонормальная система ограниченных функций на $[0,1]$, и пусть для некоторого $p_0 > 2$, $||\varphi_n||_{L^{p_0}} \leq const$ для каждого $n = 1, 2, \dots$. В статье доказывается, что существует перестановка $\{\sigma(k)\}$ натуральных чисел такая, что система $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ обладает следующим свойством : для каждого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $|E| > 1-\varepsilon$ такое, что для любого $p \in [2, p_0]$ и $f(x) \in L^p(E)$ существует $g(x) \in L^1([0,1])$, совпадающая с $f(x)$ на $E$, ряд Фурье которой по $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ сходится к $g(x)$ на $E$ в $L^p(E)$ и на $[0,1]$ в $L^1([0,1])$.**

## §1. ВВЕДЕНИЕ

В 1912 Н. Н. Лузин [1] доказал следующую теорему.

**Теорема (Лузин). Для любой измеримой, почти всюду конечной функции $f(x)$, определенной на $[0,1]$, и для любого $\varepsilon > 0$ существуют измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$ и непрерывная функция $g(x)$ такая, что $g(x)$ совпадает с $f(x)$ на $E$.**

Эта идея Лузина получила большое развитие в фундаментальных результатах, полученных Д. Е. Меньшовым в [2] и [3].

**Теорема I (Меньшов). Пусть $f(x)$ – измеримая и почти всюду конечная функция на $[0,2\pi]$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная функция $g(x)$ такая, что $g(x)$ совпадает с $f(x)$ на некотором множестве $E$ с $|E| > 2\pi - \varepsilon$ и ряд Фурье функции $g(x)$ по тригонометрической системе сходится равномерно на $[0,2\pi]$.**

**Теорема II (Меньшов). Пусть $f(x)$ – интегрируемая функция на $[0,2\pi]$ и $Q \subset [0,2\pi]$ – нигде не плотное множество. Тогда существует интегрируемая функция $g(x)$ такая, что $g(x) = f(x)$ на $Q$ и ее ряд Фурье**

**по тригонометрической системе сходится почти всюду.**

Дальнейшие результаты в этом направлении получены А. Талаляном [4], К. Осколковым [5], Ф. Арутюняном [6], Р. Осиповым [7], Б. Кашиным и Г. Кошелевой [8], Ш. Хеладзе [9], А. Гулисашвили [10], Л. Гоголадзе и Т. Зеркидзе [11].

В работе [14] получен следующий результат : **для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0, 2\pi]$ с мерой $|E| > 2\pi - \varepsilon$ такое, что для любой функции $f(x) \in L^1([0, 2\pi])$ существует функция $g(x) \in L^1([0, 2\pi])$, совпадающая с $f(x)$ на $E$ и ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится в метрике $L^1([0, 2\pi])$.**

Вопрос : выполняется ли этот результат для общих полных ортонормированных систем в пространстве $L^p$, $p \geq 1$? Отметим, что работы автора [12] – [14] содержат следующие результаты, справедливые для любой полной ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}$ ограниченных функций в $L^2([0, 1])$ :

1. Существует подпоследовательность $\{m_k\}$ натуральных чисел со следующими свойствами : a) для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$ такое, что для любой функции $f(x) \in L^1([0, 1])$ существует функция $g(x) \in L^1([0, 1])$, совпадающая с $f(x)$ на $E$ и ее ряд Фурье по системе $\{\varphi_n(x)\}$ сходится к $g(x)$ в метрике $L^1([0, 1])$ ; b) последовательность соответствующих коэффициентов Фурье $\{c_k(g)\}$ принадлежит $l_q$ для всех $q > 2$ и

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{m_k} c_n(g)\varphi_n(x) = g(x) \quad \text{почти всюду на} \quad [0, 1].$$

2. Для заданного $\varepsilon > 0$ и полной ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}$ ограниченных функций в $L^2([0, 1])$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$ такое, что для каждого $p \in [1, 2)$ и для любой функции $f(x) \in L^p([0, 1])$ существует функция $g(x) \in L^1([0, 1])$, совпадающая с $f(x)$ на $E$ и ее ряд Фурье по системе $\{\varphi_n(x)\}$ сходится к $g(x)$ в метрике $L^p(E)$ на $E$ и в метрике $L^1([0, 1])$ на $[0, 1]$.

3. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ равномерно ограничены. Тогда существует перестановка $\{\sigma(k)\}$ натуральных чисел такая, что система $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ обладает следующим свойством : для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$ такое, что для каждой непрерывной на $E$ функции $f(x)$ существует функция $g(x) \in L^1([0, 1])$, совпадающая с $f(x)$ на $E$ и ее ряд Фурье по системе

$\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ сходится равномерно на $E$.

К. Казарян [15] доказал, что Теорема I не верна для класса равномерно ограниченных полных ортонормированных систем. Б. Кашин [16] доказал, что Теорема II не верна для общих полных ортонормированных систем. А. Талалян [17] доказал, что для любой полной ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}$ существует перестановка $\{\sigma(k)\}$ натуральных чисел такая, что система $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ обладает следующим свойством : для любого $\varepsilon > 0$ и для любой $f(x) \in L^2([0,1])$ существует функция $g(x) \in L^2([0,1])$ и измеримое множество $E \subset [0,1]$ с $|E| > 1-\varepsilon$ такое, что $f(x) = g(x)$ на $E$ и ряд Фурье функции $g(x)$ по системе $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ сходится почти всюду.

Отметим, что как в Теореме I Меньшова, так и в результате Талаляна [17] множество $E$ зависит от функции $f(x)$, но в работах [12] - [14] и в настоящей статье множество $E$ не зависит от функции $f(x)$.

## §2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В настоящей статье доказываются следующие теоремы.

**Теорема 1.** **Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – полная ортонормированная система ограниченных функций в $L^2([0,1])$. Если для некоторого $p_0 > 2$**

$$||\varphi_n||_{L^{p_0}} \leq const, \quad n = 1, 2, ...,$$

**то существует перестановка $\{\sigma(k)\}$ натуральных чисел такая, что система $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ обладает следующим свойством : для каждого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $|E| > 1-\varepsilon$ такое, что для любого $p \in [2, p_0]$ и $f(x) \in L^p(E)$ существует функция $g(x) \in L^1([0,1])$, $g(x) = f(x)$ на $E$ такая, что на $E$ ряд Фурье функции $g(x)$ по системе $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ сходится к $g(x)$ в $L^p(E)$ и на $[0,1]$ в $L^1([0,1])$.**

Верен и двумерный аналог Теоремы 1.

**Теорема 2.** **Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – полная ортонормированная система ограниченных функций в $L^2([0,1])$ и для некоторого $p_0 > 2$, $||\varphi_n||_{L^{p_0}} \leq const$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда существует перестановка $\{\sigma(k)\}$ натуральных чисел такая, что система $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ обладает следующим свойством : для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]^2$ с мерой $|E| > 1-\varepsilon$ такое, что для каждого $p \in [2, p_0]$ и для любой $f(x,y) \in L^p([0,1]^2)$ существует функция $g(x,y) \in L^1([0,1]^2)$, $g(x,y) = f(x,y)$ на $E$ такая,**

**что двойной ряд Фурье функции $g(x,y)$ по системе $\{\varphi_{\sigma(k)}(x), \varphi_{\sigma(n)}(x)\}$ сходится к $g(x,y)$ на $E$ в $L^p(E)$ и на $[0,1]^2$ в $L^1([0,1]^2)$ как по сферам, так и по прямоугольникам.**

Олевский [17] установил, что существует непрерывная функция $f_0(x)$ такая, что для любой функции $f(x)$ с $\left|\{x \in [0,2\pi] : f(x) = f_0(x)\}\right| > 0$ последовательность тригонометрических коэффициентов Фурье не принадлежит $l_q$ при всех $q \in (0,2)$.

Ниже мы будем пользоватся неравенством Гарсия (см. [18], стр. 72)

$$\frac{1}{N!}\sum_{\sigma}\left[\max_{1\le n\le N}\left|\sum_{k=1}^{n}\chi_{\sigma(k)}\right|^p\right]^{1/p} \le A_p\left[\left|\sum_{k=1}^{N}\chi_k\right| + \left(\sum_{k=1}^{N}\chi_k^2\right)^{1/2}\right], \quad p\ge 1, \tag{2.1}$$

где первое суммирование распространяется по всем возможным перестановкам $\sigma$ натуральных чисел $1,...,N$, $\chi_k$ – произвольные действительные числа, $A_p > 1$ зависят только от $p$.

## §3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ЛЕММ

**Лемма 1. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – полная ортонормированная система ограниченных функций в $L^2([0,1])$ и для некоторого $p_0 > 2$**

$$||\varphi_n||_{L^{p_0}} \le B_{p_0} = const, \quad n = 1,2,... \tag{3.1}$$

**Тогда для любых $\varepsilon_0 > 0$, $N_0 > 1$ и $f(x) \in L^2([0,1])$ существуют измеримое множество $E \subset [0,1]$, функция $g(x) \in L^1([0,1])$, полином $Q(x) = \sum_{k=N_0}^{N} a_k\varphi_k(x)$ и перестановка $\{\sigma(k)\}$ натуральных чисел $N_0,...,N$, удовлетворящие**

1. $|E| > 1 - \varepsilon_0$,
2. $g(x) = f(x)$ для $x \in E$,
3. $\int_0^1 |g(x)|\,dx \le 3\int_0^1 |f(x)|\,dx$,
4. $\int_0^1 |Q(x) - g(x)|\,dx < \varepsilon_0$,
5. $\max_{N_0\le n<N}\int_0^1\left|\sum_{k=N_0}^{n} a_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\right|dx \le 3\int_0^1 |f(x)|\,dx$,
6. $\max_{N_0\le n<N}\left(\int_E\left|\sum_{k=N_0}^{n} a_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\right|^p dx\right)^{1/p} \le 2\left(\int_E |f(x)|^p dx\right)^{1/p} + \varepsilon_0,\ p \in [2,p_0]$.

**Доказательство :** Рассмотрим ступенчатую функцию

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0}\gamma_\nu\chi_{\Delta_\nu}(x), \tag{3.2}$$

где $\chi$ – индикаторная функция, $\Delta_\nu$ – интервалы постоянства такие, что

$$32A_{p_0}B_{p_0}|\gamma_\nu|\cdot|\Delta_\nu|^{1/p_0} < \frac{\varepsilon_0^2}{2}, \tag{3.3}$$

$$\left(\int_0^1 |f(x)-\varphi(x)|^{p_0}dx\right)^{1/p_0} < \varepsilon = \min\left\{\frac{\varepsilon_0}{4\nu_0}; \frac{1}{4A_{p_0}}\int_0^1 |f(x)|\,dx\right\}, \tag{3.4}$$

где $A_{p_0}$ – постоянная из неравенства Гарсия (2.1). Положим

$$I_\nu(x) = \begin{cases} -\frac{2-\varepsilon_0}{\varepsilon_0}\gamma_\nu & \text{для} \quad x\in[0,\varepsilon_0/2], \\ \gamma_\nu & \text{для} \quad x\in[\varepsilon_0/2,1], \\ I_\nu(x\pm k) & \text{для} \quad x\pm k\in[0,1], \quad k=1,2,\ldots \end{cases} \tag{3.5}$$

Легко видеть, что существует натуральное число $s_1 > 2\nu_0$ такое, что

$$\left|\int_0^1 I_1(2^{s_1}x)\chi_{\Delta_1}(x)\varphi_n(x)\,dx\right| \le \frac{\varepsilon}{16\sqrt{N_0}}, \quad n=1,\ldots,N_0. \tag{3.6}$$

Положим

$$g_1(x) = I_1(2^{s_1}x)\chi_{\Delta_1}(x), \quad E_1 = \{x\in[0,1] : g_1(x)=\gamma_1\}. \tag{3.7}$$

Из (3.3), (3.5) и (3.7) имеем $|E_1| > (1-\varepsilon_0)|\Delta_1|$, $g_1(x)=0$ вне $\Delta_1$,

$$\int_0^1 |g_1(x)|\,dx < 2|\gamma_1|\cdot|\Delta_1|, \tag{3.8}$$

$$\left(\int_0^1 g_1^2(x)\,dx\right)^{1/2} < \frac{2}{\varepsilon_0}\sqrt{\gamma_1^2|\Delta_1|} \le \frac{1}{8}\int_0^1 |f(x)|\,dx.$$

Так как система $\{\varphi_n(x)\}$ полна в $L^2([0,1])$, то существует достаточно большое натуральное число $N_1$ такое, что

$$\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{N_1} a_k^{(1)}\varphi_k(x) - g_1(x)\right| dx < \frac{\varepsilon}{4},$$

где

$$a_k^{(1)} = \int_0^1 \varphi_k(x)g_1(x)\,dx, \quad k=1,2,\ldots$$

Из (3.6) – (3.8) следует, что

$$\int_0^1 \left|\sum_{k=N_0}^{N_1} a_k^{(1)}\varphi_k(x) - g_1(x)\right| dx < \frac{\varepsilon}{4}\left[\sum_{k=1}^{N_0}|a_k^{(1)}|^2\right]^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.9}$$

Согласно (3.8) для всех $m\in[N_0,N_1]$

$$\int_0^1\left|\sum_{k=N_0}^{m} a_k^{(1)}\varphi_k(x)\right| dx \le \int_0^1\left|\sum_{k=1}^{m} a_k^{(1)}\varphi_k(x)\right| dx + \int_0^1\left|\sum_{k=1}^{N_0-1} a_k^{(1)}\varphi_k(x)\right| dx \le$$

$$\leq 2\left[\int_0^1 g_1^2(x)\,dx\right]^{1/2} < \frac{1}{4}\int_0^1 |f(x)|\,dx. \tag{3.10}$$

Теперь предположим, что числа $s_1 < \cdots < s_{\nu-1}$, $N_1 < \cdots < N_{\nu-1}$, функции $g_k(x)$, множества $E_k$ и полиномы $Q_k(x)$, $k = 1, ..., \nu - 1$ определены. Выберем натуральные числа $s_\nu$ и $N_\nu$ настолько большими, чтобы

$$\left|\int_0^1 I_\nu(2^{s_\nu}x)\chi_{\Delta_\nu}(x)\varphi_n(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{16^\nu\sqrt{N_{\nu-1}}}, \quad n = 1, ..., N_{\nu-1},$$

$$\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{N_\nu} a_k^{(\nu)}\varphi_k(x) - g_\nu(x)\right| dx < \frac{\varepsilon}{4},$$

где

$$a_k^{(\nu)} = \int_0^1 \varphi_k(x)g_\nu(x)\,dx, \quad g_\nu(x) = I_\nu(2^{s_\nu}x)\chi_{\Delta_\nu}(x). \tag{3.11}$$

Положим

$$E_\nu = \{x \in \Delta_\nu : \ g_\nu(x) = \gamma_\nu\}. \tag{3.12}$$

Рассуждая так же, как и при получении оценок (3.8) – (3.10), мы видим, что функция $g_\nu(x)$, множество $E_\nu$ и полином

$$Q_\nu(x) = \sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu - 1} a_k^{(\nu)}\varphi_k(x) \tag{3.13}$$

удовлетворяют следующим условиям :

$$|E_\nu| > (1-\varepsilon_0/2)|\Delta_\nu|, \; g_\nu(x) = \begin{cases}\gamma_\nu & \text{для } x \in E_\nu, \\ 0 & \text{для } x \notin \Delta_\nu,\end{cases} \int_0^1 |g_\nu(x)|\,dx < 2|\gamma_\nu|\cdot|\Delta_\nu|, \tag{3.14}$$

$$\int_0^1 |Q_\nu(x) - g_\nu(x)|\,dx < \varepsilon^2, \quad \int_0^1 \left|\sum_{k=N_{\nu-1}}^{m} a_k^{(\nu)}\varphi_k(x)\right| dx \leq \int_0^1 |f(x)|\,dx. \tag{3.15}$$

Положим

$$G_\nu = \{x \in [0,1] : |Q_\nu(x) - g_\nu(x)| < \varepsilon\}, \quad E = \left(\bigcup_{\nu=1}^{\nu_0} E_\nu\right) \cap \left(\bigcap_{\nu=1}^{\nu_0} G_\nu\right). \tag{3.16}$$

В силу (3.15) и (3.16) имеем

$$|G_\nu| > 1 - \varepsilon > 1 - \frac{\varepsilon_0}{4\nu_0}. \tag{3.17}$$

Из (3.12), (3.14) – (3.17) следует, что $|E| > 1 - \varepsilon_0$. В силу (3.3), (3.5) и (3.11) для $\nu \in [1, \nu_0]$ имеем

$$\left(\sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu - 1}\left|a_k^{(\nu)}\right|^2\right)^{1/2} \leq 2\left(\int_0^1 |g_\nu(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq 2\left(\int_0^1 |g_\nu(x)|^{p_0}\,dx\right)^{1/p_0} \leq 2\left(\frac{2}{\varepsilon_0}|\Delta_\nu|^{1/p_0}|\gamma_\nu|\right).$$

Последовательным применением неравенства Гарсия (2.1), для каждого числа $\nu \in [1, \nu_0]$ можно определить перестановку $\sigma_\nu(k)$, $k = N_{\nu-1}, ..., N_\nu - 1$ натуральных чисел $N_{\nu-1}, ..., N_\nu - 1$ такую, что

$$\int_E \left[\max_{N_{\nu-1} \le n < N_\nu} \left| \sum_{k=N_{\nu-1}}^{n} a^{(\nu)}_{\sigma_\nu(k)} \varphi_{\sigma_\nu(k)}(x) \right| \right]^{p_0} dx \le$$

$$\le (A_{p_0})^{p_0} \int_E \left[ \left| \sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu - 1} a_k^{(\nu)} \varphi_k(x) \right| + \left( \sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu - 1} [a_k^{(\nu)} \varphi_k(x)]^2 \right)^{1/2} \right]^{p_0} dx. \tag{3.18}$$

Из (3.3), (3.4), (3.12) и (3.18) – (3.17), для $\nu \in [1, \nu_0]$ получим

$$\max_{N_{\nu-1} \le n < N_\nu} \left( \int_E \left| \sum_{k=N_{\nu-1}}^{n} a^{(\nu)}_{\sigma_\nu(k)} \varphi_{\sigma_\nu(k)}(x) \right|^{p_0} dx \right)^{1/p_0} \le$$

$$\le A_{p_0} \left[ \left( \int_E |Q_\nu(x)|^{p_0} dx \right)^{1/p_0} + \left( \int_E \left( \sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu - 1} [a_k^{(\nu)} \varphi_k(x)]^2 \right)^{p_0/2} dx \right)^{1/p_0} \right] \le$$

$$\le A_{p_0} \left[ \left( \int_E |Q_\nu(x) - g_\nu(x)|^{p_0} dx \right)^{1/p_0} + \left( \int_E |g_\nu(x)|^{p_0} dx \right)^{1/p_0} \right] +$$

$$+ A_{p_0} \left[ \sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu - 1} \left( \int_0^1 [a_k^{(\nu)} \varphi_k(x)]^{p_0} \right)^{2/p_0} \right]^{1/2} \le$$

$$\le A_{p_0}\varepsilon + A_{p_0} \left[ |\Delta_\nu|^{1/p_0} |\gamma_\nu| + B_{p_0} \left( \sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu - 1} \left| a_k^{(\nu)} \right|^2 \right)^{1/2} \right] \le \tag{3.19}$$

$$\le A_{p_0}\varepsilon + \frac{4}{\varepsilon_0} A_{p_0} B_{p_0} |\Delta_\nu|^{1/p_0} |\gamma_\nu| < \varepsilon_0.$$

Теперь определим функцию $g(x)$, полином $Q(x)$ и перестановку $\{\sigma(k)\}$ натуральных чисел $N_0, ..., N$ :

$$g(x) = \psi(x) + [f(x) - \varphi(x)], \quad \text{где} \quad \psi(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} g_\nu(x); \tag{3.20}$$

$$Q = \sum_{k=N_0}^{N} a_k \varphi_k(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} Q_\nu(x), \tag{3.21}$$

где $N = N_{\nu_0}$, $a_k = a_k^{(\nu)}$ для $N_{\nu-1} \le k < N_\nu$, $1 \le \nu \le \nu_0$ ;

$$\sigma(k) = \sigma_\nu(k) \quad \text{для} \quad N_{\nu-1} \le k < N_\nu, \quad \nu = 1, ..., \nu_0. \tag{3.22}$$

Так как $\psi(x) = \varphi(x)$ на $E$ (см. (3.2), (3.14) и (3.16)), то из (3.20) следует, что $g(x) = f(x)$ на $E$. Учитывая (3.4), (3.14), (3.15), (3.20) и (3.21), получим

$$\int_0^1 |g(x)|\,dx \le 3\int_0^1 |f(x)|\,dx,$$

$$\int_0^1 |Q(x) - g(x)|\,dx \le \sum_{\nu=1}^{\nu_0}\int_0^1 |Q_\nu(x) - g_\nu(x)|\,dx + \int_0^1 |f(x) - \varphi(x)|\,dx < \varepsilon_0.$$

Пусть $N_0 \le n < N$. Тогда для некоторого $\overline{\nu}$ имеем $N_{\overline{\nu}-1} \le n < N_{\overline{\nu}}$, и из (3.13), (3.21) и (3.22) получаем

$$\sum_{k=N_0}^{n} a_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(x) = \sum_{\nu=1}^{\overline{\nu}-1} Q_\nu(x) + \sum_{k=N_{\overline{\nu}-1}}^{n} a^{(\overline{\nu})}_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(x). \tag{3.23}$$

Отсюда и из (3.2), (3.4), (3.14), (3.15) следует

$$\int_0^1 \left|\sum_{k=N_0}^{n} a_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\right| dx \le \sum_{\nu=1}^{\overline{\nu}-1}\int_0^1 |Q_\nu(x) - g_\nu(x)|\,dx + \sum_{\nu=1}^{\overline{\nu}-1}\int_0^1 |g_\nu(x)|\,dx +$$
$$+ \int_0^1 \left|\sum_{k=N_{\overline{\nu}-1}}^{n} a_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\right| dx <$$
$$< \frac{1}{4}\int_0^1 |f(x)|\,dx + 2\int_0^1 |\varphi(x)|\,dx + \frac{1}{4}\int_0^1 |f(x)|\,dx < 3\int_0^1 |f(x)|\,dx.$$

В силу (3.4), (3.14), (3.16), (3.19) и (3.23), для $p \in [2, p_0]$ получим

$$\left(\int_E \left|\sum_{k=N_0}^{n} a_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\right|^p dx\right)^{1/p} \le \sum_{\nu=1}^{\overline{\nu}-1}\left(\int_E |Q_\nu(x) - g_\nu(x)|^p dx\right)^{1/p} +$$
$$+ \left(\int_E \left[\sum_{\nu=1}^{\overline{\nu}-1} g_\nu(x)\right]^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_E \left|\sum_{k=N_{\overline{\nu}-1}}^{n} a_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\right|^p dx\right)^{1/p} \le \varepsilon +$$
$$+ \left(\int_E |\varphi(x)|^p dx\right)^{1/p} + \frac{\varepsilon_0}{2} \le 2\left(\int_E |f(x)|^p dx\right)^{1/p} + \varepsilon_0.$$

Лемма 1 доказана.

**Лемма 2. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – полная ортонормированная система ограниченных функций в $L^2([0,1])$, и для некоторого $p_0 > 2$ имеем $\|\varphi_n\|_{L^{p_0}} \le B_{p_0}$ для всех $n \ge 1$. Тогда для любых интервалов $\Delta_1, \Delta_2 \subset [0,1]$ и любых чисел $\gamma \ne 0$, $\varepsilon > 0$, $\overline{N}_0 > 1$ существуют измеримое множество $E \subset T \equiv [0,1]^2$, функция $g(x,y) \in L^1(T)$, полином**

$$Q(x,y) = \sum_{k,n=\overline{N}_0}^{N} a_{k,n}\varphi_k(x)\varphi_n(y)$$

и перестановка $\{\sigma(k)\}$ натуральных чисел $\overline{N}_0, ..., N$, удовлетворяющих следующим условиям :

1. $|E| > 1 - \varepsilon$,

2. $g(x,y) = \gamma\chi_\Delta(x,y)$ для $(x,y) \in E$,

3. $\iint\limits_T |g(x,y)|\, dxdy \le 9|\gamma|\cdot|\Delta|, \quad \Delta = \Delta_1 \times \Delta_2$,

4. $\iint\limits_T |Q(x,y) - g(x,y)|\, dxdy < \varepsilon$,

5. $$\max_{\overline{N}_0 \le \overline{k},\overline{n} \le N} \iint\limits_T \left| \sum_{k,n=\overline{N}_0}^{\overline{k},\overline{n}} a_{\sigma(k),\sigma(n)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y) \right| dxdy +$$
$$+ \sup_{\sqrt{2}\overline{N}_0 \le R \le \sqrt{2}N} \iint\limits_T \left| \sum_{2\overline{N}_0^2 \le k^2+n^2 \le R^2} a_{\sigma(k),\sigma(n)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y) \right| dxdy \le$$
$$\le 36|\gamma|\cdot|\Delta|,$$

6. $$\max_{\overline{N}_0 \le \overline{k},\overline{n} \le N} \left( \iint\limits_E \left| \sum_{k,n=\overline{N}_0}^{\overline{k},\overline{n}} a_{\sigma(k),\sigma(n)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y) \right|^p dxdy \right)^{1/p} +$$
$$+ \sup_{\sqrt{2}\overline{N}_0 \le R \le \sqrt{2}N} \left( \iint\limits_E \left| \sum_{2\overline{N}_0^2 \le k^2+n^2 \le R^2} a_{\sigma(k),\sigma(n)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y) \right|^p dxdy \right)^{1/p} \le$$
$$\le 16|\gamma|\cdot|\Delta|, \quad p \in [2, p_0].$$

**Доказательство :** Применим Лемму 1 для $N_0 = \overline{N}_0$, $f(x) = \gamma\chi_{\Delta_1}(x)$, $\varepsilon_0 = \dfrac{\varepsilon}{6|\Delta_2|}$ и определим измеримое множество $E_1 \subset \Delta_1$, функцию $g_1(x)$, полином $Q_1(x) = \sum\limits_{k=\overline{N}_0}^{N_1} a_k^{(1)}\varphi_k(x)$ и перестановку $\{\sigma(k)\}$ натуральных чисел $\overline{N}_0, ..., N_1$, удовлетворяющие следующим условиям :

$$|E_1| > 1 - \frac{\varepsilon}{2}, \quad g_1(x) = \gamma\chi_{\Delta_1}(x) \quad \text{на} E_1, \tag{3.24}$$

$$\int_0^1 |g_1(x)|\, dx \le 3|\gamma|\cdot|\Delta_1|, \quad \int_0^1 |Q_1(x) - g_1(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{6|\Delta_2|}, \tag{3.25}$$

$$\max_{\overline{N}_0 \le n \le N_1} \int_0^1 \left| \sum_{k=\overline{N}_0}^{n} a^{(1)}_{\sigma_1(k)}\varphi_{\sigma_1(k)}(x) \right| dx \le 3|\gamma|\cdot|\Delta_1|,$$

$$\max_{N_0 \le n \le N_1} \left( \int_{E_1} \left| \sum_{k=\overline{N}_0}^{n} a^{(1)}_{\sigma_1(k)}\varphi_{\sigma_1(k)}(x) \right|^p dx \right)^{1/p} \le 2|\gamma|\cdot|\Delta_1|^{1/p}, \quad p \in [2, p_0]. \tag{3.26}$$

Положим $M_0 = 2(N_1^2+1)$ и вновь применим Лемму 1, для $N_0 = M_0$, $f(y) = \chi_{\Delta_2}(y)$, $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{6(|\gamma|\cdot|\Delta_1|+1)}$. Так мы определим измеримое множество $E_2 \subset [0,1]$, функцию $g_2(y)$, полином $Q_2(y) = \sum\limits_{n=M_0}^{M} a_n^{(2)}\varphi_n(y)$ и перестановку $\{\sigma(k)\}$ натуральных чисел $M_0, ..., M$, удовлетворяющих условиям

$$|E_2| > 1 - \frac{\varepsilon}{2}, \quad g_2(y) = \chi_{\Delta_2}(y) \quad \text{на } E_2, \tag{3.27}$$

$$\int_0^1 |g_2(y)|\,dy \le 3|\Delta_2|, \quad \int_0^1 |Q_2(y) - g_2(y)|\,dy < \frac{\varepsilon}{6(|\gamma|\cdot|\Delta_1|+1)}, \tag{3.28}$$

$$\max_{M_0\le m\le M} \int_0^1 \left|\sum_{n=M_0}^{m} a_{\sigma_2(n)}^{(2)}\varphi_{\sigma_2(n)}(y)\right| dy \le 3|\Delta_2|,$$

$$\max_{M_0\le m\le M} \left(\int_{E_2} \left|\sum_{n=M_0}^{m} a_{\sigma_2(n)}^{(2)}\varphi_{\sigma_2(n)}(y)\right|^p dy\right)^{1/p} \le 2|\Delta_2|^{1/p}, \quad p\in[2,p_0]. \tag{3.29}$$

Для $(x,y)\in T$ положим

$$E = E_1\times E_2,\ g(x,y) = g_1(x)g_2(y),\ Q(x,y) = Q_1(x)Q_2(y) = \sum_{k,n=\overline{N}_0}^{M} a_{k,n}\varphi_k(x)\varphi_n(y), \tag{3.30}$$

где

$$a_{k,n} = \begin{cases} a_k^{(1)}a_n^{(2)} & \text{для } \overline{N}_0 \le k\le N_1,\ M_0\le n\le M, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

и

$$\sigma(m) = \begin{cases} \sigma_1(m) & \text{для } \overline{N}_0 \le m \le N_1, \\ m & \text{для } N_1\le m\le M_0, \\ \sigma_2(m) & \text{для } M_0\le m\le M. \end{cases} \tag{3.31}$$

Из (3.24), (3.25), (3.27), (3.28) и (3.30) следует, что условия 1.– 3. Леммы 2 выполнены. Так как

$$\iint_T |Q(x,y)-g(x,y)|\,dxdy \le \int_0^1 |Q_2(y)-g_2(y)|\,dy \int_0^1 |Q_1(x)|\,dx +$$
$$+ \int_0^1 |Q_1(x)-g_1(x)|\,dx \int_0^1 |g_2(y)|\,dy < \varepsilon,$$

то условие 4. Леммы 2 также выполнено.

Теперь проверим выполнение условий 5. и 6. Пусть $\overline{N}_0^2 + M_0^2 \le R^2 \le N_1^2 + M^2$. Тогда для некоторого $m_0 > M_0$ имеем $m_0 < R \le m_0+1$. Так как $M_0 = 2(N_1^2+1)$, то имеем $R^2 - N_1^2 > (m_0-1)^2$, и следовательно, для любого $p\in[2,p_0]$ из (3.23), (3.26), (3.29) - (3.31) получим

$$\left(\iint_E \left|\sum_{\overline{N}_0^2+M_0^2\le k^2+n^2\le R^2} a_{\sigma(k),\sigma(n)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y)\right|^p dxdy\right)^{1/p} \le$$

$$\leq \left( \iint_E \left| \sum_{k=\overline{N}_0}^{N_1} \sum_{n=M_0}^{m_0-1} a_{\sigma(k),\sigma(n)} \varphi_{\sigma(k)}(x) \varphi_{\sigma(n)}(y) \right|^p dxdy \right)^{1/p} +$$

$$+ \max_{N_0 < \overline{k} \leq N_1} \left( \iint_E \left| \sum_{k=\overline{N}_0}^{\overline{k}} a_{\sigma(k),\sigma(m_0)} \varphi_{\sigma(k)}(x) \varphi_{\sigma(m_0)}(y) \right|^p dxdy \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \left( \int_{E_1} \left| \sum_{k=\overline{N}_0}^{N_1} a^{(1)}_{\sigma_1(k)} \varphi_{\sigma_1(k)}(x) \right|^p dx \right)^{1/p} \left( \int_{E_2} \left| \sum_{n=M_0}^{m_0-1} a^{(2)}_{\sigma_2(n)} \varphi_{\sigma_2(n)}(y) \right|^p dy \right)^{1/p} +$$

$$+ |a^{(2)}_{\sigma_2(m_0)}| \left( \int_{E_2} |\varphi_{\sigma_2(m_0)}(y)|^p \, dy \right)^{1/p} \times$$

$$\times \max_{N_0 < \overline{k} \leq N_1} \left( \int_{E_1} \left| \sum_{k=N_0}^{\overline{k}} a^{(1)}_{\sigma_1(k)} \varphi_{\sigma_1(k)}(x) \right|^p dx \right)^{1/p} \leq 12|\gamma| \cdot |\Delta|^{1/p}.$$

Аналогично, при $\overline{N}_0 < \overline{k} \leq N_1$ и $M_0 < \overline{n} \leq M$ получим

$$\left( \iint_E \left| \sum_{k,n=\overline{N}_0}^{\overline{k},\overline{n}} a_{\sigma(k),\sigma(n)} \varphi_{\sigma(k)}(x) \varphi_{\sigma(n)}(y) \right|^p dxdy \right)^{1/p} \leq 4|\gamma| \cdot |\Delta|^{1/p}, \quad p \in [2, p_0],$$

$$\iint_T \left| \sum_{k,n=\overline{N}_0}^{\overline{k},\overline{n}} a_{\sigma(k),\sigma(n)} \varphi_{\sigma(k)}(x) \varphi_{\sigma(n)}(y) \right| dxdy \leq 9|\gamma| \cdot |\Delta|.$$

Аналогично доказывается, что для всех $R \in [\sqrt{2}\overline{N}_0, \sqrt{2}N]$, имеет место неравенство

$$\iint_T \left| \sum_{2\overline{N}_0^2 \leq k^2+n^2 \leq R^2} a_{\sigma(k),\sigma(n)} \varphi_{\sigma(k)}(x) \varphi_{\sigma(n)}(y) \right| dxdy \leq 27|\gamma| \cdot |\Delta|.$$

Лемма 2 доказана.

**Лемма 3. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – ортонормированная система ограниченных функций, полная в пространстве $L^2([0,1])$ и для некоторого $p_0 > 2$ и любого $n \geq 1$ имеем $||\varphi_n||_{L^{p_0}} \leq B_{p_0}$. Тогда для любой функции $f(x,y) \in L^{p_0}(T)$ и для любых чисел $\varepsilon > 0$, $N > 1$ существуют измеримое множество $E \subset T \equiv [0,1]^2$, функция $g(x,y) \in L(T)$, полином**

$$Q(x,y) = \sum_{k,n=N}^{M} a_{k,n} \varphi_k(x) \varphi_n(y)$$

и перестановка $\{\sigma(k)\}$ натуральных чисел $N, ..., M$, удовлетворяющих следующим условиям :

1. $|E| > 1 - \varepsilon$,
2. $g(x,y) = f(x,y)$ для $(x,y) \in E$,
3. $\iint\limits_T |g(x,y)|\, dxdy \le 10 \iint\limits_T |f(x,y)|\, dxdy$,
4. $\iint\limits_T |Q(x,y) - g(x,y)|\, dxdy < \varepsilon$,
5. $$\sup_{\sqrt{2}N \le R \le \sqrt{2}M} \left( \iint\limits_E \left| \sum_{2N^2 \le k^2+n^2 \le R^2} a_{\sigma(k),\sigma(n)} \varphi_{\sigma(k)}(x) \varphi_{\sigma(n)}(y) \right|^p dxdy \right)^{1/p} +$$
$$+ \max_{N \le \overline{k}, \overline{n} \le M} \left( \iint\limits_E \left| \sum_{k,n=N}^{\overline{k},\overline{n}} a_{\sigma(k),\sigma(n)} \varphi_{\sigma(k)}(x) \varphi_{\sigma(n)}(y) \right|^p dxdy \right)^{1/p} \le$$
$$\le 6 \left( \iint\limits_E |f(x,y)|^p dxdy \right)^{1/p} + \varepsilon,$$
6. $$\max_{N \le \overline{k}, \overline{n} \le M} \iint\limits_T \left| \sum_{k,n=N}^{\overline{k},\overline{n}} a_{\sigma(k),\sigma(n)} \varphi_{\sigma(k)}(x) \varphi_{\sigma(n)}(y) \right| dxdy +$$
$$+ \sup_{\sqrt{2}N \le R \le \sqrt{2}M} \iint\limits_T \left| \sum_{2N^2 \le k^2+n^2 \le R^2} a_{\sigma(k),\sigma(n)} \varphi_{\sigma(k)}(x) \varphi_{\sigma(n)}(y) \right| dxdy \le$$
$$\le 22 \iint\limits_T |f(x,y)|\, dxdy.$$

**Доказательство :** Рассмотрим ступенчатую функцию $\varphi(x,y) = \sum\limits_{\nu=1}^{\nu_0} \gamma_\nu \chi_{\Delta_\nu}(x,y)$, где $\Delta_\nu$ – прямоугольники постоянства такие, что

$$\left( \iint\limits_T |f(x,y) - \varphi(x,y)|^{p_0} dxdy \right)^{1/p_0} + \max_{1 \le \nu \le \nu_0} \left[ |\Delta_\nu|^{1/p_0} |\gamma_\nu| \right] < \varepsilon_0, \tag{3.32}$$

где

$$\varepsilon_0 = \min\left\{ \frac{\varepsilon}{4}; \frac{1}{40} \iint\limits_T |f(x,y)|\, dxdy \right\}. \tag{3.33}$$

Последовательным применением Леммы 2, для $\nu = 1, ... \nu_0$ определим измеримые множества $E_\nu$, функции $g_\nu(x,y)$, полиномы

$$Q_\nu(x,y) = \sum_{k,n=N_{\nu-1}}^{N_\nu - 1} a_{k,n}^{(\nu)} \varphi_k(x) \varphi_n(y)$$

и перестановки $\{\sigma_\nu(k)\}$ натуральных чисел $N_{\nu-1}, ..., N_\nu - 1$, удовлетворяющие условиям

$$|E_\nu| > 1 - \frac{\varepsilon}{\nu_0}, \quad g_\nu(x,y) = \gamma_\nu \chi_{\Delta_\nu}(x,y), \quad (x,y) \in E_\nu, \tag{3.34}$$

$$\iint_T |g_\nu(x,y)|\, dxdy \le 9|\gamma_\nu| \cdot |\Delta_\nu|, \quad \iint_T |Q_\nu(x,y) - g_\nu(x,y)|\, dxdy \le \left(\frac{\varepsilon_0}{\nu_0}\right)^2, \tag{3.35}$$

$$\sup_{\sqrt{2}N_{\nu-1} \le R \le \sqrt{2}N_\nu} \left(\iint_{E_\nu} \left| \sum_{2N_{\nu-1}^2 \le k^2+n^2 \le R^2} a^{(\nu)}_{\sigma_\nu(k),\sigma_\nu(n)} \varphi_{\sigma_\nu(k)}(x) \varphi_{\sigma_\nu(n)}(y) \right|^p dxdy \right)^{1/p} +$$

$$+ \max_{N_{\nu-1} \le \bar{k},\bar{n} \le N_\nu} \left(\iint_{E_\nu} \left| \sum_{k,n=N_{\nu-1}}^{\bar{k},\bar{n}} a^{(\nu)}_{\sigma_\nu(k),\sigma_\nu(n)} \varphi_{\sigma_\nu(k)}(x) \varphi_{\sigma_\nu(n)}(y) \right|^p dxdy \right)^{1/p} \le \tag{3.36}$$

$$\le 16|\gamma_\nu| \cdot |\Delta_\nu|^{1/p}, \quad p \in [2, p_0],$$

$$\max_{N_{\nu-1} \le \bar{k},\bar{n} \le N_\nu} \iint_T \left| \sum_{k,n=N_{\nu-1}}^{\bar{k},\bar{n}} a^{(\nu)}_{\sigma_\nu(k),\sigma_\nu(n)} \varphi_{\sigma_\nu(k)}(x) \varphi_{\sigma_\nu(n)}(y) \right| dxdy +$$

$$+ \sup_{\sqrt{2}N_{\nu-1} \le R \le \sqrt{2}N_\nu} \iint_T \left| \sum_{2N_{\nu-1}^2 \le k^2+n^2 \le R^2} a^{(\nu)}_{\sigma_\nu(k),\sigma_\nu(n)} \varphi_{\sigma_\nu(k)}(x) \varphi_{\sigma_\nu(n)}(y) \right| dxdy \le$$

$$\le 36|\gamma_\nu| \cdot |\Delta_\nu|. \tag{3.37}$$

Теперь мы можем определить множество $E$, функцию $g(x,y)$, полином $Q(x,y)$ и перестановку $\{\sigma(k)\}$ натуральных чисел $N_0, ..., N = N_{\nu_0}$ следующим образом :

$$E = \left(\bigcap_{\nu=1}^{\nu_0} E_\nu\right) \cap \left(\bigcap_{\nu=1}^{\nu_0} G_\nu\right), \quad \text{где} \quad G_\nu = \left\{(x,y) \in T : |Q_\nu(x,y) - g_\nu(x,y)| < \frac{\varepsilon_0}{\nu_0}\right\}; \tag{3.38}$$

$$g(x,y) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} g_\nu(x,y) + [f(x,y) - \varphi(x,y)]; \tag{3.39}$$

$$Q(x,y) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} Q_\nu(x,y) = \sum_{k,n=N_0}^{N} a_{k,n} \varphi_k(x) \varphi_n(y); \tag{3.40}$$

$$\sigma(k) = \sigma_\nu(k) \quad \text{для } N_{\nu-1} \le k < N_\nu, \quad \nu = 1, ..., \nu_0,$$

где

$$a_{k,n} = \begin{cases} a^{(\nu)}_{k,n} & \text{для} \quad N_{\nu-1} \le k,n < N_\nu,\ 1 \le \nu \le \nu_0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В силу (3.34), (3.35), (3.38) – (3.40), условия 1.– 4. Леммы 3 выполнены. Проверим теперь выполнение условий 5. и 6. Для всех $p \in [2, p_0]$ из (3.32) – (3.34) и (3.38) следует

$$\left(\iint_E \left|\sum_{\nu=1}^{\overline{\nu}-1} g_\nu(x,y)\right|^p dxdy\right)^{1/p} \le \left(\iint_E |\varphi(x,y)|^p dxdy\right)^{1/p} \le$$
$$\le 2\left(\iint_E |f(x,y)|^p dxdy\right)^{1/p}, \tag{3.41}$$

$$\iint_T \left|\sum_{\nu=1}^{\overline{\nu}-1} g_\nu(x,y)\right| dxdy \le 9\sum_{\nu=1}^{\nu_0} |\gamma_\nu|\cdot|\Delta_\nu| \le 10\iint_T |f(x,y)|\, dxdy.$$

Пусть $2N_0^2 \le R^2 \le 2N^2$. Тогда для некоторого $1 \le \overline{\nu} \le \nu_0$ имеем $\sqrt{2}N_{\overline{\nu}} < R \le \sqrt{2}N_{\overline{\nu}+1}$, и следовательно, для всех $p \in [2, p_0]$ из (3.40) имеем

$$\sum_{2N_0^2\le k^2+n^2\le R^2} a_{\sigma(k),\sigma(n)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} Q_\nu(x,y) +$$
$$+\sum_{2N_{\overline{\nu}}^2\le k^2+n^2\le R^2} a^{(\overline{\nu})}_{\sigma_{\overline{\nu}}(k),\sigma_{\overline{\nu}}(n)}\varphi_{\sigma_{\overline{\nu}}(k)}(x)\varphi_{\sigma_{\overline{\nu}}(n)}(y).$$

Для всех $p \in [2, p_0]$ из соотношений (3.32), (3.33), (3.36) - (3.38) и (3.41) следует

$$\left(\iint_E \left|\sum_{2N_0^2\le k^2+n^2\le R^2} a_{\sigma(k),\sigma(n)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y)\right|^p dxdy\right)^{1/p} \le$$
$$\le \left(\iint_T \left|\sum_{\nu=1}^{\overline{\nu}-1}[Q_\nu(x,y)-g_\nu(x,y)]\right|^p dxdy\right)^{1/p} +$$
$$+\left(\iint_E \left|\sum_{2N_{\overline{\nu}}^2\le k^2+n^2\le R^2} a^{(\overline{\nu})}_{\sigma(k),\sigma(n)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y)\right|^p dxdy\right)^{1/p} +$$
$$+\left(\iint_E \left|\sum_{\nu=1}^{\overline{\nu}-1} g_\nu(x,y)\right|^p dxdy\right)^{1/p} \le$$

$$\le \frac{\varepsilon_0}{16} + 16|\gamma_{\overline{\nu}}|\cdot|\Delta_{\overline{\nu}}|^{1/p} + 2\left(\iint_E |f(x,y)|^p dxdy\right)^{1/p} \le 3\left(\iint_E |f(x,y)|^p dxdy\right)^{1/p} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Аналогично

$$\iint_T \left|\sum_{2N_0^2\le k^2+n^2\le R^2} a_{\sigma(k),\sigma(n)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y)\right| dxdy \le 11\iint_T |f(x,y)|\, dxdy.$$

Аналогично доказывается, что для всех $N_0 \le \overline{k}, \overline{n} \le N$ и для всех $p \in [2, p_0]$ имеют место неравенства

$$\left(\iint\limits_E \left|\sum_{k,n=N_0}^{\overline{k},\overline{n}} a_{\sigma(k),\sigma(n)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y)\right|^p dxdy\right)^{1/p} \le 3\left(\iint\limits_E |f(x,y)|^p dxdy\right)^{1/p} + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\iint\limits_T \left|\sum_{k,n=N_0}^{\overline{k},\overline{n}} a_{\sigma(k),\sigma(n)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y)\right| dxdy \le 11 \iint\limits_T |f(x,y)|\, dxdy.$$

Лемма 3 доказана.

## §4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

**Доказательство Теоремы 2** : Пусть $F = \{f_\nu(x,y)\}$ - счетное плотное подмножество пространства $L^{p_0}(T)$, $p_0 > 2$. Последовательным применением Леммы 3, для любого $\nu = 1, 2, ...$ определим измеримые множества $\overline{E}_\nu$, функции $\overline{g}_\nu(x,y)$, полиномы

$$\overline{Q}_\nu(x,y) = \sum_{k,n=\overline{N}_{\nu-1}}^{\overline{N}_\nu - 1} a_{k,n}^{(\nu)}\varphi_k(x)\varphi_n(y)$$

и перестановки $\{\sigma_\nu(k)\}$ натуральных чисел $\overline{N}_{\nu-1}, ..., \overline{N}_\nu - 1$, удовлетворяющие

$$|\overline{E}_\nu| > 1 - 2^{-2\nu}, \quad \overline{g}_\nu(x,y) = f_\nu(x,y), \quad (x,y) \in \overline{E}_\nu, \tag{4.1}$$

$$\iint\limits_T |\overline{g}_\nu(x,y)|\, dxdy \le 10 \iint\limits_T |f_\nu(x,y)|\, dxdy, \quad \iint\limits_T \left|\overline{Q}_\nu(x,y) - \overline{g}_\nu(x,y)\right| dxdy < 2^{-4\nu}, \tag{4.2}$$

$$\left(\iint\limits_{\overline{E}_\nu} \left|\sum_{2\overline{N}_{\nu-1}^2 \le k^2+n^2 \le R^2} a_{\sigma_\nu(k),\sigma_\nu(n)}^{(\nu)}\varphi_{\sigma_\nu(k)}(x)\varphi_{\sigma_\nu(n)}(y)\right|^p dxdy\right)^{1/p} + \tag{4.3}$$

$$+\left(\iint\limits_{\overline{E}_\nu} \left|\sum_{k,n=\overline{N}_{\nu-1}}^{\overline{N}_\nu - 1} a_{\sigma_\nu(k),\sigma_\nu(n)}^{(\nu)}\varphi_{\sigma_\nu(k)}(x)\varphi_{\sigma_\nu(n)}(y)\right|^p dxdy\right)^{1/p} \le$$

$$\le 6\left(\iint\limits_{\overline{E}_\nu} |f_\nu(x,y)|^p dxdy\right)^{1/p} + 2^{-2\nu}, \quad p \in [2, p_0],$$

$$\iint\limits_T \left|\sum_{2\overline{N}_{\nu-1}^2 \le k^2+n^2 \le R^2} a_{\sigma_\nu(k),\sigma_\nu(n)}^{(\nu)}\varphi_{\sigma_\nu(k)}(x)\varphi_{\sigma_\nu(n)}(y)\right| dxdy +$$

$$+\iint\limits_T \left|\sum_{k,n=\overline{N}_{\nu-1}}^{\overline{k},\overline{n}} a_{\sigma_\nu(k),\sigma_\nu(n)}^{(\nu)}\varphi_{\sigma_\nu(k)}(x)\varphi_{\sigma_\nu(n)}(y)\right| dxdy \le 22 \iint\limits_T |f_\nu(x,y)|\, dxdy, \tag{4.4}$$

где $\sqrt{2N}_{\nu-1} \le R < \sqrt{2N}_\nu$ и $N_{\nu-1} \le \overline{k}, \overline{n} < N_\nu$. Положим $G_\nu = \left\{(x,y) \in T : \left|\overline{Q}_\nu(x,y) - \overline{g}_\nu(x,y)\right| < 2^{-2\nu}\right\}$. Из (4.2) имеем

$$|G_\nu| > 1 - 2^{-2\nu}. \tag{4.5}$$

Определим перестановку $\{\sigma(k)\}$ натуральных чисел следующим образом : $\sigma(k) = \sigma_\nu(k)$ для $\overline{N}_{\nu-1} \le k < \overline{N}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$. Для $\varepsilon > 0$ положим

$$E = \bigcap_{\nu=\nu_0}^{\infty} \left(\overline{E}_\nu \cap G_\nu\right), \quad \text{где} \quad \nu_0 > \log_{1/2} \varepsilon. \tag{4.6}$$

В силу (4.1) и (4.5) имеем $|E| > 1 - \varepsilon$.

Пусть $f(x,y) \in L^p(T)$ для некоторого $p \in [2, p_0]$. Можно выбрать подпоследовательность функций $\{f_{\nu_m}(x,y)\} \subset F$ такую, что

$$\lim_{M\to\infty} \iint_T \left|\sum_{m=1}^{M} f_{\nu_m}(x,y) - f(x,y)\right|^p dxdy = 0, \tag{4.7}$$

$$\left(\iint_T |f_{\nu_m}(x,y)|^p \, dxdy\right)^{1/p} < 2^{-8m}, \quad m \ge 2. \tag{4.8}$$

Предположим, что функции $g_s(x,y)$ и полиномы $Q_s(x,y) = \sum\limits_{k,n=N_s}^{M_s} b_{k,n}^{(s)} \varphi_k(x)\varphi_n(y)$ при $s = 1, \ldots, m-1$ удовлетворяют условиям

$$g_s(x,y) = f_{\nu_s}(x,y), \quad (x,y) \in E, \quad \iint_T |g_s(x,y)| \, dxdy \le 2^{-s+1}, \tag{4.9}$$

$$\iint_T \left|\sum_{j=1}^{s} [Q_j(x,y) - g_j(x,y)]\right| dxdy < 2^{-2s}, \tag{4.10}$$

$$\left(\iint_E \left|\sum_{j=1}^{s} [Q_j(x,y) - g_j(x,y)]\right|^p dxdy\right)^{1/p} \le 2^{-2s}, \tag{4.11}$$

$$\sup_{\sqrt{2}N_s \le R \le \sqrt{2}M_s} \left(\iint_E \left|\sum_{2N_s^2 \le k^2+n^2 \le R^2} b_{\sigma(k),\sigma(n)}^{(s)} \varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y)\right|^p dxdy\right)^{1/p} +$$

$$+ \max_{N_s \le \overline{k}, \overline{n} \le M_s} \left(\iint_E \left|\sum_{k,n=N_s}^{\overline{k},\overline{n}} b_{\sigma(k),\sigma(n)}^{(s)} \varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y)\right|^p dxdy\right)^{1/p} \le 2^{-s},$$

$$\sup_{\sqrt{2}N_s \le R \le \sqrt{2}M_s} \iint_T \left|\sum_{2N_s^2 \le k^2+n^2 \le R^2} b_{\sigma(k),\sigma(n)}^{(s)} \varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y)\right| dxdy +$$

$$+\max_{N_s\le\overline{k},\overline{n}\le M_s}\iint_T\left|\sum_{k,n=N_s}^{\overline{k},\overline{n}} b^{(s)}_{\sigma(k),\sigma(n)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y)\right|dxdy<2^{-s}.$$

Теперь выберем $f_{\overline{\nu}_m}(x,y)\in F$ так, что

$$\left(\iint_T\left|f_{\overline{\nu}_m}(x,y)-\left[f_{\nu_m}(x,y)-\sum_{s=1}^{m-1}[Q_s(x,y)-g_s(x,y)]\right]\right|^p dxdy\right)^{1/p}\le 2^{-8(m+1)}. \tag{4.12}$$

В силу неравенства (см. (4.8) - (4.11))

$$\left(\iint_E\left|f_{\nu_m}(x,y)-\sum_{s=1}^{m-1}[Q_s(x,y)-g_s(x,y)]\right|^p dxdy\right)^{1/p}<2^{-2m-1},$$

из (4.12) следует, что

$$\left(\iint_E|f_{\overline{\nu}_m}(x,y)|^p\,dxdy\right)^{1/p}<2^{-2m}. \tag{4.13}$$

Положим

$$g_m(x,y)=f_{\nu_m}(x,y)+[\overline{g}_{\overline{\nu}_m}(x,y)-f_{\overline{\nu}_m}(x,y), \tag{4.14}$$

$$Q_m(x,y)=\overline{Q}_{\overline{\nu}_m}(x,y)=\sum_{k,n=N_m}^{M_m}b^{(m)}_{k,n}\varphi_k(x)\varphi_n(y)=\sum_{k,n=\overline{N}_{\overline{\nu}_m-1}}^{\overline{N}_{\overline{\nu}_m}-1}a^{(\overline{\nu}_m)}_{k,n}\varphi_k(x)\varphi_n(y), \tag{4.15}$$

где $N_m=\overline{N}_{\overline{\nu}_m-1}$, $M_m=\overline{N}_{\overline{\nu}_m}-1$, $b^{(m)}_{k,n}=a^{(\overline{\nu}_m)}_{k,n}$.

В силу (4.1), (4.2), (4.11), (4.12) и (4.14) имеем

$$g_m(x,y)=f_{\nu_m}(x,y),\quad (x,y)\in E, \tag{4.16}$$

$$\iint_T|g_m(x,y)|\,dxdy\le\iint_T\left|\overline{g}_{\overline{\nu}_m}(x,y)\right|\,dxdy+$$
$$+\iint_T\left|f_{\overline{\nu}_m}(x,y)-\left[f_{\nu_m}(x,y)-\sum_{s=1}^{m-1}[Q_s(x,y)-g_s(x,y)]\right]\right|dxdy+$$
$$+\iint_T\left|\sum_{s=1}^{m-1}[Q_s(x,y)-g_s(x,y)]\right|dxdy<2^{-m}, \tag{4.17}$$

$$\iint_T\left|\sum_{s=1}^{m}[Q_s(x,y)-g_s(x,y)]\right|dxdy\le\iint_T|f_{\overline{\nu}_m}(x,y)-[f_{\nu_m}(x,y)-$$
$$-\sum_{s=1}^{m-1}[Q_s(x,y)-g_s(x,y)]]\Big|\,dxdy+\iint_T|\overline{Q}_{\overline{\nu}_m}(x,y)-\overline{g}_{\overline{\nu}_m}|\,dxdy\le 2^{-2m}. \tag{4.18}$$

Из (4.5), (4.6), (4.12) и (4.14) следует, что

$$\left(\iint\limits_E \left|\sum_{s=1}^{m}[Q_s(x,y)-g_s(x,y)]\right|^p dxdy\right)^{1/p} \le \left(\iint\limits_E |\overline{Q}_{\overline{\nu}_m}(x,y)-\overline{g}_{\overline{\nu}_m}|^p\, dxdy\right)^{1/p} +$$

$$+\left(\iint\limits_E \left|f_{\overline{\nu}_m}(x,y)-\left[f_{\nu_m}(x,y)-\sum_{s=1}^{m-1}[Q_s(x,y)-g_s(x,y)]\right]\right|^p dxdy\right)^{1/p} \le 2^{-2m}. \tag{4.19}$$

Согласно (4.3), (4.4), (4.13) и (4.15) имеем

$$\sup_{\sqrt{2}N_m\le R\le\sqrt{2}M_m}\left(\iint\limits_E\left|\sum_{2N_m^2\le k^2+n^2\le R^2} b^{(m)}_{\sigma(k),\sigma(n)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y)\right|^p dxdy\right)^{1/p} +$$

$$+\max_{N_m\le\overline{k},\overline{n}\le M_m}\left(\iint\limits_E\left|\sum_{k,n=N_m}^{\overline{k},\overline{n}} b^{(m)}_{\sigma(k),\sigma(n)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y)\right|^p dxdy\right)^{1/p} \le \tag{4.20}$$

$$\le\left(\iint\limits_E |f_{\overline{\nu}_m}(x,y)|^p\,dxdy\right)^{1/p} < 2^{-m},$$

$$\sup_{\sqrt{2}N_m\le R\le\sqrt{2}M_m}\iint\limits_T\left|\sum_{2N_m^2\le k^2+n^2\le R^2} b^{(m)}_{\sigma(k),\sigma(n)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y)\right| dxdy+$$

$$+\max_{N_m\le\overline{k},\overline{n}\le M_m}\iint\limits_T\left|\sum_{k,n=N_m}^{\overline{k},\overline{n}} b^{(m)}_{\sigma(k),\sigma(n)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y)\right| dxdy \le \tag{4.21}$$

$$\le\iint\limits_T |f_{\overline{\nu}_m}(x,y)|\,dxdy\le 2^{-m}.$$

По индукции построим функции $\{g_m(x,y)\}$ и полиномы $\{Q_m(x,y)\}$, удовлетворяющие условиям (4.16) – (4.21) для всех $m\ge 1$. Из (4.17) следует, что

$$\iint\limits_T\left|\sum_{m=1}^{\infty} g_m(x,y)\right| dxdy<\infty.$$

Положим

$$g(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty} g_m(x,y), \tag{4.22}$$

$$\sum_{k,n=1}^{\infty} b_{\sigma(k),\sigma(n)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y)=\sum_{m=1}^{\infty}\left[\sum_{k,n=N_m}^{M_m} b^{(m)}_{\sigma(k),\sigma(n)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y)\right], \tag{4.23}$$

где

$$b_{\sigma(k),\sigma(n)} = \begin{cases} b^{(m)}_{\sigma(k),\sigma(n)} & \text{для} \quad N_m \le k, n < M_m, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Согласно (4.7), (4.16) и (4.22) получим $g(x,y) \in L(T)$, и $g(x,y) = f(x,y)$ на $E$. Для заданных натуральных чисел $\overline{k}$, $\overline{n}$ и некоторого $m$ будем иметь $N_m \le \min\{\overline{k}, \overline{n}\} \le M_m$. Из (4.17) - (4.23) следует, что

$$\iint_T \left| \sum_{k,n=1}^{\overline{k},\overline{n}} b_{\sigma(k),\sigma(n)} \varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y) - g(x,y) \right| dxdy \le$$

$$\le \iint_T \left| \sum_{s=1}^{m} [Q_s(x,y) - g_s(x,y)] \right| dxdy + + \sum_{s=m+1}^{\infty} \iint_T |g_s(x,y)|\, dxdy +$$

$$+ \max_{N_m \le \overline{k},\overline{n} \le M_m} \iint_T \left| \sum_{k,n=N_m}^{\overline{k},\overline{n}} b^{(m)}_{\sigma(k),\sigma(n)} \varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y) \right| dxdy \le 2^{-m},$$

$$\left( \iint_E \left| \sum_{k,n=1}^{\overline{k},\overline{n}} b_{\sigma(k),\sigma(n)} \varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y) - g(x,y) \right|^p dxdy \right)^{1/p} \le$$

$$\le \left( \iint_E \left| \sum_{s=1}^{m} [Q_s(x,y) - g_s(x,y)] \right|^p dxdy \right)^{1/p} + \sum_{s=m+1}^{\infty} \left( \iint_E |f_{\nu_s}(x,y)|^p dxdy \right)^{1/p} +$$

$$+ \max_{N_m \le \overline{k},\overline{n} \le M_m} \left( \iint_E \left| \sum_{k,n=N_m}^{\overline{k},\overline{n}} b^{(m)}_{\sigma(k),\sigma(n)} \varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y) \right|^p dxdy \right)^{1/p} \le 2^{-m}.$$

Аналогично доказывается, что при $\sqrt{2}N_m \le R \le \sqrt{2}M_m$, $m = 1, 2, \ldots$ имеют место неравенства

$$\iint_T \left| \sum_{2N_m^2 \le k^2+n^2 \le R^2} b_{\sigma(k),\sigma(n)} \varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y) - g(x,y) \right| dxdy < 2^{-m},$$

$$\left( \iint_E \left| \sum_{2N_m^2 \le k^2+n^2 \le R^2} b_{\sigma(k),\sigma(n)} \varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y) - g(x,y) \right|^p dxdy \right)^{1/p} \le 2^{-m}.$$

Теорема 2 доказана.

Применяя доказательство Леммы 1 вместо Леммы 3 получим доказательство Теоремы 1.

ABSTRACT. Let $\{\varphi_n(x)\}$ be a complete orthonormal system of bounded functions on $[0,1]$, and let for some $p_0 > 2$, $\|\varphi_n\|_{L^{p_0}} \le const$ for every $n = 1, 2, \ldots$ . The paper proves that a rearrangement $\{\sigma(k)\}$ of the natural numbers exists, such that the system $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ has the following property : for each $\varepsilon > 0$ there exists a measurable set $E \subset [0,1]$ with measure $|E| > 1 - \varepsilon$, such that for any $p \in [2, p_0]$ and $f(x) \in L^p(E)$ there exists $g(x) \in L^1([0,1])$ coinciding with $f(x)$ on $E$, whose Fourier series by $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ converges to $g(x)$ on $E$ in $L^p(E)$ and on $[0,1]$ in $L^1([0,1])$.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Лузин, "К основной теореме интегрального исчисления", Мат. Сб., том 28, № 2, стр. 266 - 294, 1912.
2. Д. Е. Меньшов, "О равномерной сходимости рядов Фурье", Мат. Сб., том II(53), стр. 67 - 96, 1942.
3. Д. Е. Меньшов, "О рядах Фурье от суммируемых функций", Труды Моск. Матем. об-ва, том 1, стр. 5 - 38, 1952.
4. А. А. Талалян, "О зависимости сходимости ортогональных рядов от изменения значений разлагаемой функции", Мат. Заметки, том 33, № 5, стр. 715 - 722, 1983.
5. К. И. Осколков, "Равномерный модуль непрерывности суммируемых функций на множествах положительной меры", Докл. АН СССР, том 228, № 2, стр. 304 - 306, 1976.
6. Ф. Г. Арутюнян, "О рядах по системе Хаара", Докл. АН Арм. ССР, том 42, № 3, стр. 134 - 140, 1966.
7. Р. И. Осипов, "О сходимости рядов по системе Уолша", Изв. АН Арм. ССР, Математика, том 1, № 4, стр. 270 - 283, 1966.
8. Б. С. Кашин, Г. Г. Кошелева, "Об одном подходе к теоремам об исправлении", Вестник МГУ, сер. Математика и Механика, № 1, стр. 6 - 8, 1988.
9. Ш. В. Хеладзе, "Сходимость рядов Фурье почти всюду и в смысле $L^1$-метрики", Мат. Сбор., том 107, стр. 245 - 258, 1978.
10. А. Б. Гулисашвили, "Перестановки, расстановки знаков и сходимость последовательностей операторов", Зап. Науч. Семин. ЛОМИ, том 107, стр. 45 - 59, 1982.
11. Л. Д. Гоголадзе, Т. Ш. Зеркидзе, "О сопряженных функциях нескольких переменных", Сообщ. АН Груз. ССР, том 94, № 3, стр. 541 - 544, 1979.
12. M. G. Grigorian, "On the convergence of Fourier series in the metric of $L^1$", Analysis Mathem., vol. 17, no. 3, pp. 211 - 237, 1991.
13. М. Г. Григорян, "О сходимости в метрике $L^1$ и почти всюду рядов Фурье по полным ортонормированным системам", Мат. Сбор., том 181, № 8, стр. 1011 - 1030, 1990.
14. М. Г. Григорян, "О некоторых свойствах ортогональных систем", Изв. РАН, сер. мат., том 57, № 5, стр. 75 - 105, 1993.
15. К. С. Казарян, "О некоторых вопросах теории ортогональных рядов", Мат. Сбор., том 119, № 2, стр. 278 - 298, 1982.
16. Б. С. Кашин, "Об одной полной ортонормированной системе", Мат. Сбор., том 99(141), стр. 355 - 365, 1976.
17. А. М. Олевский, "Существование функций с неустранимыми особенностями Карлемана", Докл. АН СССР, том 238, стр. 796 - 799, 1978.
18. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные Ряды, Наука, Москва, 1984.

3 Мая 1997

Ереванский государственный университет