АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ОШИБКИ ПРОГНОЗА ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

М. С. Гиновян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 1, 1999

Пусть $X(t)$, $t = 0, \pm 1, \ldots$ – стационарная в широком смысле случайная последовательность со спектральной плотностью $f(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$. Пусть σ_T^2 – среднеквадратическая ошибка прогноза величины $X(0)$ линейными формами по переменным $X(-T), \ldots, X(-1)$, и $\sigma^2 = \sigma_\infty^2$. В работе изучается скорость убывания к нулю величины $\delta_T = \sigma_T^2 - \sigma^2$ при $T \to \infty$ в зависимости от свойств спектральной плотности $f(\lambda)$. Доказано, что для $0 < \gamma < 1/2$ и $T \to \infty$ оценки $\delta_T = O(T^{-\gamma})$ или $\delta_T = o(T^{-\gamma})$ имеют место для достаточно широких классов спектральных плотностей при некоторых ограничениях на типы их нулей. Статья содержит также результаты, характеризующие асимптотическое поведение теплицевых определителей $D_n(f)$ порожденных функцией $f(\lambda)$.

§1. Введение

Пусть $X(t)$, $t \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \ldots\}$ — стационарная в широком смысле случайная последовательность со спектральной плотностью (с.п.) $f(\lambda)$, удовлетворяющей условиям

$$0 \le f(\lambda) \in \mathrm{L}_1[-\pi, \pi], \quad f(\lambda + 2\pi) = f(\lambda),$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \log f(\lambda)\, d\lambda > -\infty. \tag{1}$$

Обозначим через σ_T^2 среднеквадратическую ошибку линейного прогноза случайной величины $X(0)$ по случайным величинам $X(-T), \ldots, X(-1)$:

$$\sigma_T^2 = \min_{\{a_k\}} \left\| X_0 - \sum_{k=1}^{T} a_k X(-k) \right\|^2,$$

где $\|X\|^2 = E|X|^2$. Пусть $\sigma^2 = \sigma_\infty^2$ — ошибка линейного прогноза по всему прошлому. Известно (см., например, [13], [17]), что из условия (1) следует

$$\sigma^2 = \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log f(\lambda)\, d\lambda \right\} > 0. \tag{2}$$

Полагая

$$\delta_T = \sigma_T^2 - \sigma^2, \tag{3}$$

имеем $\delta_T \geq 0$ и $\delta_T \to 0$ при $T \to \infty$. В статье исследуется скорость убывания к нулю величины δ_T при $T \to \infty$, зависящей от свойств с. п. $f(\lambda)$.

Задача об оценке δ_T для различных классов спектральных плотностей рассматривалась многими авторами. Статьи Г. Бакстера [2], Я. Геронимуса [7], У. Гренандера и Г. Сеге [13], У. Гренандера и М. Розенблатта [14] и другие содержат достаточные условия в терминах с. п. $f(\lambda)$ для выполнения соотношения

$$\delta_T = O(T^{-\gamma}), \quad \gamma > 0, \quad T \to \infty. \tag{4}$$

Необходимое и достаточное условие для (4) в случае $\gamma = 2(r + \alpha)$, $r \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 < \alpha \leq 1$, $r + \alpha > 1/2$ получено И. А. Ибрагимовым в [17] : с. п. $f(\lambda)$ **должна почти всюду совпадать с непрерывной положительной функцией, принадлежащей классу Никольского** $H_2(\gamma)$ (определение $H_2(\gamma)$ дано в §2).

Из теоремы Ибрагимова следует, что для "больших" значений γ ($\gamma > 1$), с. п. $f(\lambda)$ необходимо отделена от нуля. С другой стороны, в той же работе [17] показано также, что если $f(\lambda)$ имеет нули или неограничена, то δ_T убывает к нулю медленнее (по порядку), чем $T^{-(1+\varepsilon)}$ для любого $\varepsilon > 0$. В работе [21] (см. также [11]) при тех же условиях был доказан более сильный результат $\delta_T \asymp T^{-1}$, где $a_T \asymp b_T$ означает, что a_T/b_T асимптотически (при $T \to \infty$) отделена от 0 и ∞. Представляет интерес описать классы спектральных плоскостей, для которых оценка (4) выполняется для $0 < \gamma < 1/2$.

Статьи Г. Бакстера [2], И. Хиршмана [15] и Б. Голинского [11] содержат достаточные условия в терминах с. п. $f(\lambda)$ для выполнения соотношения

$$\delta_T = o(T^{-\gamma}), \quad \gamma > 0, \quad T \to \infty. \tag{5}$$

Отметим, что во всех этих работах предполагается, что с. п. $f(\lambda)$ отделена и от нуля и от бесконечности. Для специального класса спектральных плотностей, обладающих нулями типа Маккенхаупта, оценка (5) доказана в статье [8].

В настоящей работе мы доказываем, что для $0 < \gamma < 1/2$ оценки (4) и (5) имеют место для достаточно широких классов спектральных плотностей, обладающих нулями типа Маккенхаупта или полиномиальными нулями. Некоторые результаты этой статьи были анонсированы в [10].

Статья имеет следующую структуру : в §2 исследуется асимптотическое поведение ошибки прогноза, в §3 изучается асимптотическое поведение теплицевых определителей, порожденных спектральной плотностью, в §4 приводятся доказательства результатов, сформулированных в §2.

§2. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ОШИБКИ ПРОГНОЗА

Начнем с некоторых обозначений и определений. Положим

$$\mathbf{L}_p = \mathbf{L}_p([-\pi,\pi]) = \left\{\psi : \ ||\psi||_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\psi(\lambda)|^p \, d\lambda\right)^{1/p} < \infty\right\}, \quad 1 \le p < \infty;$$

$$\mathbf{L}_\infty = \mathbf{L}_\infty([-\pi,\pi]) = \left\{\psi : \ ||\psi||_\infty = \mathrm{esssup}_{\lambda\in[-\pi,\pi]} |\psi(\lambda)| < \infty\right\}.$$

Для функции $\psi(\lambda) \in \mathbf{L}_p$, ее $\mathbf{L}_p$–модуль непрерывности определяется равенством

$$\omega_p(\psi;\delta) = \sup_{|t|<\delta} ||\psi(\cdot + t) - \psi(\cdot)||_p, \quad \delta > 0.$$

Обозначим через $\mathrm{lip}(\alpha;p)$, $\mathbf{W}_p(\gamma)$ и $\mathbf{H}_p(\gamma)$ $\mathbf{L}_p$-класс Липшица, классы Соболева и Никольского, соответственно. Напомним их определения (см., например, [24]) :

Определение 1. 1) Функция $\psi(\lambda) \in \mathbf{L}_p$ принадлежит классу $\mathrm{lip}(\alpha;p)$ для $0 < \alpha < 1$ и $p > 1$, если $\omega_p(\psi;\delta) = o(\delta^\alpha)$ при $\delta \to 0$.

2) Функция $\psi(\lambda) \in \mathbf{L}_p$ принадлежит классу $\mathbf{W}_p(\gamma)$ для $\gamma > 0$ и $1 \le p < \infty$, если $\int_{-\pi}^{\pi} \psi(\lambda) d\lambda = 0$ и $\psi(\lambda)$ имеет производную порядка γ в смысле Вейля такую, что $\psi^{(\gamma)}(\lambda) \in \mathbf{L}_p$.

3) Пусть $0 < \alpha < 1$, $r \in \mathbb{N}_0$, $\gamma = r + \alpha$ и $1 \le p \le \infty$, где $\mathbb{N}_0$ – множество неотрицательных целых чисел. Функция $\psi(\lambda) \in \mathbf{L}_p$ принадлежит классу $\mathbf{H}_p(\gamma)$, если $\psi(\lambda)$ имеет r-ую производную $\psi^{(r)}(\lambda) \in \mathbf{L}_p$ и

$$||\psi^{(r)}(\cdot + h) - \psi^{(r)}(\cdot)||_p \le C|h|^\alpha,$$

где C – положительная постоянная.

Определение 2. Будем говорить, что 2π–периодическая неотрицательная функция $f(\lambda)$ удовлетворяет **условию Маккенхаупта** (или имеет нули типа Махенхаупта), если (см. [16]) :

$$\sup \frac{1}{|J|^2} \int_J f(\lambda)\, d\lambda \int_J \frac{1}{f(\lambda)}\, d\lambda < \infty, \tag{6}$$

где супремум берется по всем интервалам $J \subset [-\pi,\pi]$ и $|J|$– длина интервала J. Наконец, класс 2π–периодических неотрицательных функций, удовлетворяющих условию Маккенхаупта (6), будем обозначать через $\mathcal{A}_2$.

В §4 мы докажем следующие теоремы.

Теорема 1. **Предположим, что с.п. $f(\lambda)$ удовлетворяет условиям**

a) $f(\lambda) \in \mathcal{A}_2$;

b) $\log f(\lambda) \in \mathbf{H}_p(\alpha)$, $p \geq 2$, $0 < \alpha < 1/2$.

Тогда $\delta_T = O(T^{-2\alpha})$ **при** $T \to \infty$.

Теорема 2. **Предположим, что с.п. $f(\lambda)$ удовлетворяет условиям**

a) $f(\lambda) \in \mathcal{A}_2$;

b) $\log f(\lambda) \in \mathbf{lip}(\alpha, 2)$, $0 < \alpha < 1/2$.

Тогда $\delta_T = o(T^{-2\alpha})$ **при** $T \to \infty$.

Теорема 3. **Предположим, что с.п. $f(\lambda)$ удовлетворяет условию** $\log f(\lambda) \in \mathbf{W}_p(1/p)$, $p \geq 2$. **Тогда** $\delta_T = O(T^{-2/p})$ **при** $T \to \infty$.

Теорема 4 относится к случаю

$$f(\lambda) = |Q_m(e^{i\lambda})|^2 h(\lambda), \tag{7}$$

где $Q_m(z)$ — многочлен степени m и $h(\lambda) \in \mathcal{A}_2$.

Теорема 4. **Предположим, что с.п. $f(\lambda)$ имеет вид (7), где $Q_m(z)$, ($|Q_m(0)| = 1$) — многочлен степени m с корнями на единичной окружности $|z| = 1$. Тогда имеют место следующие утверждения :**

a) **Если** $h(\lambda) \in \ cal A_2$ **и** $\log h(\lambda) \in \mathbf{H}_p(\alpha)$, $p \geq 2$, $0 < \alpha < 1/2$, **то**

$$\delta_T = O(T^{-2\alpha}) \qquad \textbf{при} \quad T \to \infty; \tag{8}$$

b) **Если** $h(\lambda) \in \mathcal{A}_2$ **и** $\log h(\lambda) \in \mathbf{lip}(\alpha, 2)$, $0 < \alpha < 1/2$, **то**

$$\delta_T = o(T^{-2\alpha}) \qquad \textbf{при} \quad T \to \infty. \tag{9}$$

c) **Если** $h(\lambda) \in \mathbf{W}_p(1/p)$, $p \geq 2$, **то**

$$\delta_T = O(T^{-2/p}) \qquad \textbf{при} \quad T \to \infty. \tag{10}$$

§3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ТЕПЛИЦЕВЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Пусть $f(\lambda)$ - весовая функция, т.е. $f(\lambda)$ - неотрицательная 2π-периодическая функция класса $\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_1[-\pi, \pi]$. Обозначим через $D_n(f)$ соответствующий теплицев определитель :

$$D_n(f) = \det ||c_{k-j}||_{k,j=\overline{0,n}}, \quad n = 0, 1, ..., \tag{11}$$

где

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\lambda} f(\lambda)\, d\lambda, \quad k = 0, \pm 1, \ldots$$

суть коэффициенты Фурье функции $f(\lambda)$.

В этом параграфе мы изучаем асимптотическое поведение $D_n(f)$ при $n \to \infty$. В 1920 Г. Сеге доказал свою "слабую" теорему (см. [13], р. 89), утверждающую, что из условия $\log f \in \mathbf{L}_1$ следует

$$\lim_{n\to\infty} [D_n(f)]^{1/(n+1)} = G(f), \tag{12}$$

где

$$G(f) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log f(\lambda)\, d\lambda\right\} \tag{13}$$

– геометрическое среднее функции $f(\lambda)$. Заметим, что соотношение (12) можно записать в виде

$$\log D_n(f) - \frac{n+1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log f(\lambda)\, d\lambda = o(n) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{14}$$

В 1952 г. Сеге уточнил этот результат (см. [13], стр. 101) доказав, что для строго положительных функций $f(\lambda)$, производные f' которых удовлетворяют условию Липшица с произвольным показателем α $(0 < \alpha \le 1)$, имеет место асимптотическое соотношение (при $n \to \infty$)

$$\log D_n(f) - \frac{n+1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log f(\lambda)\, d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} k|d_k|^2 + o(1), \tag{15}$$

где

$$d_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\lambda} \log f(\lambda)\, d\lambda, \quad k = 0, \pm 1, \ldots$$

суть коэффициенты Фурье функции $\log f(\lambda)$.

Асимптотическое соотношение (15) рассматривали А. Девинатц [5], И. Хиршман [15], Я. Л. Геронимус [7], И. А. Ибрагимов [18] и другие. Целью их исследований было доказательство (15) при менее ограничительных условиях чем условия Г. Сеге. В частности, И. А. Ибрагимов доказал следующую теорему (см. [18], [20]).

Теорема 5 (И. А. Ибрагимов). Пусть $f(\lambda) \in \mathbf{L}_1[-\pi, \pi]$ и $\log f(\lambda) \in \mathbf{L}_1[-\pi, \pi]$. Тогда асимптотическое соотношение (15) имеет место, если

$$\sum_{k=0}^{\infty} k|d_k|^2 < \infty. \tag{16}$$

Отметим (см. [24]), что условие (16) эквивалентно следующему :

$$\log f(\lambda) \in \mathbf{W}_2(1/2). \tag{17}$$

Из теоремы Ибрагимова и формулы (15) получаем, что каждое из условий (16) и (17) достаточно для

$$\lim_{n\to\infty} \left[\log D_n(f) - \frac{n+1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log f(\lambda)\, d\lambda\right] < \infty.$$

Замечание 1. Из результатов И. А. Ибрагимова [19] вытекает, что весовая функция $f(\lambda)$, удовлетворяющая (16) (следовательно и (17)), необходимо удовлетворяет (6).

В этом параграфе для заданного α $(0 < \alpha < 1)$ мы опишем классы функций, для которых в "слабой" теореме Г. Сеге остаточный член (при $n \to \infty$) имеет порядок $O(n^{\alpha})$ или $o(n^{\alpha})$, т.е.

$$\log D_n(f) - \frac{n+1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log f(\lambda)\, d\lambda = \begin{cases} O(n^{\alpha}) \\ o(n^{\alpha}) \end{cases} \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Теорема 6. **Предположим, что весовая функция** $f(\lambda)$ **удовлетворяет условиям a) и b) Теоремы 1. Тогда при** $n \to \infty$

$$\log D_n(f) - \frac{n+1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log f(\lambda)\, d\lambda = O(n^{1-2\alpha}). \tag{18}$$

Теорема 7. **Предположим, что весовая функция** $f(\lambda)$ **удовлетворяет условиям a) и b) Теоремы 1. Тогда при** $n \to \infty$

$$\log D_n(f) - \frac{n+1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log f(\lambda)\, d\lambda = o(n^{1-2\alpha}). \tag{19}$$

Теорема 8. **Предположим, что весовая функция** $f(\lambda)$ **такова, что** $\log f(\lambda) \in \mathbf{W}_p(1/p)$, $p \geq 2$. **Тогда при** $n \to \infty$

$$\log D_n(f) - \frac{n+1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log f(\lambda)\, d\lambda = O(n^{1-2/p}). \tag{20}$$

Теперь рассмотрим весовые функции $f(\lambda)$ вида (7). В нижеследующей теореме полагаем

$$R_n(f,h) = \log D_n(f) - \frac{n+1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log h(\lambda)\, d\lambda. \tag{21}$$

Теорема 9. Если весовая функция $f(\lambda)$ имеет вид (7), где $Q_m(z)$, ($|Q_m(0)| = 1$) есть многочлен степени m с корнями на единичной окружности $|z| = 1$, то имеют место следующие утверждения :

a) Если $h(\lambda) \in \mathcal{A}_2$ и $\log h(\lambda) \in \mathbf{H}_p(\alpha)$, $p \geq 2$, $0 < \alpha < 1/2$, то

$$R_n(f, h) = O(n^{1-2\alpha}) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{22}$$

b) Если $h(\lambda) \in \mathcal{A}_2$ и $\log h(\lambda) \in \mathrm{lip}(\alpha, 2)$, $0 < \alpha < 1/2$, то

$$R_n(f, h) = o(n^{1-2\alpha}) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{23}$$

c) Если $h(\lambda) \in \mathbf{W}_p(1/p)$, $p \geq 2$, то

$$R_n(f, h) = O(n^{1-2/p}) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{24}$$

Для доказательства Теорем 6 – 9 нам понадобятся некоторые вспомогательные результаты. Пусть $\mathcal{H}^{2+}$ обозначает класс Харди в единичном круге, т.е., $\mathcal{H}^{2+}$ – множество аналитических функций $\varphi(z)$ внутри единичного круга $\{z : |z| < 1\}$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{0<r<1} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(re^{i\lambda})|^2 \, d\lambda < \infty.$$

Заметим (см., например, [20], стр. 52–53), что класс $\mathcal{H}^{2+}$ можно отождествить с замкнутым подпространством пространства $\mathbf{L}_2[-\pi, \pi]$. Это подпространство, которое мы также будем обозначать через $\mathcal{H}^{2+}$, состоит из функций $\varphi(e^{i\lambda}) \in \mathbf{L}_2[-\pi, \pi]$, для которых

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(e^{i\lambda}) e^{ik\lambda} \, d\lambda = 0, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Хорошо известно (см., например, [20], стр. 54), что условие $\log f \in \mathbf{L}_1[-\pi, \pi]$ необходимо и достаточно для представления

$$f(\lambda) = |g(f, e^{i\lambda})|^2 \quad \text{для почти всех } \lambda \in [-\pi, \pi], \tag{25}$$

где $g(f, z)$ — внешняя функция из класса Харди $\mathcal{H}^{2+}$. В частности, можно взять функцию Сеге (см. [6], стр. 210) :

$$g(z) = g(f, z) = exp\left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \log f(\lambda) \, d\lambda \right\}, \quad z = e^{i\lambda}. \tag{26}$$

Заметим, что функция $g(z)$ отлична от нуля в единичном круге $\{z : |z| < 1\}$, причем значение $g(0)$ вещественно и положительно.

Лемма 1. Имеют место следующие утверждения :

1) **Если** $\log f(\lambda) \in \mathbf{H}_p(\alpha)$, $p \geq 2$, $0 < \alpha < 1$, **то**

$$\inf_{Q \in T_n} \left\| \frac{\bar{g}}{g} - Q \right\|_2^2 = O(n^{-2\alpha}) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{27}$$

2) **Если** $\log f(\lambda) \in \mathrm{lip}(\alpha, 2)$, $0 < \alpha < 1$, **то**

$$\inf_{Q \in T_n} \left\| \frac{\bar{g}}{g} - Q \right\|_2^2 = o(n^{-2\alpha}) \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{28}$$

где T_n **— множество тригонометрических многочленов степени не выше** n **и** $g(z) = g(f; z)$ **— функция Сеге, определенная формулой (26).**

Доказательство : Докажем утверждение 1). Известно (см. [24], Теорема 4), что если 2π–периодическая функция $f(\lambda)$ принадлежит классу $\mathbf{H}_p(\alpha)$, $2 \leq p < \infty$, то при $n \to \infty$ ее коэффициенты Фурье $\hat{f}_k$ необходимо удовлетворяют условию

$$\sum_{|k| \geq n} |\hat{f}_k|^2 = O(n^{-2\alpha}).$$

Следовательно, для $p \geq 2$ из предположения $\log f(\lambda) \in \mathbf{H}_p(\alpha)$ следует

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |d_k|^2 = O(n^{-2\alpha}) \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{29}$$

где d_k суть коэффициенты Фурье функции $\log f(\lambda)$. Обозначим через $E_2(k; h)$ наилучшее приближение функции $h(\lambda) \in \mathbf{L}_2$ тригонометрическими многочленами степени не выше k. Учитывая равенство (см., например, [7])

$$E_2^2(n; \log f) = 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} |d_k|^2,$$

из (29) получаем

$$E_2^2(n; \log f) = O(n^{-2\alpha}) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{30}$$

Из (30), используя неравенство (см. [26], стр. 344)

$$\omega_2(\log f; 1/n) \leq C \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E_2(k; \log f),$$

где $\omega_2(\log f; 1/n)$ — модуль непрерывности функции $\log f(\lambda)$ в пространстве $\mathbf{L}_2$, получаем

$$\omega_2^2(\log f; 1/n) = O(n^{-2\alpha}) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{31}$$

Принимая во внимание, что модули коэффициентов Фурье функций $\log f$ и $\widetilde{\log f}$ попарно совпадают ($\widetilde{\log f}$ обозначает функцию, гармонически сопряженную с функцией $\log f$), получаем

$$\omega_2(\log f; 1/n) = \omega_2(\widetilde{\log f}, 1/n). \tag{32}$$

Поэтому из (31) и (32) имеем

$$\omega_2^2(\widetilde{\log f}; 1/n) = O(n^{-2\alpha}) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{33}$$

Далее, из (25) имеем $g = \exp\{\frac{1}{2}(\log f + i\widetilde{\log f})\}$. Следовательно

$$\frac{\bar{g}}{g} = \exp\left\{-i\widetilde{\log f}\right\}. \tag{34}$$

Из соотношений $|e^u - 1| < |u|e^{|u|}$ и $|\bar{g}g^{-1}| = 1$ получаем

$$\begin{aligned}&\left|\exp\left\{-i\widetilde{\log f}(\lambda+\delta)\right\} - \exp\left\{-i\widetilde{\log f}(\lambda)\right\}\right| = \\ &= \left|\exp\left\{-i\left[\widetilde{\log f}(\lambda+\delta) - \widetilde{\log f}(\lambda)\right]\right\} - 1\right| \le \left|\widetilde{\log f}(\lambda+\delta) - \widetilde{\log f}(\lambda)\right|.\end{aligned}$$

Следовательно, из (34) имеем

$$\omega_2\left(\frac{\bar{g}}{g}; \delta\right) = \omega_2\left(e^{-i\widetilde{\log f}}\right) \le \omega_2\left(\widetilde{\log f}; \delta\right). \tag{35}$$

Используя (32), (33), (35) и неравенство (см. [26], стр. 338) $E_2(n; \log f) \le C\omega_2(\log f; 1/n)$, получаем

$$E_2^2\left(n; \frac{\bar{g}}{g}\right) = O(n^{-2\alpha}) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Утверждение 1) доказано. Утверждение 2) можно доказать аналогичным образом, используя характеризационную теорему класса $\mathrm{lip}(\alpha, 2)$ (см. [1], стр. 222), согласно которой условие $\log f(\lambda) \in \mathrm{lip}(\alpha, 2)$ эквивалентно следующему :

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |d_k|^2 = o(n^{-2\alpha}) \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

где d_k — коэффициенты Фурье функции $\log f(\lambda)$. Лемма 1 доказана.

Напомним понятие ортогональных многочленов на единичной окружности, связанных с весовой функцией (см. [6], [13]). Каждой неотрицательной 2π-периодической функции $f(\lambda) \in \mathbf{L}_1[-\pi, \pi]$ соответствует система многочленов $\varphi_n(z) = \varphi_n(f; z)$, $n = 0, 1, \ldots$, которые ортогональны на единичной окружности $|z| = 1$ относительно веса $f(\lambda)$ и однозначно определяются следующими условиями :

(i) $\varphi_n(z) = \kappa_n(f)z^n + \cdots + l_n(f)$ — многочлен степени n, в котором коэффициент $\kappa_n = \kappa_n(f)$ вещественен и положителен ;

(ii) для произвольных неотрицательных целых k и j

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_k(z)\overline{\varphi_j(z)}f(\lambda)d\lambda = \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{для } k = j, \\ 0, & \text{для } k \neq j, \end{cases} \qquad z = e^{i\lambda}.$$

Отметим, что каждый многочлен $\varphi_n(z)$ явно выражается через коэффициенты Фурье функции $f(\lambda)$ (см. [13], стр. 54). Более того, коэффициент $k_n(f)$ при z^n многочлена $\varphi_n(z)$ выражается через теплицев определитель $D_n(f)$, порожденный функцией $f(\lambda)$. Имеет место следующее равенство (см. [13], стр. 54) :

$$\kappa_n^2(f) = \frac{D_{n-1}(f)}{D_n(f)} = \sum_{k=0}^{n-1}|\varphi_k(0)|^2, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{36}$$

Доказательство следующей леммы можно найти в [13], стр. 70 — 73.

Лемма 2. **Пусть $f(\lambda)$ – неотрицательная, 2π-периодическая функция из $L_1[-\pi,\pi]$, и пусть $\log f(\lambda) \in L_1[-\pi,\pi]$. Тогда**

$$\lim_{n\to\infty}\kappa_n(f) = [G(f)]^{-1/2} = \frac{1}{g(f,0)}, \tag{37}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\overline{\varphi_k(0)}\varphi_k(z) = \frac{1}{g(f,0)}\cdot\frac{1}{g(f,z)}, \quad |z| < 1, \tag{38}$$

где $g(f,z)$ и $G(f)$ — функция Сеге и геометрическое среднее функции $f(\lambda)$, определенные по (13) и (26) соответственно.

Лемма 3. **Пусть $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ — система ортогональных многочленов относительно весовой функции $f(\lambda)$. Имеем**

1) Если $f(\lambda) \in \mathcal{A}_2$ и $\log f(\lambda) \in H_p(\alpha)$, $p \geq 2$, $0 < \alpha < 1$, то

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}|\varphi_k(0)|^2 = O(n^{-2\alpha}) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{39}$$

2) Если $f(\lambda) \in \mathcal{A}_2$ и $\log f(\lambda) \in \mathrm{lip}(\alpha, 2)$, $0 < \alpha < 1$, то

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}|\varphi_k(0)|^2 = o(n^{-2\alpha}) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{40}$$

Для доказательства Леммы 3 мы нуждаемся в понятии минимального угла между подпространствами гильбертова пространства.

Определение 3. Минимальный угол $u(H_1, H_2) \in [0, \pi/2]$ между подпространствами H_1 и H_2 гильбертова пространства H определяется равенством

$$\cos u(H_1, H_2) = \sup_{\psi_1 \in H_1, \psi_2 \in H_2} \frac{|(\psi_1, \psi_2)|}{||\psi_1|| \cdot ||\psi_2||},$$

где $(\cdot, \cdot)$ и $||\cdot||$ – скалярное произведение и норма в пространстве H соответственно.

Обозначим через $\mathbf{L}_2(f)$ весовое пространство

$$\mathbf{L}_2(f) = \left\{\varphi(\lambda): \ ||\varphi||_f = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(\lambda)|^2 f(\lambda)\, d\lambda\right)^{1/2} < \infty\right\}.$$

Пусть $H_a^b(f)$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$ — подпространство пространства $\mathbf{L}_2(f)$, порожденное функциями $\{e^{i\lambda t}, a \leq t \leq b\}$, т.е. $H_a^b(f) = \overline{\mathrm{sp}}\{e^{i\lambda t}: a \leq t \leq b\}_f$, где $\overline{\mathrm{sp}}\{\cdot\}_f$ обозначает замыкание в $\mathbf{L}_2(f)$ линейной оболочки функций, находящихся в скобках. Следующий важный результат можно найти в [23], стр. 254.

Лемма 4. Следующие утверждения эквивалентны :

a) Весовая функция $f(\lambda)$ удовлетворяет условию Маккенхаупта (6) ;

b) Минимальный угол $u_f(H_{-\infty}^0(f), H_1^\infty(f))$ между подпространствами $H_{-\infty}^0(f)$ и $H_1^\infty(f)$ в пространстве $\mathbf{L}_2(f)$ положителен, т.е.

$$\rho_1(f) = \cos u_f(H_{-\infty}^0(f), H_1^\infty(f)) < 1. \tag{41}$$

Доказательство Леммы 3 : Докажем утверждение 1). Пусть $g_1(z) = g_1(1/f; z)$ — функция Сеге, соответствующая $1/f(\lambda)$. Из утверждения 1) Леммы 1 имеем

$$\left\|\frac{\bar{g}_1}{g_1} - Q_n\right\|_2^2 = O(n^{-2\alpha}) \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{42}$$

где Q_n — многочлен наилучшего приближения функции $\bar{g}_1(\lambda) g_1^{-1}(\lambda)$ в метрике пространства $\mathbf{L}_2$. Запишем функцию $g_1 Q_n$ в виде $A_n + B_n$, где B_n — многочлен по неположительным степеням функции $e^{i\lambda}$, $B_n \in H_{-\infty}^0(f)$ и $A_k \in H_1^\infty(f)$. В силу (25) имеем

$$\left\|\frac{\overline{g}_1}{g_1} - Q_n\right\|_2^2 = ||(\overline{g}_1 - B_n) - A_n||_f^2 \geq ||(\overline{g}_1 - B_n)||_f^2 + ||A_n||_f^2 - 2|(\overline{g}_1 - B_n, A_n)_f|. \tag{43}$$

Используя определение минимального угла, получаем

$$2|(\overline{g}_1 - B_n, A_n)_f| \leq 2\rho_1(f)||(\overline{g}_1 - B_n)||_f^2 ||A_n||_f^2 \leq \rho_1(f)\left(||(\overline{g}_1 - B_n)||_f^2 + ||A_n||_f^2\right).$$

Так как функция $f(\lambda)$ удовлетворяет условию Маккенхаупта (6), то из Леммы 4 имеем $\rho_1(f) < 1$. Следовательно, в силу (43)

$$\left\| \frac{\overline{g}_1}{g_1} - Q_n \right\|_2^2 \geq (1 - \rho_1(f)) \|\overline{g}_1 - B_n\|_f^2.$$

Таким образом

$$\inf_{P_k \in T_n} \|g_1 - P_k\|_f^2 \leq \frac{1}{1 - \rho_1(f)} \left\| \frac{\overline{g}_1}{g_1} - Q_n \right\|_2^2, \tag{44}$$

где T_n — множество тригонометрических многочленов P_k степени $k \leq n$. Из (38) следует, что коэффициенты Фурье функции $g_1(\lambda)$ по ортонормальной системе $\{\varphi_\nu(z)\}$ суть $\overline{\varphi_\nu(0)}(\overline{g_1(0)})^{-1}$. Поэтому

$$\inf_{P_k \in T_n} \|g_1 - P_k\|_f^2 = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} |\varphi_\nu(0)|^2 |g_1(0)|^{-2}. \tag{45}$$

Из (44) и (45) получаем

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\varphi_k(0)|^2 = \frac{1}{|g_1(0)|^2} \inf_{P_k \in T_n} \|g - P_k\|_f^2 \leq \frac{1}{(1 - \rho_1(f))|g(0)|^2} \left\| \frac{\overline{g}_1}{g_1} - Q_n \right\|_2^2. \tag{46}$$

Наконец, из (42) и (46) имеем

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\varphi_k(0)|^2 = O(n^{-2\alpha}) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Тем самым утверждение 1) доказано. Утверждение 2) доказывается аналогичным образом, оно следует из утверждения 2) Леммы 1 и (46). Лемма 3 доказана. Доказательство следующей леммы можно найти в [3], стр. 50.

Лемма 5. Для последовательности неотрицательных чисел a_k и $\delta > \beta > 0$ соотношение

$$\sum_{k=1}^{n} k^\delta a_k = O(n^\beta) \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = O(n^{\beta-\delta}) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Доказательство Теоремы 6 : Пусть $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ — система ортогональных многочленов, соответствующая весовой функции $f(\lambda)$. Принимая во внимание, что $D_0(f) = |\varphi_k(0)|^{-2}$ (см. [13], стр. 54), из (36) получим

$$\begin{aligned} \log D_n(f) &= \log \prod_{k=1}^{n} \frac{D_k(f)}{D_{k-1}(f)} D_0(f) = -\sum_{k=1}^{n} \log \sum_{\nu=0}^{k} |\varphi_\nu(0)|^2 - \log |\varphi_0(0)|^2 = \\ &= -\sum_{k=0}^{n} \log \sum_{\nu=0}^{k} |\varphi_\nu(0)|^2. \end{aligned} \tag{47}$$

Из (37) и (38)

$$G(f) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\varphi_k(0)|^2\right)^{-1}. \tag{48}$$

Следовательно

$$(n+1)\log G(f) = -(n+1)\log\sum_{\nu=0}^{\infty}|\varphi_\nu(0)|^2 = -\sum_{k=0}^{n}\log\sum_{\nu=0}^{\infty}|\varphi_\nu(0)|^2. \tag{49}$$

Из (47) и (49) получаем

$$\log D_n(f) - (n+1)\log G(f) = -\sum_{k=0}^{n}\log\sum_{\nu=0}^{k}|\varphi_\nu(0)|^2 + \sum_{k=0}^{n}\log\sum_{\nu=0}^{\infty}|\varphi_\nu(0)|^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\log\frac{\sum_{\nu=0}^{\infty}|\varphi_\nu(0)|^2}{\sum_{\nu=0}^{k}|\varphi_\nu(0)|^2} = -\sum_{k=0}^{n}\log\left(1 - \frac{\sum_{\nu=k+1}^{\infty}|\varphi_\nu(0)|^2}{\sum_{\nu=0}^{\infty}|\varphi_\nu(0)|^2}\right).$$

Следовательно

$$\log D_n(f) - (n+1)\log G(f) = -\sum_{k=0}^{n}\log(1-\beta), \tag{50}$$

где

$$\beta = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty}|\varphi_\nu(0)|^2\right)^{-1}\sum_{k=n+1}^{\infty}|\varphi_k(0)|^2 = G(f)\sum_{k=n+1}^{\infty}|\varphi_k(0)|^2 < 1.$$

Для $0 < \beta \le m < 1$ существуют положительные постоянные C_1 и C_2 такие, что $C_1\beta \le -\log(1-\beta) \le C_2\beta$. Поэтому из (50) находим

$$\log D_n(f) - (n+1)\log G(f) \asymp G(f)\sum_{k=0}^{n}\sum_{\nu=k+1}^{\infty}|\varphi_\nu(0)|^2. \tag{51}$$

Теперь покажем, что в условиях теоремы

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{\nu=k+1}^{\infty}|\varphi_\nu(0)|^2 = O(n^{1-2\alpha}) \quad \text{при} \quad n\to\infty. \tag{52}$$

Из утверждения 1) Леммы 3 имеем

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}|\varphi_k(0)|^2 = O(n^{-2\alpha}) \quad \text{при} \quad n\to\infty. \tag{53}$$

Далее, полагая $a_k = |\varphi_k(0)|^2$, $\delta = 1$ и $\beta = 1-2\alpha$ получаем, что все условия Леммы 5 выполнены (из условия $0<\alpha<1/2$ следует $\delta > \beta > 0$). Следовательно, согласно этой лемме соотношение

$$\sum_{k=1}^{n}k|\varphi_k(0)|^2 = O(n^{1-2\alpha}) \quad \text{при} \quad n\to\infty \tag{54}$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\varphi_k(0)|^2 = O(n^{-2\alpha}) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{55}$$

Нетрудно проверить также и следующее равенство :

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{\nu=k+1}^{\infty} |\varphi_\nu(0)|^2 = \sum_{k=1}^{n} k|\varphi_k(0)|^2 + (n+1) \sum_{k=n+1}^{\infty} |\varphi_k(0)|^2. \tag{56}$$

Таким образом, из (54), (55) и (56) вытекает (52). Наконец, из (51) и (52) получаем (18). Теорема 6 доказана.

Доказательство Теоремы 7 : В силу (19) и (51) достаточно доказать, что

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{\nu=k+1}^{\infty} |\varphi_\nu(0)|^2 = o(n^{1-2\alpha}) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{57}$$

С этой целью заметим, что утверждение Леммы 5 остается в силе, если заменить O на o. Следовательно, полагая $a_k = |\varphi_k(0)|^2$, $\delta = 1$, $\beta = 1 - 2\alpha$ и используя эту новую версию Леммы 5, приходим к заключению, что соотношение

$$\sum_{k=1}^{n} k|\varphi_k(0)|^2 = o(n^{1-2\alpha}) \quad \text{при} \quad n \to \infty \tag{58}$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\varphi_k(0)|^2 = o(n^{-2\alpha}) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{59}$$

Следовательно, из (56), (58) и (59) вытекает (57). Теорема 7 доказана.

Для доказательства Теоремы 8 нам потребуется одна теорема Д. Сарасона, которая характеризует класс функций исчезающей средней осцилляции (VMO) (см. [25]). Для интегрируемой на $[-\pi, \pi]$ функции $\psi(\lambda)$ и для интервала $J \subset [-\pi, \pi]$ положим

$$\psi_J = \frac{1}{|J|} \int_J \psi(\lambda)\, d\lambda,$$

где $|J|$ — длина интервала J. Пусть далее

$$M_a(\psi) = \sup_{|J| \le a} \frac{1}{|J|} \int_J |\psi(\lambda) - \psi_J|\, d\lambda.$$

Определение 4. Класс (VMO) — это пространство тех функций $\psi(\lambda) \in \mathbf{L}_1[-\pi, \pi]$, для которых $M_1(\psi) < \infty$ и $M_0(\psi) = \lim_{a \to 0+} M_a(\psi) = 0$.

Для неотрицательной функции $h(\lambda)$, определенной на $[-\pi, \pi]$, и числа $a > 0$ положим

$$N_a(h) = \sup_{|J| \leq a} \frac{1}{|J|^2} \int_J h(\lambda)\, d\lambda \int_J \frac{1}{h(\lambda)}\, d\lambda. \tag{60}$$

Положим $N_0(h) \equiv \lim_{a \to 0} N_a(h)$. Очевидно, что $N_0(h)$ конечна, если и $h(\lambda)$ и $h^{-1}(\lambda)$ локально интегрируемы. По неравенству Шварца имеем $N_0(h) \geq 1$. Следующая теорема характеризует класс VMO в терминах величины $N_0(h)$ (см. [25], стр. 395).

Теорема 10 (Д. Сарасон). Пусть $\psi(\lambda) \in L_1[-\pi, \pi]$ такая, что $M_1(\psi) < \infty$. Тогда для того чтобы $\psi(\lambda)$ принадлежала классу VMO необходимо и достаточно, чтобы $N_0(e^{\psi}) = 1$.

Доказательство Теоремы 8 : Сперва докажем, что косинус минимального угла в пространстве $\mathbf{L}_2(f)$ между подпространствами $H^0_{-\infty}(f)$ и $H^{\infty}_1(f)$ положителен, т.е.

$$\rho_1(f) = \cos u_f(H^0_{-\infty}(f), H^{\infty}_1(f)) < 1.$$

Известно (см. [4], стр. 210), что $\mathbf{W}_p(1/p) \subset VMO$. Следовательно, в условиях теоремы имеем $\log f(\lambda) \in VMO$. Применяя теорему Сарасона для функции $\psi(\lambda) = \log f(\lambda)$ получим $N_0(f) = 1$. Поэтому, согласно (60) имеем

$$\frac{1}{|J|^2} \int_J f(\lambda)\, d\lambda \int_J \frac{1}{f(\lambda)}\, d\lambda < \infty.$$

Таким образом, функция $f(\lambda)$ удовлетворяет условию Маккенхаупта (6). Отсюда, в силу Леммы 4 получаем $\rho_1(f) < 1$.

Теперь покажем, что из условия $\log f(\lambda) \in \mathbf{W}_p(1/p)$ $(p \geq 2)$ следует соотношение

$$\left\| \frac{\bar{g}_1}{g_1} - Q_n \right\|_2^2 = O(n^{-2/p}) \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{61}$$

где $g_1(\lambda)$ – функция Сеге, соответствующая $1/f(\lambda)$, а Q_n – многочлен наилучшего приближения функции $\bar{g}_1(\lambda) g_1^{-1}(\lambda)$ в метрике пространства $\mathbf{L}_2$. Так как функция $\log f(\lambda)$ принадлежит пространству $\mathbf{W}_p(1/p)$, $p \geq 2$, по Теореме 7 из [24] ее коэффициенты Фурье d_k необходимо удовлетворяют условию

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^{2/p} |d_k|^2 < \infty.$$

Следовательно

$$\sum_{|k| \geq n} |d_k|^2 = O(n^{-2/p}) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{62}$$

Действуя как и в доказательстве утверждения 1) Леммы 1, из (62) получаем (61). Далее, рассуждая как и в доказательстве утверждения 1) Леммы 3, из (61) и $\rho_1(f) < 1$, получаем

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\varphi_k(0)|^2 = O(n^{-2/p}) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Оставшаяся часть доказательства повторяет доказательство Теоремы 6. Теорема 8 доказана.

Для доказательства Теоремы 9 нам понадобится следующее утверждение, вытекающее из одного результата А. Ленарда [22] (см., также [9]).

Лемма 6. Пусть функции $f(\lambda)$ и $h(\lambda)$ связаны соотношением (7), где $Q_m(z)$ ($|Q_m(0)| = 1$) — тригонометрический многочлен степени m с корнями на единичной окружности $|z| = 1$. Тогда имеет место соотношение

$$\log D_n(f) - \log D_{n+m}(h) = O(\log n) \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{63}$$

где $D_n(f)$ и $D_{n+m}(h)$ — теплицевы определители, порожденные функциями $f(\lambda)$ и $h(\lambda)$ соответственно.

Доказательство Теоремы 9 : Покажем, что утверждения a) – c) следуют из Теорем 6 – 8 и Леммы 6. Действительно, из (21) имеем

$$R_n(f,h) = \log D_n(f) - \frac{n+1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log h(\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \left[\log D_{n+m}(h) - \frac{n+1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log h(\lambda)\, d\lambda\right] + [\log D_n(f) - \log D_{n+m}(h)]. \tag{64}$$

По Лемме 6 второе слагаемое в правой части (64) при $n \to \infty$ имеет порядок $O(\log n)$. Следовательно, утверждения a) – c) вытекают из (64) и Теорем 6 – 8 соответственно. Теорема 9 доказана.

§4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1 – 4

Доказательство Теоремы 1 : Пусть $\{\varphi_k(z)\}$ ($k = 0, 1, \ldots$) — система ортогональных многочленов на единичной окружности, соответствующих как и в §3 спектральной плотности $f(\lambda)$. Известно (см. [13], стр. 227), что

$$\sigma_T^2 = \frac{D_T(f)}{D_{T-1}(f)} = \left[\sum_{k=0}^{T} |\varphi_k(0)|^2\right]^{-1}, \tag{65}$$

где $D_T(f)$ – теплицев определитель, порожденный с.п. $f(\lambda)$. Из (2), (13) и (48) следует, что

$$\sigma^2 = \left[\sum_{k=0}^{\infty} |\varphi_k(0)|^2\right]^{-1}. \tag{66}$$

Согласно (3), (65) и (66) получаем

$$\delta_T = \left[\sum_{k=0}^{T} |\varphi_k(0)|^2\right]^{-1} - \left[\sum_{k=0}^{\infty} |\varphi_k(0)|^2\right]^{-1} = \sigma^2\sigma_T^2 \sum_{k=T+1}^{\infty} |\varphi_k(0)|^2 \le \sigma_0^4 \sum_{k=T+1}^{\infty} |\varphi_k(0)|^2, \tag{67}$$

где $\sigma_0 = |\varphi_0(0)|^{-2}$. Используя утверждение 1) Леммы 3 находим

$$\sum_{k=T+1}^{\infty} |\varphi_k(0)|^2 = O(T^{-2\alpha}) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{68}$$

Таким образом, утверждение Теоремы 1 следует из (67) и (68). Теорема 1 доказана.

Доказательство Теоремы 2 : Из утверждения 2) Леммы 3 имеем

$$\sum_{k=T+1}^{\infty} |\varphi_k(0)|^2 = o(T^{-2\alpha}) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{69}$$

Следовательно, требуемое утверждение следует из (67) и (69). Теорема 2 доказана.

Доказательство Теоремы 3 : Рассуждая как и в доказательстве Теоремы 8 получаем

$$\sum_{k=T+1}^{\infty} |\varphi_k(0)|^2 = O(T^{-2/p}) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{70}$$

Следовательно, требуемое утверждение вытекает из (67) и (70). Теорема 3 доказана.

Доказательство Теоремы 4 : Докажем утверждение а). В силу (67), достаточно показать, что

$$\sum_{k=T+1}^{\infty} |\varphi_k(f;0)|^2 = O(T^{-2\alpha}) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{71}$$

Так как $f(\lambda)$ имеет вид (7) с $h(\lambda) \in \mathcal{A}_2$ и $\log h(\lambda) \in \mathbf{H}_p(\alpha)$, $p \ge 2$, $0 < \alpha < 1/2$, то применяя утверждение а) Теоремы 9, с учетом (21) получаем

$$\log D_T(f) - (T+1)\log G(h) = O(T^{1-2\alpha}) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{72}$$

Принимая во внимание равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|Q_m(e^{i\lambda})|^2\,d\lambda = 0,$$

из (7) и (72) получаем

$$\log D_T(f) - (T+1)\log G(f) = O(T^{1-2\alpha}) \quad \text{при} \quad T\to\infty. \tag{73}$$

Следовательно, из (51) и (73) вытекает

$$\sum_{k=0}^{T}\sum_{\nu=k+1}^{\infty}|\varphi_\nu(f;0)|^2 = O(T^{1-2\alpha}) \quad \text{при} \quad T\to\infty. \tag{74}$$

Так как последовательность $a_T = \sum_{k=T+1}^{\infty}|\varphi_k(f;0)|^2$ удовлетворяет условиям $a_T > 0$ и $a_T > a_{T+1}$, получаем

$$\sum_{k=T+1}^{\infty}|\varphi_\nu(f;0)|^2 \le \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{T}\sum_{\nu=k+1}^{\infty}|\varphi_\nu(f;0)|^2. \tag{75}$$

Из (74) и (75) следует (71). Этим завершается доказательство утверждения a). Утверждения b) и c) можно доказать аналогично. Теорема 4 доказана.

ABSTRACT. Let $X(t)$, $t = 0, \pm1, \ldots$, be a wide sense stationary random sequence with spectral density function $f(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$. Let σ_T^2 be the mean square prediction error for the variable $X(0)$ by linear forms in the variables $X(-T), \ldots, X(-1)$, and let $\sigma^2 = \sigma_\infty^2$. The paper investigates the rate of decrease to zero of $\delta_T = \sigma_T^2 - \sigma^2$ as $T\to\infty$, depending on the properties of spectral density function $f(\lambda)$. It is shown that for $0 < \gamma < 1/2$ and $T\to\infty$ the estimates $\delta_T = O(T^{-\gamma})$ or $\delta_T = o(T^{-\gamma})$ are possible for sufficiently broad classes of spectral densities under certain restrictions on the types of their zeros. The paper also contains a related study of the asymptotic behavior of Toeplitz determinants $D_n(f)$ generated by the function $f(\lambda)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Ахиезер, Лекции по Теории Аппроксимации, Наука, Москва, 1965.
2. G. Baxter, "An asymptotic result for the finite predictor", Math. Scand., vol. 10, pp. 137 – 144, 1962.
3. R. P. Boas, Integrability Theorems for Trigonometric Transforms. Springer-Verlag, New York, 1967.
4. N. Brezis, L. Nirenberg, "Degree theory and BMO ; Part I : Compact manifolds without boundaries", Selecta Mathematica, New Series, vol. 1, no. 2, pp. 197 – 263, 1995.
5. A. Devinatz, "The strong Szegö theorem", Illinois J. Math., vol. 11, pp. 160 – 175, 1967.
6. G. Freud, Orthogonal Polynomials, Pergamon Press, New York, 1971.

7. Я. Л. Геронимус, "Об одной задаче Г. Сеге, М. Каца, Г. Бакстера и Дж. Гиршмана", Изв. АН СССР, сер. Математика, том 31, стр. 289 – 304, 1967.
8. М. С. Гиновян, "Асимптотическое поведение теплицева определителя", Записки Научных Семинаров ЛОМИ, том 97, стр. 22 – 31, 1980.
9. М. С. Гиновян, "Асимптотическое поведение логарифма функции правдоподобия при наличии полиномиальных нулей спектральной функции", Записки Научных Семинаров ЛОМИ, том 108, стр. 5 – 21, 1981.
10. M. S. Ginovian, "On asymptotic behavior of Toeplitz determinants", in Theory of Functions and Application (Collection of Works Dedicated to the Memory of M. M. Djrbashian), pp. 57 – 60, Yerevan, 1995.
11. Б. Л. Голинский, "Об асимптотическом поведении ошибки прогноза", Теория Вероятн. и ее Примен., том 19, № 4, стр. 724 – 739, 1974.
12. Б. Л. Голинский, И. А. Ибрагимов, "О предельной теореме Г. Сеге", Изв. АН СССР, сер. Математика, том 35, стр. 408 – 427, 1971.
13. У. Гренандер, Г. Сеге, Теплицевы Формы и их Применения, Иностр. Лит., Москва, 1961.
14. U. Grenander, M. Rosenblatt, "An extension of a theorem of G. Szegö and its application to the study of stochastic processes", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 76, pp. 112 – 126, 1954.
15. I. I. Hirschman, "The strong Szegö limit theorem for Toeplitz determinants", Amer. J. Math., vol. 88, pp. 577 – 614, 1966.
16. R. A. Hunt, B. Muckenhoupt, R. L. Wheeden, "Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 176, pp. 227 – 251, 1973.
17. И. А. Ибрагимов, "Об асимптотическом поведении ошибки прогноза", Теория Вероятн. и ее Примен., том 9, № 4, стр. 695 – 703, 1964.
18. И. А. Ибрагимов, "Об одной теореме Г. Сеге", Мат. Заметки, том 3, № 6, стр. 693 – 703, 1968.
19. И. А. Ибрагимов, "Об условии информационной регулярности для стационарных гауссовских процессов", Проблемы Передачи Информации, том 5, № 3, стр. 8 – 21, 1969.
20. И. А. Ибрагимов, Ю. А. Розанов, Гауссовские Случайные Процессы, Наука, Москва, 1970.
21. И. А. Ибрагимов, В. Н. Солев, "Асимптотическое поведение ошибки прогноза стационарной последовательности со спектральной плотностью специального вида", Теория Вероятн. и ее Примен., том 13, № 4, стр. 746 – 750, 1968.
22. A. Lenard, "Some remarks on large Toeplitz determinants", Pacific Journal of Math., vol. 42, no. 1, pp. 137 – 145, 1972.
23. Н. К. Никольский, Лекции об Операторе Сдвига, Наука, Москва, 1980.
24. М. К. Потапов, "О коэффициентах Фурье", В сб. Исследов. по Совр. Проблемам Констр. Теории Функций, АН Аз.ССР, Баку, стр. 475 – 473, 1965.
25. D. Sarason, "Functions of vanishing mean oscillation", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 207, pp. 286 – 299, 1973.
26. А. Ф. Тиман, Теория Приближения Функций Действительного Переменного, Физ.Мат ГИЗ., Москва, 1960.

2 Декабря 1998

Институт математики
Национальной Академии Наук Армении
E-mail : mamgin@instmath.sci.am