

ГРУБАЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ НА ПЛОСКОСТИ

Р. В. Амбарцумян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 1, 1999

В статье рассмотрена задача "грубой дифференцируемости" гауссовского случайного поля $\xi(Q)$, $Q \in \mathbb{R}^2$. Доказано, что однородные гауссовские поля т.н. "класса Райса" грубо дифференцируемы только в случае, когда функция Райса является опорной функцией эллипса. В этом случае случайное пространственное направление Ω , нормальное к плоскости, касательной к $\xi(Q)$ в точке O , оказывается независимым от $\xi(O)$. Найден точный вид плотности распределения для Ω . Этот результат дает возможность вычисления интенсивности точечного процесса пересечений фиксированной горизонтальной прямой уровня z со случайной поверхностью $\xi(Q)$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

В статье рассмотрена задача "грубой дифференцируемости" гауссовских случайных полей определенных в $\mathbb{R}^2$. Прежде чем дать соответствующее определение рассмотрим случайные процессы на $\mathbb{R}$.

Пусть $\xi(Q)$ — случайный процесс на $\mathbb{R}$. Точку в $\mathbb{R}$ где мы изучаем дифференцируемость, отождествляем с началом координат и обозначаем через O . Для точки $Q \in \mathbb{R}$ с одномерной координатой u , пусть $f_Q(y|x)$ есть условная плотность распределения случайной величины $u^{-1}(\xi(Q) - x)$, при условии $\xi(O) = x$.

Определение 1. Если для каждого y существует предел

$$F(y|x) = \lim_{u \rightarrow 0} f_Q(y|x), \quad (1)$$

являющийся плотностью распределения по переменной y , то будем говорить, что $\xi(Q)$ грубо дифференцируем в точке O на уровне x . Случайная величина $\lim_{u \rightarrow 0} u^{-1}(\xi(Q_1) - x)$, имеющая плотность распределения удовлетворяющую (1), будем называть грубой производной для $\xi(Q)$ в точке O на уровне x .

Для гауссовского случайного процесса $\xi(Q)$ на $\mathbb{R}$ свойство грубой дифференцируемости можно легко доказать при следующем дополнительном предположении на корреляционную функцию :

$$E\xi(O)\xi(Q) = 1 - h^2 u^2 + o(u^2), \quad u \rightarrow 0, \quad (2)$$

где коэффициент h не зависит от u . Мы называем (2) условием Райса (см. [1]). Опираясь на описанный подход можно определить грубую дифференцируемость случайного поля $\xi(Q)$ в $\mathbb{R}^d$. Для $d = 2$ имеем следующее определение. Через $g(\phi)$ обозначим прямую направления ϕ , содержащую начало координат $O \in \mathbb{R}^2$.

В $\mathbb{R}^2$ мы будем использовать псевдополярные координаты $Q = (\phi, u)$: азимут ϕ определяется из условия $Q \in g(\phi)$, а u — одномерная координата на $g(\phi)$, которую естественно назвать "расстоянием со знаком" из O . Таким образом, $\phi \in (0, \pi)$ и $u \in (\infty, -\infty)$.

Будем говорить, что n точек $Q_1 = (\phi_1, u_1), \dots, Q_n = (\phi_n, u_n)$ сходятся к O гомотетично, если азимуты $\phi_1, \dots, \phi_n$ остаются фиксированными для некоторых ненулевых постоянных $k_1, \dots, k_n$:

$$u_1 = k_1 v, \quad u_2 = k_2 v, \quad \dots, \quad u_n = k_n v, \quad (3)$$

и при этом $v \rightarrow 0$.

Определение 2. Для уровня $x \in (-\infty, \infty)$, азимута $\phi \in (0, \pi)$ и $y \in (-\infty, \infty)$ обозначим через $H(x, \phi, y) \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ прямую, проходящую через точку (O, x) , проекция которой на горизонтальную плоскость есть $g(\phi)$ и $\text{tg}(\text{угол над горизонтом}) = y$. Будем говорить, что случайное поле $\xi(Q)$, определенное в $\mathbb{R}^2$ грубо дифференцируемо в начале координат O на уровне x , если выполнены следующие три условия :

Существование $P_{n,x}$: Для любого конечного множества азимутов $\phi_1, \dots, \phi_n$, условная совместная плотность распределения случайных величин $u_1^{-1}[\xi(Q_1) - x], \dots, u_n^{-1}[\xi(Q_n) - x]$, при условии $\xi(O) = x$, имеет предельное распределение вероятностей $P_{n,x}$, когда $Q_1, \dots, Q_n$ гомотетично стремятся к точке O вдоль радиальных направлений $\phi_1, \dots, \phi_n$.

Согласованность : Предел $P_{n,x}$ не зависит от выбора начальных точек $Q_1, \dots, Q_n$, соответствующих $v = 1$.

Существование касательной плоскости : Пусть $l(\phi_1), \dots, l(\phi_n)$ — случайные величины, обладающие совместным распределением $P_{n,x}$. Для каждого $n > 1$ прямые $H(x, \phi_1, l(\phi_1)), \dots, H(x, \phi_n, l(\phi_n))$, с вероятностью $P_{n,x} = 1$, принадлежат одной и той же плоскости T , последняя интерпретируется как случайная касательная плоскость.

Замечание. Если случайная плоскость T существует, то она necessarily содержит точку (O, x) , таким образом, только ориентация плоскости T является случайной. Случайную ориентацию плоскости T можно описать (случайным) пространственным направлением Ω , нормальным к T . Из грубой дифференцируемости следует, что вероятностное распределение направления Ω не зависит от выбора азимутов $\phi_1, \dots, \phi_n$. В частности, зная $P_{2,x}$ для всяких двух азимутов $\phi_1 \neq \phi_2$, можно вычислить плотность распределения направления Ω .

Определение 3. Случайное гауссовское поле $\xi(Q)$, определенное в $\mathbb{R}^2$, удовлетворяет условию Райса для плоскости, если существует некоторая функция (функция Райса) $h(\phi) > 0$, зависящая от азимута $\phi \in (0, \pi)$ такая, что имеет место асимптотическая формула

$$E\xi(O)\xi(Q) = 1 - h^2(\phi)u^2 + o(u^2), \quad (4)$$

причем $Q = (\phi, u)$ стремится к точке O вдоль прямой $g(\phi)$.

Этот класс не пуст, так как он содержит однородные гауссовские поля с эллиптико-экспоненциальной ковариационной функцией (см. пример, приведенный ниже). В этой статье показано, что в классе Райса однородные гауссовские поля грубо не дифференцируемы, за исключением случая, когда $h(\phi)$ — опорная функция эллипса (эллиптическая $h(\phi)$). В этом случае случайное пространственное направление Ω не зависит от $\xi(O)$, и для плотности распределения направления Ω найдена точная формула. Неожиданный результат касающийся эллиптичности функции $h(\phi)$, естественно приводит к задаче, сформулированной в конце статьи.

Мы определим случайную плоскость T с помощью условия прохождения случайной поверхности через "вертикальное окно", т.е. интервал $(x, x + dx)$, помещенный на вертикальную ось с основанием O . Действительно, применение условия $\{\xi(O) = x\}$ при вычислении $P_{n,x}$ состоит из двух последовательных операций : 1) применение условия $\{\xi(O) \in (x, x + dx)\}$ и 2) вычисление предела при $dx \rightarrow 0$.

Условие прохождения случайной поверхности через "горизонтальное окно" на уровне z также представляет интерес. Этому соответствует прохождение кривой уровня через узкое окно dl , помещенное в горизонтальной плоскости на уровне z . Соответствующее событие запишем как $\{\xi(Q) \text{ hits } dl\}$. Мы покажем, что плотность распределения для Ω , соответствующая условию $\{\xi(Q) \text{ hits } dl\}$, можно вычислить достаточно простым интегрированием. В однородном гауссовском случае, таким путем получается выражение для интенсивности точечного процесса пересечений случайной поверхности с горизонтальной прямой произвольного уровня и направления.

§2. АНАЛИЗ

Пусть $\xi(Q)$ — гауссовский процесс в $\mathbb{R}^2$. Для простоты положим, что $\xi(Q)$ однороден, и $E\xi(Q) = 0$, $\text{Var}\xi(Q) = 1$. Мы также предполагаем, что $\xi(Q)$ удовлетворяет условию Райса для плоскости.

Пример : эллиптико-экспоненциальные ковариационные функции. Известно, что функция $\exp[-c^2 x^2]$, где $c \neq 0$ — постоянная, а $x \in \mathbb{R}$ является ковариационной функцией гауссовского процесса на $\mathbb{R}$. Следовательно, по Теореме Бохнера-Хинчина, $\exp[-a^2 x^2 - b^2 y^2]$ является корреляционной функцией однородного гауссовского процесса в $\mathbb{R}^2$, заданного в декартовых координатах x, y .

В координатах ϕ, u эта функция имеет вид $\rho_\phi(u) = \exp[-h^2(\phi)u^2]$, причем

$$h^2(\phi) = a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi. \quad (5)$$

В общем случае эллиптическая функция Райса зависит также и от угла поворота $\alpha \in [0, \pi)$, т.е. :

$$h^2(\phi) = a^2 \sin^2(\phi - \alpha) + b^2 \cos^2(\phi - \alpha). \quad (6)$$

Отметим, что (6) является "опорной функцией" эллипса [2].

Пусть точки $Q_1 = (\phi_1, u_1), \dots, Q_n = (\phi_n, u_n)$ стремятся к O гомотетично.

Совместная плотность распределения случайных величин $\xi(O), u_1^{-1}[\xi(Q_1) - \xi(O)], \dots, u_n^{-1}[\xi(Q_n) - \xi(O)]$ есть многомерная нормальная плотность с ковариационной матрицей C_n . Ее запишем в терминах функций $\rho_i(x)$ и $\rho_{ij}(x, y)$:

$$\rho_i(u_i) = E\xi(O)\xi(Q_i) \quad \text{и} \quad \rho_{ij}(u_i, u_j) = E\xi(Q_i)\xi(Q_j),$$

так что $\rho_{ij}(x, y) = \rho_{ji}(y, x)$ и для любого $j \neq i$ имеем $\rho_i(x) = \rho_{ij}(x, 0)$. Обозначая $\gamma = \rho_{1n}(u_1, u_n)$, имеем

$$C_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\rho_1(u_1) - 1}{u_1} & \dots & \frac{\rho_n(u_n) - 1}{u_n} \\ \frac{\rho_1(u_1) - 1}{u_1} & \frac{2 - 2\rho_1(u_1)}{u_1^2} & \dots & \frac{\gamma - \rho_1(u_1) - \rho_n(u_n) + 1}{u_1 u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\rho_n(u_n) - 1}{u_n} & \frac{\gamma - \rho_1(u_1) - \rho_n(u_n) + 1}{u_1 u_n} & \dots & \frac{2 - 2\rho_n(u_n)}{u_n^2} \end{pmatrix}$$

Так как точки $Q_1, \dots, Q_n$ стремятся к O гомотетично, то легко найти предел матрицы C_n . Из условия Райса получаем

$$\lim_{u_i \rightarrow 0} \frac{\rho_i(u_i) - 1}{u_i} = 0. \quad (7)$$

Рассмотрим предел

$$A_{ij} = \lim_{u_i, u_j \rightarrow 0} \frac{\rho_{ij}(u_i, u_j) - \rho_i(u_i) - \rho_j(u_j) + 1}{u_i u_j}.$$

Обозначая через ϕ_{ij} направление отрезка Q_i, Q_j , а через u_{ij} его длину, используя $u_i = k_i v$ и $u_j = k_j v$, находим $u_{ij}^2 = v^2[k_i^2 + k_j^2 + 2k_i k_j \cos(\phi_i - \phi_j)]$. Следовательно

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{-h^2(\phi_{ij})u_{ij}^2 + h^2(\phi_i)u_i^2 + h^2(\phi_j)u_j^2}{u_i u_j} = \\ &= \frac{(-h^2(\phi_{ij}) + h^2(\phi_i))k_i^2 + (-h^2(\phi_{ij}) + h^2(\phi_j))k_j^2 + 2k_i k_j h^2(\phi_{ij}) \cos(\phi_i - \phi_j)}{k_i k_j} = \\ &= h^2(\phi_{ij}) \left[2 \cos(\phi_i - \phi_j) - \frac{k_i}{k_j} - \frac{k_j}{k_i} \right] + h^2(\phi_i) \frac{k_i}{k_j} + h^2(\phi_j) \frac{k_j}{k_i}. \end{aligned} \quad (8)$$

Нетрудно проверить, что

$$k_i/k_j = \frac{\sin(\phi_{ij} - \phi_j)}{\sin(\phi_{ij} - \phi_i)}. \quad (9)$$

Обозначая матрицу $\|A_{ij}\|$ через A_n , предел матрицы C_n можно записать в виде

$$\lim C_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_n \end{pmatrix}.$$

Согласно теории многомерных гауссовских распределений существование вероятностного распределения $P_{n,x}$ следует из существования предельной матрицы A_n . В нашем случае $P_{n,x} = P_n$ не зависит от x . Прежде чем перейти к рассмотрению условия согласованности, докажем следующую лемму.

Лемма 1. Для функций

$$h^2(\phi) = \cos^2 \phi, \quad h^2(\phi) = \sin^2 \phi \quad \text{и} \quad h^2(\phi) = \cos \phi \sin \phi,$$

числа A_{ij} соответственно равны

$$2 \cos \phi_i \cos \phi_j, \quad 2 \sin \phi_i \sin \phi_j \quad \text{и} \quad \cos \phi_i \sin \phi_j + \sin \phi_i \cos \phi_j.$$

Доказательство : Удобно переписать (9) в виде

$$A_{ij} = (-h^2(\phi_{ij}) + h^2(\phi_i)) \frac{k_i}{k_j} + (-h^2(\phi_{ij}) + h^2(\phi_j)) \frac{k_j}{k_i} + 2h^2(\phi_{ij}) \cos(\phi_i - \phi_j). \quad (10)$$

В первом случае имеем

$$-h^2(\phi_{ij}) + h^2(\phi_i) = (-\cos^2 \phi_{ij} + \cos^2 \phi_i) = \sin(\phi_{ij} - \phi_i) \sin(\phi_{ij} + \phi_i),$$

$$-h^2(\phi_{ij}) + h^2(\phi_j) = (-\cos^2 \phi_{ij} + \cos^2 \phi_j) = \sin(\phi_{ij} - \phi_j) \sin(\phi_{ij} + \phi_j).$$

Подставляя в (10), получаем

$$\begin{aligned} A_{ij} = 2 [& -\cos^2 \phi_{ij} \sin \phi_i \sin(\phi_j) + \sin^2 \phi_{ij} \cos \phi_i \cos(\phi_j) + \\ & + \cos(\phi_j - \phi_i) \cos^2 \phi_{ij}] = 2 \cos \phi_i \cos \phi_j. \end{aligned} \quad (11)$$

Результат для $h^2(\phi) = \sin^2 \phi$ можно получить из (11), подставляя $\frac{\pi}{2} - \phi$ вместо ϕ . Получаем

$$A_{ij} = 2 \sin \phi_i \sin \phi_j. \quad (12)$$

В третьем случае

$$-h^2(\phi_{ij}) + h^2(\phi_i) = \cos \phi_i \sin \phi_i - \cos \phi_{ij} \sin \phi_{ij} = \frac{1}{2} [\sin 2\phi_i - \sin 2\phi_{ij}],$$

$$-h^2(\phi_{ij}) + h^2(\phi_j) = \cos \phi_j \sin \phi_j - \cos \phi_{ij} \sin \phi_{ij} = \frac{1}{2} [\sin 2\phi_j - \sin 2\phi_{ij}].$$

Следовательно

$$\begin{aligned} A_{ij} = & \frac{1}{2} [\sin 2\phi_i - \sin 2\phi_{ij}] \frac{\sin(\phi_{ij} - \phi_j)}{\sin(\phi_{ij} - \phi_i)} + \frac{1}{2} [\sin 2\phi_j - \sin 2\phi_{ij}] \frac{\sin(\phi_{ij} - \phi_i)}{\sin(\phi_{ij} - \phi_j)} + \\ & + 2 \sin \phi_{ij} \cos \phi_{ij} \cos(\phi_i - \phi_j). \end{aligned}$$

Преобразуя выражения в квадратных скобках и проводя сокращения, получаем

$$\begin{aligned} A_{ij} = & -\cos(\phi_{ij} + \phi_i) \sin(\phi_{ij} - \phi_j) - \cos(\phi_{ij} + \phi_j) \sin(\phi_{ij} - \phi_i) + \\ & + 2 \sin \phi_{ij} \cos \phi_{ij} \cos(\phi_i - \phi_j) = \\ = & [-\cos \phi_{ij} \cos \phi_i + \sin \phi_{ij} \sin \phi_i] [\sin \phi_{ij} \cos \phi_j - \cos \phi_{ij} \sin \phi_j] + \\ & + [-\cos \phi_{ij} \cos \phi_j + \sin \phi_{ij} \sin \phi_j] [\sin \phi_{ij} \cos \phi_i - \cos \phi_{ij} \sin \phi_i] + \\ & + 2 \sin \phi_{ij} \cos \phi_{ij} \cos(\phi_i - \phi_j). \end{aligned}$$

После раскрытия скобок члены, содержащие произведение $\cos \phi_i, \sin \phi_i, \cos \phi_j, \sin \phi_j$ сокращаются, поэтому предыдущее выражение принимает вид

$$A_{ij} = \cos^2 \phi_{ij} \cos \phi_i \sin \phi_j + \sin^2 \phi_{ij} \sin \phi_i \cos \phi_j + \cos^2 \phi_{ij} \sin \phi_i \cos \phi_j + \sin^2 \phi_{ij} \cos \phi_i \sin \phi_j = \cos \phi_i \sin \phi_j + \sin \phi_i \cos \phi_j. \quad (13)$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Если имеет место свойство Согласованности (см. введение), то функция Райса $h^2(\phi)$ необходимо эллиптична :

$$h^2(\phi) = a^2 \cos^2(\phi - \alpha) + b^2 \sin^2(\phi - \alpha). \quad (14)$$

Доказательство : Для гауссовского процесса $\xi(Q)$, свойство Согласованности имеет место тогда и только тогда, когда A_{ij} не зависят от ϕ_{ij} . В (8) выберем $\phi_i = 0$ и $\phi_j = \frac{\pi}{2}$. Имеем $k_i/k_j = -\cot \phi_{ij}$, и область возможных значений функции ϕ_{ij} является $(\pi/2, \pi)$. Условие, что A_{ij} как функция $\phi_{ij} \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ является постоянной C_1 , запишется в виде

$$h^2(\phi)[\cot \phi + \tan \phi] - a^2 \cot \phi - b^2 \tan \phi = C_1,$$

где $a^2 = h^2(0)$, $b^2 = h^2(\frac{\pi}{2})$ и вместо ϕ_{ij} мы использовали ϕ . Следовательно, на интервале $(\pi/2, \pi)$ необходимо имеем

$$h^2(\phi) = \frac{C_1 + a^2 \cot \phi + b^2 \tan \phi}{\cot \phi + \tan \phi} = C_1 \cos \phi \sin \phi + a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi. \quad (15)$$

Выбирая $\phi_j = \pi$, $\phi_i = \frac{\pi}{2}$ и действуя аналогично, получаем следующее представление функции $h^2(\phi)$ на интервале $(0, \frac{\pi}{2})$:

$$h^2(\phi) = C_2 \cos \phi \sin \phi + a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi, \quad (16)$$

где C_2 — некоторая константа.

Таким образом, для $\phi \in (0, \pi)$ функция $h^2(\phi)$ необходимо имеет тригонометрическую форму (15) — (16), зависящую от четырех параметров a, b, C_1, C_2 .

Используя линейность и Лемму 1, из (15) — (16) получаем

$$A_{ij} = 2a^2 \cos \phi_i \cos \phi_j + 2b^2 \sin \phi_i \sin \phi_j + C(\phi_{ij})[\cos \phi_i \sin \phi_j + \sin \phi_i \cos \phi_j].$$

Если ϕ_i и ϕ_j принадлежат внутренности интервала $(0, \frac{\pi}{2})$, то $C(\phi_{ij}) = C_1$ для $\phi_{ij} \in (\pi, \frac{\pi}{2})$ и $C(\phi_{ij}) = C_2$ для $\phi_{ij} \in (\frac{\pi}{2}, \max(\phi_i, \phi_j))$. Функция $C(\phi_{ij})$ является

константой лишь при $C_1 = C_2 = C$, т.е. когда $h^2(\phi) = C \cos \phi \sin \phi + a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi$.

Эта квадратичная форма от переменных $\sin \phi$ и $\cos \phi$ должна быть неотрицательной. Это приводит к представлению (14), где a и b суть константы, вообще говоря $a \neq b$, причем $\alpha \in (0, \pi)$. Представление (14) имеет вид опорной функции эллипса с главными полуосями a^{-1} и b^{-1} , повернутого на угол α (см. [4]). Лемма 2 полностью доказана.

Теорема 1. Однородное случайное гауссовское поле на плоскости $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющее плоскому условию Райса грубо дифференцируемо тогда и только тогда, когда функция $h(\phi)$ в выражении (5) имеет эллиптический вид (14).

Доказательство : Необходимость была доказана в Лемме 2. Из Леммы 1 следует, что эллиптическая форма функции $h(\phi)$ влечет свойство Согласованности. Остается доказать, что из эллиптичности функции $h(\phi)$ следует существование касательной плоскости. Рассмотрим A_3 (см. (8)). Не умаляя общности предположим, что $\alpha = 0$. Используя Лемму 1 и представление (14), получаем (здесь используем обозначения $\gamma_i = \sin \phi_i$ и $\beta_i = \cos \phi_i$, $i = 1, 2, 3$)

$$A_3 = \begin{pmatrix} a^2 \gamma_1^2 + b^2 \beta_1^2 & a^2 \gamma_1 \gamma_2 + b^2 \beta_1 \beta_2 & a^2 \gamma_1 \gamma_3 + b^2 \beta_1 \beta_3 \\ a^2 \gamma_1 \gamma_2 + b^2 \beta_1 \beta_2 & a^2 \gamma_2^2 + b^2 \beta_2^2 & a^2 \gamma_2 \gamma_3 + b^2 \beta_2 \beta_3 \\ a^2 \gamma_1 \gamma_3 + b^2 \beta_1 \beta_3 & a^2 \gamma_2 \gamma_3 + b^2 \beta_2 \beta_3 & a^2 \gamma_3^2 + b^2 \beta_3^2 \end{pmatrix}$$

Убедимся, что $\det A_3 = 0$. Для этого представим $\det A_3$ в виде суммы 8 детерминантов, содержащих только столбцы из $\cos$ и $\sin$. Например, детерминант содержащий только столбцы $\sin, \sin, \cos$ имеет вид

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a^2 \sin^2 \phi_1 & a^2 \sin \phi_1 \sin \phi_2 & b^2 \cos \phi_1 \cos \phi_3 \\ a^2 \sin \phi_1 \sin \phi_2 & a^2 \sin^2 \phi_2 & b^2 \cos \phi_2 \cos \phi_3 \\ a^2 \sin \phi_1 \sin \phi_3 & a^2 \sin \phi_2 \sin \phi_3 & b^2 \cos^2 \phi_3 \end{pmatrix} = \\ = a^2 \sin \phi_1 a^2 \sin \phi_2 b^2 \cos \phi_3 \det \begin{pmatrix} \sin \phi_1 & \sin \phi_1 & \cos \phi_1 \\ \sin \phi_2 & \sin \phi_2 & \cos \phi_2 \\ \sin \phi_3 & \sin \phi_3 & \cos \phi_3 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Так как этот результат вытекает из комбинаторной структуры, которая остается в силе для матриц A_n для всех порядков $n > 2$, то приходим к следующему заключению :

$$\det A_n = 0 \text{ для всех } n > 2. \quad (18)$$

Так как $\det A_3 = 0$, то одна из строчек (скажем третья) является линейной комбинацией двух других. Получаем следующие уравнения :

$$A[a^2 \sin^2 \phi_1 + b^2 \cos^2 \phi_1] + B[a^2 \sin \phi_1 \sin \phi_2 + b^2 \cos \phi_1 \cos \phi_2] = \\ = a^2 \sin \phi_1 \sin \phi_3 + b^2 \cos \phi_1 \cos \phi_3,$$

$$A[a^2 \sin \phi_1 \sin \phi_2 + b^2 \cos \phi_1 \cos \phi_2] + B[a^2 \sin^2 \phi_2 + b^2 \cos^2 \phi_2] = \\ = a^2 \sin \phi_2 \sin \phi_3 + b^2 \cos \phi_2 \cos \phi_3.$$

Эти уравнения легко решаются. Каждую из величин A и B можно найти в виде отношения квадратических форм от величин a^2 и b^2 :

$$A = [(a^2 \sin \phi_2 \sin \phi_3 + b^2 \cos \phi_2 \cos \phi_3)(a^2 \sin \phi_1 \sin \phi_2 + b^2 \cos \phi_1 \cos \phi_2) - \\ - (a^2 \sin \phi_1 \sin \phi_3 + b^2 \cos \phi_1 \cos \phi_3)(a^2 \sin^2 \phi_2 + b^2 \cos^2 \phi_2)] \cdot [(a^2 \sin \phi_1 \sin \phi_2 + \\ + b^2 \cos \phi_1 \cos \phi_2)^2 - (a^2 \sin^2 \phi_1 + b^2 \cos^2 \phi_1)(a^2 \sin^2 \phi_2 + b^2 \cos^2 \phi_2)]^{-1},$$

$$B = [(a^2 \sin \phi_1 \sin \phi_3 + b^2 \cos \phi_1 \cos \phi_3)(a^2 \sin \phi_1 \sin \phi_2 + b^2 \cos \phi_1 \cos \phi_2) - \\ - (a^2 \sin \phi_2 \sin \phi_3 + b^2 \cos \phi_2 \cos \phi_3)(a^2 \sin^2 \phi_1 + b^2 \cos^2 \phi_1)] \cdot [(a^2 \sin \phi_1 \sin \phi_2 + \\ + b^2 \cos \phi_1 \cos \phi_2)^2 - (a^2 \sin^2 \phi_1 + b^2 \cos^2 \phi_1)(a^2 \sin^2 \phi_2 + b^2 \cos^2 \phi_2)]^{-1}.$$

Нетрудно проверить, что отсутствуют слагаемые, пропорциональные a^4 и b^4 , что приводит к сокращению множителей $a^2 b^2$. Поэтому из предыдущего выражения получаем

$$A(\phi; \phi_1, \phi_2) = \frac{\cos(\phi - \phi_1) - \cos(\phi - \phi_2) \cos(\phi_2 - \phi_1)}{\sin^2(\phi_2 - \phi_1)} \quad (19)$$

$$B(\phi; \phi_1, \phi_2) = \frac{\cos(\phi - \phi_2) - \cos(\phi - \phi_1) \cos(\phi_2 - \phi_1)}{\sin^2(\phi_2 - \phi_1)} \quad (20)$$

Рассмотрим цилиндрическую поверхность S , ось которой перпендикулярна плоскости $\mathbb{R}^2$ и пересечение которой с последней плоскостью (экватор) есть окружность радиуса 1 с центром в точке O . Рассмотрим стандартные цилиндрические координаты ϕ, y на поверхности S . Как обычно, $\phi \in (0, 2\pi)$ определяет образующую, а y является одномерной координатой на образующей (эквивалентно, расстояние со знаком от экватора). В цилиндрических координатах ϕ, y кривая пересечения поверхности S с плоскостью, проходящей через O и с направлением нормали $\omega = (\theta, \nu)$ имеет уравнение

$$y(\phi) = \tan \nu \sin(\phi - \theta). \quad (21)$$

Как обычно, $\omega = (\theta, \nu)$, где ν есть угол между ω и вертикальным направлением, а θ — азимут направления ω .

Кривые на поверхности S , принадлежащие этому классу мы будем называть плоскими. Отметим, что

$$y(\phi) = A(\phi; \phi_1, \phi_2) y_1 + B(\phi; \phi_1, \phi_2) y_2, \quad (22)$$

где A и B определяются как и в (19) и (20), является уравнением плоской кривой на S , которая содержит точки (ϕ_1, y_1) и (ϕ_2, y_2) . (Доказательство : (22) можно преобразовать в (21) с параметрами $\operatorname{tg} \nu$ и θ , а затем использовать $A(\phi_1; \phi_1, \phi_2) = 1$, $B(\phi_1; \phi_1, \phi_2) = 0$, $A(\phi_2; \phi_1, \phi_2) = 0$, $B(\phi_2; \phi_1, \phi_2) = 1$.) Отсюда следует, что случайные точки $(\phi_1, t(\phi_1))$, $(\phi_2, t(\phi_2))$, $(\phi_3, t(\phi_3))$ с вероятностью 1 принадлежат некоторой плоской кривой на поверхности S . Эквивалентно, с вероятностью $P_3 = 1$, прямые $H(x, \phi_1, t(\phi_1))$, $H(x, \phi_2, t(\phi_2))$, $H(x, \phi_3, t(\phi_3))$ принадлежат единственной плоскости. Последняя плоскость совпадает со случайной касательной плоскостью T , описанной во Введении. Доказательство завершено.

Ниже через ω будем обозначать нормальное направление плоскости, содержащей прямые $H(x, \phi_1, t(\phi_1))$ и $H(x, \phi_2, t(\phi_2))$. Имеет место (см. [3])

$$dy_1 dy_2 = \frac{\sin(\phi_2 - \phi_1)}{\cos^3 \nu} d\omega, \quad (23)$$

где $d\omega = \sin \nu d\nu d\theta$ — телесный угол.

Совместное распределение $t(\phi_1)$ и $t(\phi_2)$ является нормальным с ковариационной матрицей A_2 (см. (8)). Используем Лемму 1, не умаляя общности предполагая, что (14) выполняется для $\alpha = 0$. Отсюда следует, что

$$A_2 = \begin{pmatrix} a^2 \sin^2 \phi_1 + b^2 \cos^2 \phi_1 & a^2 \sin \phi_1 \sin \phi_2 + b^2 \cos \phi_1 \cos \phi_2 \\ a^2 \sin \phi_1 \sin \phi_2 + b^2 \cos \phi_1 \cos \phi_2 & a^2 \sin^2 \phi_2 + b^2 \cos^2 \phi_2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $D = \det A_2 = a^2 b^2 \sin^2(\phi_1 - \phi_2) \neq 0$, и матрица, обратная к A_2 имеет вид

$$A_2^{-1} = D^{-1} \begin{pmatrix} a^2 \sin^2 \phi_1 + b^2 \cos^2 \phi_1 & a^2 \sin \phi_1 \sin \phi_2 + b^2 \cos \phi_1 \cos \phi_2 \\ a^2 \sin \phi_1 \sin \phi_2 + b^2 \cos \phi_1 \cos \phi_2 & a^2 \sin^2 \phi_2 + b^2 \cos^2 \phi_2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим совместную плотность распределения $t(\phi_1)$ и $t(\phi_2)$:

$$f_{\phi_1, \phi_2}(y_1, y_2) = (2\pi\sqrt{D})^{-1} \cdot \exp \left\{ -\frac{a^{-2}b^{-2}}{2\sin^2(\phi_1 - \phi_2)} \cdot [(a^2 \sin^2 \phi_1 + b^2 \cos^2 \phi_1)y_1^2 + (a^2 \sin^2 \phi_2 + b^2 \cos^2 \phi_2)y_2^2 - 2y_1 y_2 (a^2 \sin \phi_1 \sin \phi_2 + b^2 \cos \phi_1 \cos \phi_2)] \right\}.$$

Из (23) получаем, что плотность распределения $X(\omega) d\omega$ ориентации случайной плоскости, проходящей через $l(\phi_1)$ и $l(\phi_2)$, имеет вид

$$X(\omega) = \frac{\sin(\phi_2 - \phi_1)}{\cos^3 \nu} f_{\phi_1, \phi_2}(y_1, y_2).$$

Согласно Замечанию во Введении, выбираем $\phi_1 = 0$ и $\phi_2 = \pi/2$. Используя (21), получаем

$$\begin{aligned} X(\omega) &= (2\pi ab)^{-1} \cos^{-3} \nu \cdot \exp \left\{ -\frac{b^2 y_1^2 + a^2 y_2^2}{2a^2 b^2} \right\} = \\ &= (2\pi ab)^{-1} \cos^{-3} \nu \cdot \exp \left\{ -\operatorname{tg}^2 \nu \frac{b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta}{2a^2 b^2} \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Теорема 2. Если однородное гауссовское случайное поле $\xi(Q)$ грубо дифференцируемо, то $\xi(O)$ и случайное направление Ω , нормальное к касательной плоскости T в $\xi(O)$, независимы. Случайная ориентация Ω имеет плотность распределения $X(\omega) d\omega$, задаваемую формулой (24).

Результат (24) может быть использован для вычисления плотности распределения $Y(\theta)$ случайного азимута направления нормального к T . Эта случайная ориентация не зависит от уровня z и вычисляется интегрированием $X(\omega) \sin \nu d\nu$. Для каждого $c > 0$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{-3} \nu \cdot \exp \{ -c \operatorname{tg}^2 \nu \} \sin \nu d\nu = \frac{1}{2c}.$$

Следовательно, искомая плотность распределения имеет вид

$$Y(\theta) = \frac{(2\pi)^{-1} ab}{b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta}, \quad (25)$$

где угол θ измеряется от направления полуоси a .

Приведем проверку равенства $\int Y(\theta) d\theta = 1$. По хорошо известной теореме об опорных функциях выпуклых фигур, примененной к эллипсам, заключаем, что $r = (b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta)^{-1/2}$ является эллипсом, записанным в полярных координатах, с главными полуосями a^{-1} и b^{-1} . Так как $\frac{1}{2} r^2 d\theta$ есть элемент площади, то площадь этого эллипса равна $\pi a^{-1} b^{-1}$, откуда

$$\int (b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta)^{-1} d\theta = 2\pi a^{-1} b^{-1}.$$

Проверка завершена.

Из результата (24) можно получить условную плотность распределения направления нормали к случайной гауссовской поверхности в точке $\xi(O)$ при условии

$\xi(O) = x$, в смысле горизонтального окна (см. заключительное замечание из Введения). Рассмотрим кривую уровня поля $\xi(Q)$, соответствующую уровню x . Эта кривая представляет собой пересечение поля $\xi(Q)$ с горизонтальной плоскостью, отстоящей на x от O . Вероятность события, что эта кривая уровня пересекает горизонтальный прямолинейный отрезок dl в этой плоскости, выходящий из точки (O, x) , и образует с dl угол, лежащий в интервале $(\alpha, \alpha + d\alpha)$, можно вычислить, используя якобиан

$$\cos \nu \, dx \, d\omega = (\sin \nu)^2 \sin \alpha \, d\alpha \, dl \, d\nu, \quad (26)$$

где как и выше, dx — интервал на вертикальной оси. Эта формула хорошо известна в интегральной геометрии: обе стороны суть элементы инвариантной относительно евклидовых движений меры в пространстве плоскостей, см. [3]. Обозначим через $X_1(\omega) \, d\alpha \, d\nu$ плотность распределения случайной ориентации касательной плоскости в точке $\xi(O) = x$, что соответствует условию в смысле горизонтального окна dl .

Разделив (26) на $\cos \nu$ и помножив на $X(\omega)$, получим вероятность события $\{\xi(O) \in dx \text{ и } \Omega \in d\omega\}$. Последняя вероятность асимптотически эквивалентна вероятности события $\{\xi(Q) \text{ hits } dl\} \cap \{\Omega \in d\omega\}$. Отсюда вытекает следующая

Теорема 3. Если однородное гауссовское случайное поле $\xi(Q)$ грубо дифференцируемо, то независимо от уровня x

$$X_1(\omega) = \lambda^{-1} \sin \alpha (\cos \nu)^{-1} (\sin \nu)^2 X(\omega), \quad (27)$$

где $X(\omega)$ задается согласно (24), и

$$\lambda = \iint \sin \alpha (\cos \nu)^{-1} (\sin \nu)^2 X(\omega) \, d\alpha \, d\nu. \quad (28)$$

Интенсивность точечного процесса пересечений поверхности (кривой уровня) поля $\xi(Q)$ с горизонтальной тестовой прямой на уровне x равна $\lambda G(x)$, где $G(x)$ есть гауссовская плотность распределения случайной величины $\xi(Q)$.

Задача. Из результата Теоремы 1 возникает следующий вопрос: Существуют ли однородные гауссовские поля на плоскости $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющие плоскому условию Райса с неэллиптической $h(\phi)$? Если такие поля и существуют, то они грубо не дифференцируемы.

ABSTRACT. The paper poses the problem of "rough differentiability" of a Gaussian random field $\xi(Q)$, $Q \in \mathbb{R}^2$. The main finding is that within the "Rice class", translation invariant Gaussian fields are in fact never roughly differentiable, except for the case where the Rice function is the support function of an ellipse. In this case, the random spatial direction Ω normal to the plane tangent to $\xi(Q)$ at a given point O turns out to be independent of $\xi(O)$. The probability density for Ω is written down explicitly. This result opens the way for calculation of the intensity of the point process of intersections of a given horizontal line on the level z with the random surface $\xi(Q)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Крамер, М. Р. Лидбеттер, Стационарные Случайные Процессы. Свойства Выборочных Функций и их Приложения, Мир, Москва, 1969.
2. R. V. Ambartzumian, V. K. Oganian, "Parametric versions of Hilbert's fourth problem," Israel Journal of Mathematics, vol. 103, no. 1, pp. 41 — 65, 1998.
3. Р. В. Амбарцумян, Й. Мекке, Д. Штойян, Введение в стохастическую геометрию, Москва, Наука, 1989.

11 ноября 1998

Американский университет Армении, Ереван,
E-mail: rhambart@aua.am

