ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ ГИЛЬБЕРТА

В. С. Закарян, Н. Е. Товмасян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 33, № 6, 1998

Получена связь между классической и обобщенной задачей Гильберта и предложены некоторые эффективные методы решения обобщенной задачи. Результаты применяются к задаче Пуанкаре для уравнения Лапласа.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть Γ – достаточно гладкая, простая замкнутая кривая, содержащаяся в кольце $r < |z| < R$ и охватывающая окружность $|z| = r$. Обозначим через D^+ область, ограниченную контуром Γ и окружностью $|z| = r$, а через D^- – область, ограниченную контуром Γ и окружностью $|z| = R$. Пусть Γ_1 и Γ_2 означают окружности $|z| = r$ и $|z| = R$, соответственно.

Рассмотрим следующую обобщенную задачу Гильберта : найти функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, аналитические в областях D^+ и D^-, соответственно, и удовлетворяющие граничным условиям

$$a(z)\varphi(z) = \psi(z) + f(z), \quad z \in \Gamma, \tag{0.1}$$

$$\varphi(\gamma_1 z) = \varphi(\gamma_1 \overline{z}), \quad z \in \Gamma_1, \tag{0.2}$$

$$\psi(\gamma_2 z) = \psi(\gamma_2 \overline{z}), \quad z \in \Gamma_2, \tag{0.3}$$

где γ_1 и γ_2 – постоянные, $|\gamma_1| = |\gamma_2| = 1$, $a(z)$ и $f(z)$ – некоторые функции, заданные на Γ. Предположим, что функции $a(z)$ и $f(z)$ удовлетворяют условию Гельдера, а $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ непрерывны в замкнутых областях $\overline{D^+}$ и $\overline{D^-}$, соответственно. Предполагается, что $a(z) \neq 0$, $z \in \Gamma$. В (0.2) и ниже $\overline{z}$ означает комплексное сопряженное точки z.

В предельном случае, когда $R \to \infty$, $r \to 0$, мы получаем обычную задачу Гильберта (см. [1], стр. 146 и [2], стр. 49). При $f = 0$ задача (0.1) – (0.3) называется однородной.

Целью данной работы является исследование связей между классической и обобщенной задачей Гильберта и получение эффективных методов решения обобщенной задачи. Результаты применяются к задаче Пуанкаре для уравнения Лапласа.

§1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть G^+ и G^- – области с границей Г. Предположим, что G^- неограничена. Пусть $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ – аналитические функции в D^+ и D^-, непрерывные в замкнутых областях $\overline{D^+}$ и $\overline{D^-}$, соответственно, и удовлетворяют условиям (0.2) и (0.3).

Лемма 1. Существуют и единственны функции $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$, такие что

$$\varphi(z) = \varphi_1(z) + \varphi_1\left(\frac{1}{z}\gamma_1^2 r^2\right), \quad z \in D^+, \tag{1.1}$$

$$\psi(z) = \psi_1(z) + \psi_1\left(\frac{1}{z}\gamma_2^2 R^2\right), \quad z \in D^-, \tag{1.2}$$

причем $\varphi_1(z)$ и ограниченная на бесконечности $\psi_1(z)$, аналитичны в G^+ и G^- и непрерывны в замкнутых областях $\overline{G^+}$ и $\overline{G^-}$, соответственно.

Доказательство : Согласно формуле Коши (см. [3], стр. 54)

$$\psi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \tag{1.3}$$

где $\Phi_1(z)$ аналитична в круге $|z| < R$ и непрерывна в замкнутом круге $|z| \leq R$, а $\Phi_2(z)$ аналитична в G^-, непрерывна в замкнутой области $\overline{G^-}$ и равна нулю на бесконечности. Подставляя функцию $\psi(z)$ из (1.3) в (0.3), получим

$$\Phi_1(\gamma_2 z) + \Phi_2(\gamma_2 z) = \Phi_1(\gamma_2 \bar{z}) + \Phi_2(\gamma_2 \bar{z}), \quad |z| = R. \tag{1.4}$$

Так как $\bar{z} = z^{-1}R^2$ при $|z| = R$, то условие (1.4) принимает вид

$$\Phi_1(\gamma_2 z) - \Phi_2\left(\frac{1}{z}\gamma_2 R^2\right) = \Phi_1\left(\frac{1}{z}\gamma_2 R^2\right) - \Phi_2(\gamma_2 z), \quad |z| = R. \tag{1.5}$$

Функция $\Phi_1(\gamma_2 z) - \Phi_2\left(\frac{1}{z}\gamma_2 R^2\right)$ аналитична в круге $|z| < R$, а $\Phi_1\left(\frac{1}{z}\gamma_2 R^2\right) - \Phi_2(\gamma_2 z)$ аналитична в области $|z| > R$ и стремится к $\Phi_1(0)$ при $|z| \to \infty$. Тогда, согласно теореме Лиувилля (см. [3], стр. 64)

$$\Phi_1(\gamma_2 z) - \Phi_2\left(\frac{1}{z}\gamma_2 R^2\right) = \Phi_1(0), \quad |z| < R, \tag{1.6}$$

$$\Phi_1\left(\frac{1}{z}\gamma_2 R^2\right) - \Phi_2(\gamma_2 z) = \Phi_1(0), \quad |z| > R. \tag{1.7}$$

Равенства (1.6) и (1.7) эквивалентны. Подставляя Φ_1 из (1.6) в (1.3), получим представление (1.2), где $\psi_1(z) = \Phi(z) + \Phi_1(0)/2$.

Теперь докажем, что в (1.2) функция $\psi_1(z)$ определяется через $\psi(z)$ единственным образом, т.е. если $\psi(z) \equiv 0$, то $\psi_1(z) \equiv 0$. Действительно, если $\psi(z) \equiv 0$, то из (1.2) имеем $\psi_1(z) = -\psi_1(\gamma_2^2\overline{z})$ для $|z| = R$. Разлагая функцию $\psi_1(z)$ в ряд Лорана в области $|z| \geq R$, получим $\psi_1(z) \equiv 0$. Так как $\psi_1(z)$ ограничена на бесконечности, то ряд Лорана не содержит положительных степеней z.

Легко проверить, что любая функция вида (1.2) удовлетворяет условию (0.3). Аналогично доказывается представление (1.1). Из представлений (1.1) и (1.2) следует, что функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ аналитичны в окрестностях окружностей Γ_1 и Γ_2, соответственно. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Если $\varphi(z)$ аналитична в области D^+, непрерывна в замкнутой области $\overline{D^+}$ и удовлетворяет условию (0.2), то она представляется в виде

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{m} c_k(z + \gamma_1^2 r^2 z^{-1})^k + (z + \gamma_1^2 r^2 z^{-1})^{m+1}\varphi_0(z), \quad z \in D^+, \tag{1.8}$$

где m – натуральное число, $c_0, ..., c_m$ – постоянные, а $\varphi_0(z)$ аналитична в D^+, непрерывна в замкнутой области $\overline{D^+}$ и удовлетворяет условию (0.2). Постоянные $c_0, ..., c_m$ и функция $\varphi_0(z)$ определяются через $\varphi(z)$ единственным образом.

Доказательство : Обозначим

$$\varphi_m(z) = \varphi(z) - \sum_{k=0}^{m} c_k(z + \gamma_1^2 r^2 z^{-1})^k. \tag{1.9}$$

Из представления (1.8) следует

$$\varphi_m(z) = \varphi_0(z)(z + \gamma_1^2 r^2 z^{-1})^{m+1}. \tag{1.10}$$

Дифференцируя обе части (1.10) j раз и подставляя $z = i\gamma_1 r$, получим

$$\varphi_m^{(j)}(i\gamma_1 r) = 0, \quad j = 0, 1, ..., m. \tag{1.11}$$

Подставляя $\varphi_m(z)$ из (1.9) в (1.11), получим систему алгебраических уравнений для постоянных $c_0, ..., c_m$:

$$\sum_{k=0}^{j} a_{jk} c_k = \varphi^{(j)}(i\gamma_1 r), \quad a_{jj} \neq 0, \quad j = 0, 1, ..., m. \tag{1.12}$$

Из системы (1.12) постоянные $c_0, ..., c_m$ определяются однозначно. Следовательно, функция $\varphi_m(z)$ в (1.10) корректно определена и удовлетворяет условиям (1.11). Так как функция $\varphi(z)$ удовлетворяет условию (0.2), то функция $\varphi_m(z)$ также удовлетворяет (0.2). Из (1.11) получим $\varphi_m^{(j)}(-i\gamma_1 r) = 0$, $j = 0, 1, ..., m$. Из (1.10)

$$\varphi_0(z) = (z + \gamma_1^2 r^2 z^{-1})^{-m-1}\varphi_m(z).$$

Ясно, что функция $\varphi_0(z)$ аналитична в области D^+, непрерывна в замкнутой области $\overline{D^+}$ и удовлетворяет (0.2). Единственность представления (1.10) очевидна. Лемма 2 доказана.

§2. ЗАДАЧА (0.1) – (0.3)

1. Сначала рассмотрим обобщенную задачу Гильберта (0.1) – (0.3) при $a(z) \equiv 1$. Подставляя $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ из (1.1), (1.2) в (0.1), получим

$$\varphi_1(z) - \psi_1(\gamma_2^2 R^2 z^{-1}) = \psi_1(z) - \varphi_1(\gamma_1^2 r^2 z^{-1}) + f(z), \quad z \in \Gamma. \tag{2.1}$$

Функция $\varphi_1(z) - \psi_1(\gamma_2^2 R^2 z^{-1})$ аналитична в G^+ и непрерывна в замкнутой области $\overline{G^+}$, а функция $\psi_1(z) - \varphi_1(\gamma_1^2 r^2 z^{-1})$ аналитична в G^-, непрерывна в $\overline{G^-}$ и ограничена на бесконечности. Граничное условие (2.1) определяет эти функции формулами (см. [1], стр. 135)

$$\varphi_1(z) - \psi_1(\gamma_2^2 R^2 z^{-1}) = F(z) + c, \quad z \in G^+, \tag{2.2}$$

$$\psi_1(z) - \varphi_1(\gamma_1^2 r^2 z^{-1}) = F(z) + c, \quad z \in G^-, \tag{2.3}$$

где c – произвольная комплексная постоянная и

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(t)}{t-z}\,dt.$$

Подставляя $\psi_1(z)$ из (2.3) в (2.2), получим

$$\varphi_1(z) = \varphi_1(\rho z) + F(\gamma_2^2 R^2 z^{-1}) + F(z) + 2c, \quad z \in G^+, \tag{2.4}$$

где $\rho = r^2\gamma_1^2 R^{-2}\gamma_2^{-2}$. Устремляя $z \to 0$, находим $c = -\frac{1}{2}F(0)$. Функция $\varphi_1(z)$ представима в виде

$$\varphi_1(z) = c_0 + z\Phi(z), \tag{2.5}$$

где функция $\Phi(z)$ аналитична в G^+ и непрерывна в $\overline{G^+}$, а c_0 – комплексная постоянная. Подставляя c и $\varphi_1(z)$ из (2.5) в (2.3) и (2.4), получим

$$\psi_1(z) = c_0 + \gamma_1^2 r^2 z^{-1}\Phi(\gamma_1^2 r^2 z^{-1}) + F(z) - \frac{1}{2}F(0), \tag{2.6}$$

$$\Phi(z) = \rho\Phi(\rho z) + F_0(z), \tag{2.7}$$

где

$$F_0(z) = \frac{1}{z}\left[F(z) - F(0) + F(\gamma_2^2 R^2 z^{-1})\right].$$

Отметим, что функция $F_0(z)$ аналитична в G^+ и непрерывна в $\overline{G^+}$. Из (2.7) получим оценку

$$|\rho\Phi(\rho z)| \le \frac{r^2}{R^2}||\Phi||, \quad ||\Phi|| = \max_{z\in G^+}|\Phi(z)|. \tag{2.8}$$

Так как $r < R$, то из неравенства (2.8) следует, что уравнение (2.7) имеет единственное решение. Легко проверить, что функция

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\rho^k F_0(\rho^k z) \tag{2.9}$$

является решением уравнения (2.7). Взяв

$$\Phi_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1}\rho^k F_0(\rho^k z)$$

в качестве n-го приближения, погрешность приближенного решения можно оценить неравенством

$$|\Phi(z) - \Phi_n(z)| \le \frac{\rho^n}{1-\rho}||F_0||.$$

Если $f \equiv 0$, то $\Phi(z) \equiv 0$, $\psi(z) = \varphi(z) \equiv 2c_0$, где c_0 – произвольная комплексная постоянная. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. При $a = 1$ однородная задача (0.1) – (0.3) имеет одно линейно независимое (в поле комлексных чисел) решение $\varphi(z) = \psi(z) = c$, а неоднородная задача (0.1) – (0.3) всегда разрешима и частное решение определяется формулами (1.1), (1.2), (2.5), (2.6) и (2.9) (при $c_0 = 0$).

2. Рассмотрим теперь случай, когда функция $a(z)$ в (0.1) имеет вид $a(z) = z + \gamma_1^2 r^2 z^{-1}$. Обозначая

$$\Phi(z) = (z + \gamma_1^2 r^2 z^{-1})\varphi(z), \tag{2.10}$$

граничные условия (0.1) – (0.3) запишутся в виде

$$\Phi(z) = \psi(z) + f(z), \quad z \in \Gamma, \tag{2.11}$$

$$\Phi(\gamma_1 z) = \Phi(\gamma_1 \overline{z}), \quad z \in \Gamma_1, \tag{2.12}$$

$$\psi(\gamma_2 z) = \psi(\gamma_2 \overline{z}), \quad z \in \Gamma_2. \tag{2.13}$$

Мы доказали, что задача (2.11) – (2.13) всегда разрешима, и общее решение определяется формулой

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + c, \quad \psi(z) = \psi_0(z) + c, \tag{2.14}$$

где $(\Phi_0(z), \psi_0(z))$ – частное решение задачи (2.11) – (2.13), а c – произвольная комплексная постоянная. Подставляя $\Phi(z)$ из (2.14) в (2.10), имеем

$$(z + \gamma_1^2 r^2 z^{-1})\varphi(z) = \Phi_0(z) + c. \tag{2.15}$$

Подставляя $z = i\gamma_1 r$ в (2.14), получим $c = -\Phi_0(i\gamma_1 r)$. Так как функция $\Phi_0(z)$ удовлетворяет условию (2.12), то для нее имеет место представление (1.1) при $\varphi(z) = \Phi_0(z)$. Следовательно, $\Phi_0(i\gamma_1 r) = \Phi_0(-i\gamma_1 r)$. Подставляя c в (2.14) и (2.15), получим

$$\varphi(z) = (z + \gamma_1^2 r^2 z^{-1})^{-1}[\Phi_0(z) - \Phi_0(i\gamma_1 r)], \qquad \psi(z) = \psi_0(z) - \Phi_0(i\gamma_1 r).$$

Таким образом, рассмотренная задача имеет единственное решение.

3. Рассмотрим теперь случай $a(z) = (z + \gamma_1^2 r^2 z^{-1})^n$, где n – натуральное число, $n \geq 2$. Полагая

$$\Phi(z) = (z + \gamma_1^2 r^2 z^{-1})^{n-1}\varphi(z), \tag{2.16}$$

граничные условия (0.1) – (0.3) запишутся в виде

$$(z + \gamma_1^2 r^2 z^{-1})\Phi(z) = \psi(z) + f(z), \quad z \in \Gamma, \tag{2.17}$$

$$\Phi(\gamma_1 z) = \Phi(\gamma_1 \bar{z}), \quad z \in \Gamma_1, \tag{2.18}$$

$$\psi(\gamma_2 z) = \psi(\gamma_2 \bar{z}), \quad z \in \Gamma_2. \tag{2.19}$$

Пусть $(\Phi(z), \psi(z))$ – единственное решение задачи (2.17) – (2.19). Дифференцируя обе части (2.16) j раз по z и подставляя $z = i\gamma_1 r$, получим

$$\Phi^{(j)}(i\gamma_1 r) = 0, \quad j = 0, 1, ..., n-2. \tag{2.20}$$

В этом случае (2.20) является необходимым условием для разрешимости задачи (2.17) – (2.19). Пусть условия (2.20) выполнены. Используя (1.1), получим

$$\Phi^{(j)}(-i\gamma_1 r) = 0, \quad j = 0, 1, ..., n-2. \tag{2.21}$$

Из (2.16) имеем

$$\varphi(z) = \Phi(z)(z + \gamma_1^2 r^2 z^{-1})^{1-n}. \tag{2.22}$$

Из (2.20) и (2.21) следует, что функция $\varphi(z)$, определенная формулой (2.22), аналитична в G^+ и непрерывна в $\overline{G^+}$. Следовательно, в этом случае условия (2.20) необходимы и достаточны для разрешимости задачи (0.1) – (0.3) единственным образом.

4. Рассмотрим теперь случай, когда в (0.1)

$$a(z) = (z + \gamma_1^2 r^2 z^{-1})^{-m}, \tag{2.23}$$

где m – натуральное число. Подставляя $\varphi(z)$ из (1.8) в (0.1) и учитывая (2.23), получим

$$(z + \gamma_1^2 r^2 z^{-1})\varphi_0(z) - \psi(z) = -\sum_{k=0}^{m} c_k (z + \gamma_1^2 r^2 z^{-1})^{k-m} + f(z). \tag{2.24}$$

Согласно Лемме 2, для условий (0.2) и (0.3), имеем

$$\begin{aligned} \varphi_0(\gamma_1 z) &= \varphi_0(\gamma_1 \overline{z}), \quad z \in \Gamma_1, \\ \psi(\gamma_2 z) &= \psi(\gamma_2 \overline{z}), \quad z \in \Gamma_2. \end{aligned} \tag{2.25}$$

В пункте 3 мы показали, что задача (2.24) – (2.25) имеет единственное решение относительно $\varphi(z)$ и $\psi(z)$. Подставляя решение задачи (2.24) – (2.25) в (1.8), заключаем, что неоднородная задача (0.1) – (0.3) разрешима для любой функции $f(z)$, а число линейно независимых решений соответствующей однородной задачи есть $m + 1$.

5. Рассмотрим теперь общий случай. Пусть n – индекс функции $a(z)$ на контуре Γ (см. [1], стр. 147). Так как $a(z)$ непрерывна на Γ, то n – целое число. Обозначим

$$a_0(z) = a(z)(z + \gamma_1^2 r^2 z^{-1})^{-n}. \tag{2.26}$$

Так как контур Γ охватывает окружность $|z| = r$ и $|\gamma_1| = 1$, имеем $|z| > r$, $|\gamma_1^2 r^2 z^{-1}| < r$, $z \in \Gamma$. Следовательно, индекс функции $z + \gamma_1^2 r^2 z^{-1}$ на Γ равен единице. Поэтому индекс функции $a_0(z)$ на Γ равен нулю, и функция $\ln(a_0(z))$ удовлетворяет условию Гельдера для любого $z \in \Gamma$. Пусть $(\varphi_0(z), \psi_0(z))$ – частное решение задачи (0.1) – (0.3) при $f(z) = \ln(a_0(z))$, $a(z) \equiv 1$. Из (0.1) имеем

$$\varphi_0(z) = \psi_0(z) + \ln(a_0(z)), \tag{2.27}$$

а из (2.26), (2.27) получим

$$a_0(z) = \exp[\varphi_0(z)]\exp[-\psi_0(z)], \qquad a(z) = \exp[\varphi_0(z)]\exp[-\psi_0(z)](z + \gamma_1^2 r^2 z^{-1})^n.$$

Подставляя $a(z)$ в (0.1), получим $(z + \gamma_1^2 r^2 z^{-1})^n \Phi(z) = \omega(z) + f_0(z)$, $z \in \Gamma$, где

$$\Phi(z) = \varphi(z)\exp[\varphi_0(z)], \quad \omega(z) = \psi(z)\exp[\psi_0(z)], \quad f_0(z) = f(z)\exp[\psi_0(z)]. \tag{2.28}$$

В обозначениях (2.28) условия (0.2) и (0.3) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \Phi(\gamma_1 z) &= \Phi(\gamma_1 \overline{z}), \quad z \in \Gamma_1, \\ \omega(\gamma_2 z) &= \omega(\gamma_2 \overline{z}), \quad z \in \Gamma_2. \end{aligned}$$

Таким образом, общий случай сводится к рассмотренным выше случаям.

§3. ЗАДАЧА ПУАНКАРЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Предыдущие результаты можно применить к краевым задачам для эллиптических уравнений. Для простоты рассмотрим задачу Пуанкаре для эллиптического уравнения

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in D, \tag{3.1}$$

где A, B и C – некоторые комплексные постоянные, а D – единичный круг $x^2 + y^2 < 1$. Обозначим через L окружность $x^2 + y^2 = 1$. Рассмотрим граничное условие

$$a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y), \quad (x, y) \in L, \tag{3.3}$$

где $a(x, y)$, $b(x, y)$ и $f(x, y)$ определены на L и удовлетворяют условию Гельдера. Уравнение

$$A + B\lambda + C\lambda^2 = 0 \tag{3.2}$$

называется **характеристическим уравнением**. Эллиптичность (3.1) означает, что $C \neq 0$ и характеристическое уравнение (3.3) не имеет действительных решений (см. [4], стр. 110). Предположим, что корни уравнения (3.3) удовлетворяют условию

$$\operatorname{Im} \lambda_1 > 0, \quad \operatorname{Im} \lambda_2 < 0. \tag{3.4}$$

Согласно [4], стр. 155, задачу Пуанкаре (3.1), (3.2) можно свести к сингулярному интегральному уравнению. Эту задачу мы сведем к обобщенной задаче Гильберта (0.1) – (0.3).

Общее решение уравнения (3.1) определяется формулой (см. [4], стр. 109)

$$u(x, y) = \varphi_1(x + \lambda_1 y) + \varphi_2(x + \lambda_2 y) + c, \tag{3.5}$$

где $\varphi_1(x + \lambda_1 y)$ и $\varphi_2(x + \lambda_2 y)$ – произвольные аналитические функции относительно аргументов $(x + \lambda_1 y)$ и $(x + \lambda_2 y)$, c – произвольная постоянная и $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$ при $(x, y) \in D$. Отметим, что функции $\varphi_1(x+\lambda_1 y)$ и $\varphi_2(x+\lambda_2 y)$ и постоянная c в (3.5) определяются через $u(x, y)$ единственным образом.

Мы ищем решение $u(x, y)$ задачи (3.1), (3.2) в классе функций, первые производные которых удовлетворяют условию Гельдера в замкнутой области $\overline{D}$. Пусть D_j – образ круга D при отображении

$$\zeta = \xi + i\eta = x + \lambda_j y, \quad (x, y) \in D, \quad (\xi, \eta) \in D_j, \quad j = 1, 2.$$

Границы L_1 и L_2 областей D_1 и D_2 являются эллипсами. Пусть $\varphi_1(\zeta)$ и $\varphi_2(\zeta)$ – аналитические функции в D_1 и D_2, соответственно, первые производные которых непрерывны в замкнутых областях $\overline{D_1}$ и $\overline{D}_2$. В (3.5) мы берем суперпозицию функций $\varphi_j(\zeta)$ и $x + \lambda_j y$, $j = 1, 2$. Подставляя $u(x, y)$ из (3.5) в (3.2), получим

$$A_1(z)\varphi_1'(x + \lambda_1 y) + A_2(z)\varphi_2'(x + \lambda_2 y) = f(z), \quad z \in L, \tag{3.6}$$

где $A_j(z) = a(x, y) + \lambda_j b(x, y)$, $z = x + iy$, $j = 1, 2$. Предположим, что $A_j(z) \neq 0$ для любого $z \in L$. Полагая

$$\psi_j(\zeta) = \varphi_j'(\zeta), \quad \zeta \in D_j, \quad j = 1, 2, \tag{3.7}$$

граничное условие (3.6) запишется в виде

$$A_1(z)\psi_1(x + \lambda_1 y) + A_2(z)\psi_2(x + \lambda_2 y) = f(z), \quad z \in L. \tag{3.8}$$

Из (3.7) и $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$ имеем

$$\varphi_j(x + \lambda_j y) = \int_0^{x+\lambda_j y} \psi_j(\zeta)\, d\zeta, \quad j = 1, 2. \tag{3.9}$$

Для любого $(x, y) \in L$ имеем

$$x = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad y = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

Следовательно

$$(x + \lambda_1 y) = \mu_1\left(z + \frac{\nu_1}{z}\right), \quad (x + \lambda_2 y) = \mu_2\left(\frac{1}{z} + \nu_2 z\right), \quad (x, y) \in L, \tag{3.10}$$

где

$$\mu_1 = \frac{\lambda_1 + i}{2i}, \quad \nu_1 = \frac{i - \lambda_1}{i + \lambda_1}, \quad \mu_2 = \frac{i - \lambda_2}{2i}, \quad \nu_2 = \frac{i + \lambda_2}{i - \lambda_2}.$$

Условие (3.4) влечет $|\nu_j| < 1$, $j = 1, 2$. Подставляя $x + \lambda_j y$ из (3.10) в (3.8), получим

$$A_1(z)\psi_1\left(\mu_1\left(z + \frac{\nu_1}{z}\right)\right) + A_2(z)\psi_2\left(\mu_2\left(\frac{1}{z} + \nu_2 z\right)\right) = f(z), \quad |z| = 1.$$

Пусть

$$\varphi(z) = \psi_1\left(\mu_1\left(z + \frac{\nu_1}{z}\right)\right), \quad \psi(z) = \psi_2\left(\mu_2\left(\frac{1}{z} + \nu_2 z\right)\right), \tag{3.11}$$

$$a(z) = -\frac{A_1(z)}{A_2(z)}, \quad g(z) = -\frac{f(z)}{A_2(z)}.$$

Согласно (3.11) граничное условие (3.6) можно записать в виде

$$a(z)\varphi(z) = \psi(z) + g(z), \quad z \in L. \tag{3.12}$$

Так как функции $\psi_1(\zeta)$ и $\psi_2(\zeta)$ аналитичны в D_1 и D_2, соответственно, и непрерывны в замкнутых областях $\overline{D}_1$ и $\overline{D}_2$, то функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ аналитичны в кольцах $\sqrt{|\nu_1|} < |z| < 1$ и $1 < |z| < \left(\sqrt{|\nu_2|}\right)^{-1}$ и непрерывны в их замыканиях, соответственно. Из (3.10) получим условия (0.2) – (0.3), где Γ_1 и Γ_2 – окружности $z = \sqrt{|\nu_1|}$ и $z = \left(\sqrt{|\nu_2|}\right)^{-1}$, соответственно, и $\gamma_1 = \sqrt{\frac{\nu_1}{|\nu_1|}}$, $\gamma_2 = \sqrt{\frac{\nu_2}{|\nu_2|}}$. Из (3.11) имеем

$$\psi_1(\zeta) = \varphi\left(\frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 4\nu_1\mu_1^2}}{2\mu_1}\right), \quad \psi_2(\zeta) = \psi\left(\frac{2\mu_2}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 4\nu_2\mu_2^2}}\right). \tag{3.13}$$

В формуле (3.13) под $\sqrt{\zeta^2 - 4\nu_j\mu_j^2}$ понимается ветвь, аналитичная вне отрезка $[-2\mu_j\sqrt{\nu_j}, 2\mu_j\sqrt{\nu_j}]$ и удовлетворяющая

$$\lim_{|\zeta|\to\infty} \frac{1}{\zeta}\sqrt{\zeta^2 - 4\nu_j\mu_j^2} = 1, \quad j = 1, 2.$$

Так как функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ аналитичны в кольцах $\sqrt{|\nu_1|} < |z| < 1$ и $1 < |z| < \left(\sqrt{|\nu_2|}\right)^{-1}$ соответственно и удовлетворяют условиям (0.2), (0.3), то функции $\psi_1(\zeta)$ и $\psi_2(\zeta)$, определенные формулой (3.13), аналитичны в областях D_1 и D_2, соответственно.

Таким образом, задача Пуанкаре (3.1), (3.2) сводится к обобщенной задаче Гильберта (3.12), (0.2), (0.3). Решения задач (3.1), (3.2) и (3.12), (0.2), (0.3) связаны с помощью формул (3.5), (3.9), (3.13).

ABSTRACT. A relationship between the classical and generalized Hilbert problems is derived and some effective methods of resolution of the generalized problem are presented. The results are applied in the Poincare problem for Laplace equation.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные Интегральные Уравнения, Наука, Москва, 1962.
2. Н. П. Векуа, Системы Сингулярных Интегральных Уравнений, Наука, Москва, 1970.
3. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории Функций Комплексного Переменного, Наука, Москва, 1973.
4. А. В. Бицадзе, Краевые Задачи для Эллиптических Уравнений Второго Порядка, Наука, Москва, 1966.

29 марта 1998

Армянский государственный инженерный университет
E-mail : hterzian@seua.am