АДИАБАТИЧЕСКИЙ ИНВАРИАНТ ЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Г. Р. Оганесян, Е. А. Тароян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 33, № 6, 1998

§1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Физическая величина, мало меняющаяся при медленном изменении параметров системы, называется адиабатическим инвариантом физической системы. Иными словами, адиабатический инвариант есть приближенный первый интеграл системы. В [1] была установлена связь между приближенными интегралами энергии и вронскианами приближенных решений. Используя это, в настоящей заметке мы находим адиабатический инвариант для линейного осциллятора во внешнем переменном поле и оцениваем его изменения. Величина

$$J(t,\varepsilon)=\frac{\dot{x}^2+\omega^2x^2}{2\omega}=\frac{E}{\omega},$$

где x – решение уравнения с данными Коши, не зависящими от ε, есть адиабатический инвариант для линейного гармонического осциллятора (см., например, [2])

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2(\varepsilon t)x=0, \quad t\in\mathbb{R}.$$

Полное изменение $J(t,\varepsilon)$ можно оценить следующим образом : $J(\varepsilon)=J(\infty,\varepsilon)-J(-\infty,\varepsilon)=O(\varepsilon^m)$, $\quad \varepsilon\to 0$, где m – натуральное число зависящее от ω. Заметим, что $m=\infty$, если ω голоморфная функция в некоторой окрестности вещественной оси.

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение линейного осциллятора во внешнем переменном поле :

$$\ddot{x}+\omega_1^2(\varepsilon t)x=\cos\int_0^t\omega_2(\varepsilon s)\,ds, \quad t\in\mathbb{R}, \tag{1.1}$$

где $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ и $\varepsilon > 0$ - малый параметр.

Для уравнения (1.1) рассмотрим адиабатические инварианты вида

$$J(t,\varepsilon) = |W(x - x', \varphi)|^2 = \left|(x - x')\frac{d\varphi}{dt} - \varphi\frac{d(x - x')}{dt}\right|^2,$$

где x и x' – точные решения уравнения (1.1) с ограниченными по ε данными Коши, а φ – асимптотическое решение соответствующего однородного уравнения.

Пусть частоты ω_1, ω_2 удовлетворяют следующим условиям :

1°. $\omega_1(\tau) \in C^4(R)$, $\omega_1(\tau) > 0$, и существуют пределы $\omega_1(\pm\infty) > 0$.

2°. $\omega_2(\tau) \in C^2(R)$, $\omega_2^2(\tau) \neq \omega_1^2(\tau)$, $\tau \in R$, существуют пределы $\omega_2(\pm\infty)$, и $\omega_2^2(\pm\infty) \neq \omega_1^2(\pm\infty)$.

$$3°. \quad \int_{-\infty}^{\infty} \omega_1^{(k)}(\tau)\, d\tau < \infty, \quad k = 1, \dots, 4, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\, \omega_2^{(k)}(\tau) \,|\, d\tau < \infty, \quad k = 1, 2,$$

где $\omega_1^{(k)}(\tau) = \frac{d^k\omega_1(\tau)}{d\tau^k}$.

Ниже докажем, что

$$J(t,\varepsilon) = \frac{E}{\omega_1\left(1 - \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}\right)} \tag{1.2}$$

является адиабатическим инвариантом, где

$$\begin{aligned} E = &\left(\left(1 - \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}\right)\dot{x} + \frac{\omega_2}{\omega_1^2}\sin\int_0^t \omega_2(\varepsilon s)\, ds\right)^2 + \\ &+ \omega_1^2\left(\left(1 - \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}\right)x - \frac{1}{\omega_1^2}\cos\int_0^t \omega_2(\varepsilon s)\, ds\right)^2 \end{aligned} \tag{1.3}$$

и $x = x(t,\varepsilon)$ - решение уравнения (1.1) с ограниченными по ε данными Коши. Изменения этого адиабатического инварианта удовлетворяют следующим оценкам :

1) существуют C, ε' такие, что

$$|J(t_1,\varepsilon) - J(t_2,\varepsilon)| \leq C\varepsilon \tag{1.4}$$

для любых $t_1, t_2 \in (-\infty;\infty)$, $0 < \varepsilon < \varepsilon'$;

$$2) \qquad J(\varepsilon) = J(\infty,\varepsilon) - J(-\infty,\varepsilon) = O(\varepsilon), \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{1.5}$$

Очевидно, что величина E является первым интегралом уравнения (1.1), когда частоты $\omega_m = \text{const}$. Покажем также, что полное изменение $J(t,\varepsilon)$, $J(\varepsilon) =$

$J(\infty,\varepsilon) - J(-\infty,\varepsilon)$ экспоненциально мало, если выполнены следующие дополнительные условия :

4°. функция $\omega_1(\tau)$ голоморфна и $\omega_1(\tau) \neq 0$ в односвязной области D комплексной плоскости τ, содержащей вещественную ось. Функция $S(0,\tau) = \int_0^\tau \omega_1(s)\,ds$ взаимно однозначно отображает область D на полосу H_a : $|\mathrm{Im} S| < a$.

$$5^\circ. \qquad \int_l (|\,\dot\omega_1(t)\,|^2 + |\ddot\omega_1(t)|)\,|dt| < \infty,$$

где интегралы берутся по линиям $\mathrm{Im}\, S(0,t) = c$, $c \in (-a, a)$.

§2. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ (1.1)

Перепишем уравнение (1.1), используя переменную $\tau = \varepsilon t$

$$\ddot v + \frac{\omega_1^2(\tau)}{\varepsilon^2} v = \frac{1}{\varepsilon^2} \cos\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \omega_2(s)\,ds\right), \quad \tau \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

где $v = v(\tau,\varepsilon) = x(t,\varepsilon)$ и $\ddot v = \dfrac{d^2 v}{d\tau^2}$. Сначала рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\ddot z + \frac{\omega_1^2(\tau)}{\varepsilon^2} z = \frac{1}{\varepsilon^2} \exp\left(\frac{i}{\varepsilon}\int_0^\tau \omega_2(s)\,ds\right), \quad \tau \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Линейно независимые решения соответствующего однородного уравнения

$$Pu = \ddot u + \frac{\omega_1^2(\tau)}{\varepsilon^2} u = 0, \quad \tau \in \mathbb{R},$$

со своими производными могут быть представлены в следующем виде (см., например, [3]) :

$$u_j^{\pm,(k-1)} = \tilde u_j^{(k-1)}(1 + \varepsilon^2 \rho_{j,k}^{\pm}), \quad j,k = 1,2,$$

где

$$\tilde u_j = \omega_1^{-1/2} \exp\left(\int_0^\tau \left(\pm i\frac{\omega_1}{\varepsilon} + \varepsilon\frac{3\dot\omega_1^2 - 2\omega_1\ddot\omega_1}{8\omega_1^3}\right) ds\right),$$

$\rho_{jk}^{\pm}(\tau,\varepsilon)$ ограничены для $\tau \in (-\infty;\infty)$, $\varepsilon > 0$ и $\rho_{jk}^{\pm} \to 0$ при $\tau \to \pm\infty$ для любого фиксированного ε. Функции

$$z_0^{\pm} = \int_0^\tau \frac{u_1^{\pm}(s,\varepsilon)u_2^{\pm}(\tau,\varepsilon) - u_1^{\pm}(\tau,\varepsilon)\,u_2^{\pm}(s,\varepsilon)}{\varepsilon^2 W(s,u_1^{\pm},u_2^{\pm})} \exp\left(\frac{i}{\varepsilon}\int_0^s \omega_2(l)\,dl\right) ds$$

суть решения уравнения (2.2). Здесь, $W(s,u_1^{\pm},u_2^{\pm}) = u_1^{\pm}\dot u_2^{\pm} - u_2^{\pm}\dot u_1^{\pm}$ – вронскианы решений $u_1^{\pm}(s,\varepsilon)$ и $u_2^{\pm}(s,\varepsilon)$. Используя 1°–3° и выражения (см. [3]) $W(s,u_1^{\pm},u_2^{\pm}) = -\dfrac{2i}{\varepsilon}$,

$$c\,|\,\varepsilon^2\rho_{jk}^{\pm}(\tau,\varepsilon)\,| \le \left\{\exp\int_\tau^\infty \sum_{q,r=1}^{2} |\,\tilde u_r P \tilde u_q W^{-1}(s,\tilde u_1,\tilde u_2)\,|\,ds\right\} - 1, \qquad c > 0,$$

$$P\widetilde{u}_q = \left[\pm i\varepsilon\frac{d}{ds}\left(\frac{3\dot{\omega}_1^2 - 2\omega_1\ddot{\omega}_1}{8\omega_1^3}\right) \pm \varepsilon\frac{\dot{\omega}_1}{i\omega_1}\frac{3\dot{\omega}_1^2 - 2\omega_1\ddot{\omega}_1}{8\omega_1^3} - \varepsilon^2\left(\frac{3\dot{\omega}_1^2 - 2\omega_1\ddot{\omega}_1}{8\omega_1^3}\right)^2\right]\widetilde{u}_q,$$

$$\int_0^\tau \exp(\theta_j)ds = \left.\frac{\exp\theta_j}{\dot{\theta}_j}\right|_0^\tau + \left.\frac{\ddot{\theta}_j\exp\theta_j}{\dot{\theta}_j^3}\right|_0^\tau - \int_0^\tau \frac{d}{ds}\left(\frac{\ddot{\theta}_j}{\dot{\theta}_j^3}\right)\exp(\theta_j)\,ds$$

и

$$\theta_j = \frac{i}{\varepsilon}\int_0^s \omega_2\,dl - \frac{1}{2}\ln\omega_1 \pm i\int_0^s\left(\frac{\omega_1}{\varepsilon} + \varepsilon\frac{3\dot{\omega}_1^2 - 2\omega_1\ddot{\omega}_1}{8\omega_1^3}\right)dl,$$

$$z_0^\pm = \frac{i}{2\varepsilon}u_2^\pm(\tau,\varepsilon)\left[\int_0^\tau \exp\theta_1\,ds + \varepsilon^2\left(\int_0^\infty - \int_\tau^\infty\right)\widetilde{u}_1(s,\varepsilon)\rho_{11}^\pm(s,\varepsilon)\,ds\right] -$$

$$-\frac{i}{2\varepsilon}u_1^\pm(\tau,\varepsilon)\left[\int_0^\tau \exp\theta_2\,ds + \varepsilon^2\left(\int_0^\infty - \int_\tau^\infty\right)\widetilde{u}_2(s,\varepsilon)\rho_{21}^\pm(s,\varepsilon)\,ds\right],$$

получим

$$z_0^\pm = a_1^\pm u_1^\pm + a_2^\pm u_2^\pm + \frac{1}{\omega_1^2 - \omega_2^2}\exp\left(\frac{i}{\varepsilon}\int_0^\tau \omega_2\,ds\right) + \varepsilon q_1^\pm,$$

$$\varepsilon\dot{z}_0^\pm = \varepsilon a_1^\pm\dot{u}_1^\pm + \varepsilon a_2^\pm\dot{u}_2^\pm + \frac{i\omega_2}{\omega_1^2 - \omega_2^2}\exp\left(\frac{i}{\varepsilon}\int_0^\tau \omega_2\,ds\right) + \varepsilon q_2^\pm,$$

где $a_i^\pm$ зависят от ε, а q_j^-, q_j^+ ограничены при $\tau \in (-\infty,\infty)$, $\varepsilon > 0$ и $\lim\limits_{\tau\to\pm\infty} q_j^\pm(\tau,\varepsilon) = 0$. Следовательно, существуют решения уравнения (2.1), имеющие следующий вид :

$$v_0^\pm = \frac{1}{\omega_1^2 - \omega_2^2}\cos\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \omega_2\,ds\right) + \varepsilon\mathrm{Re}q_1^\pm,$$

$$\varepsilon\dot{v}_0^\pm = -\frac{\omega_2}{\omega_1^2 - \omega_2^2}\sin\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \omega_2\,ds\right) + \varepsilon\mathrm{Re}q_2^\pm.$$

§3. ОЦЕНКИ

Решения v уравнения (2.1) можно записать в виде

$$v = a^- u_1^- + b^- u_2^- + v_0^- = a^+ u_1^+ + b^+ u_2^+ + v_0^+, \tag{3.1}$$

где коэффициенты $a^\pm, b^\pm$ зависят от ε. Дифференцируя (3.1) и решая относительно a^+, b^+ или a^-, b^-, легко проверить, что эти коэффициенты ограничены для решения уравнения (1.1) с ограниченными по ε данными Коши.

Теорема. Пусть в (1.2) x есть решение уравнения (1.1) с ограниченными по ε данными Коши $x_0 = x(0,\varepsilon)$, $x_1 = \dot{x}(0,\varepsilon)$. Если выполнены условия $1^\circ - 3^\circ$, то величина (1.2) является адиабатическим инвариантом уравнения (1.1) и удовлетворяет оценкам (1.4), (1.5). Если дополнительно потребовать выполнение условий $4^\circ - 5^\circ$, то $J(\varepsilon) = J(\infty,\varepsilon) - J(-\infty,\varepsilon) = O(\exp(-b\varepsilon^{-1}))$, где b – произвольное число такое, что $0 < b < a$.

Доказательство : Из (3.1) имеем

$$\frac{i\varepsilon}{2}W(v-v_0^{\pm},u_2^{\pm})=\frac{\widetilde{u}_2^{\pm}}{2}\left[\omega_1\left(v-\frac{1}{\omega_1^2-\omega_2^2}\cos\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau}\omega_2\,ds\right)-\right.$$
$$\left.-i\left(\varepsilon\dot{v}+\frac{\omega_2}{\omega_1^2-\omega_2^2}\sin\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau}\omega_2 ds\right)\right]+\varepsilon h_2^{\pm}=a^{\pm},$$

$$\frac{i\varepsilon}{2}W(u_1^{\pm},v-v_0^{\pm})=\frac{\widetilde{u}_1^{\pm}}{2}\left[\omega_1\left(v-\frac{1}{\omega_1^2-\omega_2^2}\cos\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau}\omega_2\,ds\right)+\right.$$
$$\left.+i\left(\varepsilon\dot{v}+\frac{\omega_2}{\omega_1^2-\omega_2^2}\sin\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau}\omega_2\,ds\right)\right]+\varepsilon h_1^{\pm}=b^{\pm},$$

где $h_j^-(\tau,\varepsilon), h_j^+(\tau,\varepsilon)$ ограничены при $\tau\in(-\infty;\infty)$, $\varepsilon>0$ и $\lim\limits_{\tau\to\pm\infty}h_j^{\pm}(\tau,\varepsilon)=0$. Следовательно, имеем

$$J(t,\varepsilon)=a^-b^-+\varepsilon h^-=a^+b^++\varepsilon h^+, \tag{3.2}$$

где $h^{\pm}(t,\varepsilon)$ ограничены и $\lim\limits_{t\to\pm\infty}h_j^{\pm}(t,\varepsilon)=0$. Оценка (1.4) сразу следует из (3.2). Как уже сказано выше, коэффициенты $a^{\pm}, b^{\pm}$ ограничены. Из результатов работы [4] следует, что $a^+b^+-a^-b^-=O(\varepsilon)$, если выполнены условия $1^\circ-3^\circ$, и $a^+b^+-a^-b^-=O(\exp(-b\varepsilon^{-1}))$, если выполнены условия $1^\circ-5^\circ$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Р. Оганесян, "О единственности решений задачи Коши и новая формула энергии", Изв. АН Армении, Математика, том 26, № 5, стр. 15 — 25, 1991.
2. В. И. Арнольд, Математические Методы Классической Механики, Москва, Наука, 1979.
3. Г. Р. Оганесян, "Оценки для функций ошибок асимптотических решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений", Изв. НАН Армении, Математика, том 31, № 1, 1996.
4. М. В. Федорюк, "Адиабатический инвариант системы линейных осциляторов и теория рассеивания", Дифференциальные Уравнения, Минск, том 12, № 6, стр. 1012 — 1018, 1976.
5. А. С. Бакай, Ю. Г. Степановский, Адиабатические Инварианты, Киев, Наукова Думка, 1981.
6. Г. М. Заславский, В. П. Мейтлиц, Н. Н. Филоненко, Взаимодействие Волн в Неоднородной Среде, Новосибирск, Наука, 1982.

17 августа 1998

Институт математики
НАН Армении