О МНОЖИТЕЛЯХ ВЕЙЛЯ ДЛЯ БЕЗУСЛОВНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ПО ОБЩЕЙ СИСТЕМЕ ФРАНКЛИНА

Г. Л. Михаелян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 33, № 6, 1998

Последовательность $\{\omega(n)\}_{n=0}^{\infty}$, $1 \leq \omega(0) \leq \omega(1) \leq \dots$ называется множителем Вейля для почти всюду (п.в.) безусловной сходимости рядов по системе $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$, если условие $\sum a_n^2 \omega(n) < +\infty$ гарантирует п.в. безусловную сходимость ряда $\sum a_n \varphi_n(t)$. В 1963 году П. Л. Ульянов доказал следующую теорему (см. [1] и [6], стр. 116).

Теорема 1. (П. Л. Ульянов). Условие сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \omega(n)} < +\infty \tag{1}$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы последовательность $\{\omega(n)\}_{n=1}^{\infty}$, $1 \leq \omega(1) \leq \omega(2) \leq \dots$ являлась бы множителем Вейля для п.в. безусловной сходимости рядов по системе Хаара.

В 1987 году Г. Г. Геворкян обобщил этот результат на ряды по системе Франклина (см. [2]): найденное условие (1) остается необходимым и достаточным для того, чтобы последовательность $\{\omega(n)\}_{n=0}^{\infty}$, $1 \leq \omega(0) \leq \omega(1) \leq \dots$ являлась бы множителем Вейля для п.в. безусловной сходимости рядов по системе Франклина. В этой заметке будет обобщен вышеназванный результат Г. Г. Геворкяна на ряды по общей системе Франклина ([3], [4]), удовлетворяющей некоторому условию регулярности.

Напомним определение общей системы Франклина, приведенное в [4]. Рассмотрим разбиение отрезка $[0, 1]$, определенное следующим образом: $\mathcal{P}_0 = \{0, 1\}$; $\mathcal{P}_j = \{t_{ji} : 0 \leq i \leq 2^j\}$, $0 = t_{j0} < t_{j1} < \dots < t_{j2^j} = 1$, $\mathcal{P}_j \subset \mathcal{P}_{j+1}$ и

$t_{j+1,2k} = t_{jk}$, $j \geq 0$, $0 \leq k \leq 2^j$. Обозначим $I_{jk} = [t_{j,k-1}; t_{jk}]$, $1 \leq k \leq 2^j$ и $\mathcal{I}_j = \{I_{jk}\}_{k=1}^{2^j}$. Нам понадобится разбиение $\mathcal{P}^n$, определенное следующим образом. $\mathcal{P}^{2^\mu} = \mathcal{P}_\mu$, $\mu \geq 0$. Пусть $n = 2^\mu + \nu$, ($n > 1$), $\mu \geq 0$, $1 \leq \nu \leq 2^\mu$. Обозначим $\mathcal{P}^n = \mathcal{P}^{2^\mu} \cup \{t_{\mu+1,2k-1}\}_{k=1}^\nu$. Точки деления $\mathcal{P}^n$ обозначим через $\{t_k^n\}_{k=0}^n$. В порядке возрастания, $t_k^n = t_{\mu+1,k}$ для $0 \leq k \leq 2\nu$, и $t_k^n = t_{\mu,k-\nu}$ для $2\nu+1 \leq k \leq n$. Обозначим $[n] = \mu$, $I_k^n = [t_{k-1}^n; t_k^n]$, $1 \leq k \leq n$ и $\mathcal{I}^n = \{I_k^n\}_{k=1}^n$. Возьмем $f_0(t) \equiv 1$ и $f_1(t) = 2\sqrt{3}(t - \frac{1}{2})$. Для $f_n(x)$ возьмем непрерывную на $[0,1]$ функцию, которая линейна на каждом I_k^n и удовлетворяет условиям:

- (1) f_n ортоговальна функциям $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$ в $L_2[0,1]$ и $\|f_n\|_{L_2} = 1$;
- (2) $f_n(t_{2\nu-1}^n) > 0$.

Полученную ортонормальную систему функций $\{f_n(t)\}_{n=0}^\infty$ назовем общей системой Франклина.

Обозначим $\{n\} = [t_{2\nu-2}^n; t_{2\nu}^n]$. Общая система Франклина $\{f_n(t)\}_{n=0}^\infty$ называется слабо регулярной (WR), если порождающая последовательность разбиений $\{\mathcal{P}_j\}_{j=0}^\infty$ удовлетворяет условию

$$\frac{1}{\gamma} \leq \frac{|I_{j,2k-1}|}{|I_{j,2k}|} \leq \gamma \text{ для некоторого } \gamma \geq 1, \text{ всех } j > 0 \text{ и } 1 \leq k \leq 2^{j-1}.$$

Она называется сильно регулярной (SR), если

$$\frac{1}{\gamma} \leq \frac{|I_{j,k-1}|}{|I_{j,k}|} \leq \gamma \text{ для некоторого } \gamma \geq 1, \text{ всех } j > 0 \text{ и } 1 \leq k \leq 2^j.$$

Нам понадобятся следующие результаты из [4]: если $\{f_n(t)\}_{n=0}^\infty$ - WR-система, то существует постоянная C_1 такая, что

$$C_1^{-1} |\{n\}|^{\frac{1}{2}} \leq \|f_n\|_1 \leq C_1 |\{n\}|^{\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

$$C_1^{-1} |\{n\}|^{-\frac{1}{2}} \leq \max_{t \in [0,1]} |f_n(t)| \leq C_1 |\{n\}|^{-\frac{1}{2}}. \quad (3)$$

Обозначим $\lambda_k^n := t_k^n - t_{k-1}^n = |I_k^n|$, $a_k^n := f_n(t_k^n)$. Известно (см. [4]), что

$$\begin{aligned} a_{2\nu-1}^n &> 0; \quad \text{sgn}(a_k^n) = -\text{sgn}(a_{k-1}^n), \quad 1 \leq k \leq n; \\ a_1^n &= -2a_0^n; \quad 2 + \frac{3}{2} \frac{\lambda_k^n}{\lambda_{k+1}^n} \leq \left| \frac{a_{k+1}^n}{a_k^n} \right| \leq 2 + 2 \frac{\lambda_k^n}{\lambda_{k+1}^n}, \quad 1 \leq k \leq 2\nu-3; \\ a_{n-1}^n &= -2a_n^n; \quad 2 + \frac{3}{2} \frac{\lambda_{k+1}^n}{\lambda_k^n} \leq \left| \frac{a_{k-1}^n}{a_k^n} \right| \leq 2 + 2 \frac{\lambda_{k+1}^n}{\lambda_k^n}, \quad 2\nu+1 \leq k \leq n-1. \end{aligned} \quad (4)$$

Также (см. [4]), существует постоянная C_2 такая, что

$$C_2^{-1} \leq \left| \frac{a_{2\nu-1}^n}{a_{2\nu-2}^n} \right| \leq C_2, \quad C_2^{-1} \leq \left| \frac{a_{2\nu-1}^n}{a_{2\nu}^n} \right| \leq C_2. \quad (5)$$

Следующая теорема доказана в [5].

Теорема 2. Пусть $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ – SR–система Франклина. Для любого подмножества $E \subset [0, 1]$ положительной лебеговой меры безусловная сходимость п.в. ряда $\sum a_n f_n(t)$ на E эквивалентна абсолютной сходимости п.в. этого ряда на E .

Основным результатом этой работы являются следующие две теоремы.

Теорема 3. Пусть $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ – WR–система. Условие сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\{n\}|}{\omega(n)} < +\infty \quad (6)$$

является достаточным для того, чтобы последовательность $\{\omega(n)\}_{n=0}^{\infty}$, $1 \leq \omega(0) \leq \omega(1) \leq \dots$ была бы множителем Вейля для п.в. безусловной сходимости рядов по системе $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Доказательство : Предположим, что выполнено условие (6) и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \omega(n) < +\infty$. Достаточно доказать, что ряд $\sum a_n f_n(t)$ абсолютно сходится п.в. на $[0, 1]$.

Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| |\{n\}|^{1/2} &= \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \sqrt{\omega(n)} \frac{|\{n\}|^{1/2}}{\sqrt{\omega(n)}} \leq \\ &\leq \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \omega(n) \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\{n\}|}{\omega(n)} \right\}^{1/2} < +\infty. \end{aligned}$$

Учитывая (2), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 |a_n f_n(t)| dt = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \|f_n\|_1 \leq C_1 \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |\{n\}|^{1/2} < +\infty. \quad (7)$$

Отсюда следует п.в. абсолютная сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(t)$.

Теорема 4. Пусть $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ – SR–система. Условие сходимости (6) является необходимым и достаточным для того, чтобы последовательность $\{\omega(n)\}_{n=0}^{\infty}$ была множителем Вейля для п.в. безусловной сходимости рядов по системе $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Доказательство : Достаточность устанавливается аналогично вышеприведенному доказательству Теоремы 3. Докажем необходимость. Имеем

$$\sum_{n=2^{\mu}+1}^{2^{\mu+1}} |\{n\}| = 1, \quad \mu \geq 1.$$

Допустим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\{n\}|}{\omega(n)} = +\infty. \quad (8)$$

Тогда

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\omega(2^\mu)} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\omega(2^\mu)} \sum_{n=2^{\mu+1}}^{2^{\mu+1}} |\{n\}| \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\{n\}|}{\omega(n)} = +\infty.$$

Можно выбрать монотонно возрастающие положительные числа q_μ такие, что

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\omega(2^{\mu+1}) q_\mu} = +\infty, \quad \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\omega(2^{\mu+1}) q_\mu^2} < +\infty. \quad (9)$$

Для $2^\mu + 1 \leq n \leq 2^{\mu+1}$ положим $A_\mu = \frac{1}{\omega(2^{\mu+1}) q_\mu}$ и $a_n = A_\mu |\{n\}|^{1/2}$. Имеем

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \omega(n) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{n=2^{\mu+1}}^{2^{\mu+1}} \frac{\omega(n) |\{n\}|}{\omega(2^{\mu+1})^2 q_\mu^2} \leq \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\omega(2^{\mu+1}) q_\mu^2} < +\infty.$$

В силу Теоремы 2 достаточно показать, что $\sum |a_n f_n(t)| = +\infty$, $t \in [0, 1]$.

Обозначим через $[a, b]^-$ и $[a, b]^+$ соответственно левую и правую половины отрезка $[a, b]$. Легко проверить, что если $y(x)$ линейная функция на $[a, b]$, $y(a)y(b) < 0$ и либо $|y(b)| < \frac{1}{2}|y(a)|$ и $x \in [a, b]^-$, либо $|y(a)| < \frac{1}{2}|y(b)|$ и $x \in [a, b]^+$, то имеем

$$|y(x)| \geq \frac{1}{4}|y(a)| \quad \text{или} \quad |y(x)| \geq \frac{1}{4}|y(b)|. \quad (10)$$

Лемма. Для любого $x \in [0, 1]$ существует μ_x такое, что для любого $\mu > \mu_x$ существует n такая, что $2^\mu < n < 2^{\mu+2}$ и $|f_n(x)| > C_3 \|f_n\|_\infty$, где C_3 — абсолютная постоянная.

Доказательство: Если $x = 0$ или $x = 1$, то возьмем $n = 2^\mu + 1$ или $n = 2^{\mu+1}$, соответственно. Тогда, учитывая (3) — (5), получим $|f_n(x)| = \frac{1}{2} |f_n(t_{2^\nu-1}^n)| > \frac{1}{2C_1 C_2} \|f_n\|_\infty$. Пусть $x \in (0, 1)$ и μ настолько большое, что $x \in [t_{\mu, i-1}; t_{\mu i}]$, где $2 \leq i \leq 2^\mu - 1$. Рассмотрим возможные расположения точки x в $[t_{\mu, i-1}; t_{\mu i}]$ и возьмем соответствующие значения n . Возможны следующие случаи:

- (а) $x \in [t_{\mu, i-1}; t_{\mu i}]^-$. Тогда $n = 2^\mu + i - 1$.
- (б) $x \in [t_{\mu, i-1}; t_{\mu i}]^+$. Тогда имеем подслучаи:
  - (б1) $x \in [t_{\mu+1, 2i-2}; t_{\mu+1, 2i-1}]$,   (б2) $x \in [t_{\mu+1, 2i-1}; t_{\mu+1, 2i}]^+$,
  - (б3) $x \in [t_{\mu+1, 2i-1}; t_{\mu+1, 2i}]^-$.

В случаях (б1) и (б2) возьмем $n = 2^\mu + i + 1$, а в случае (б3) возьмем $n = 2^{\mu+1} + 2i - 1$. Из (10) и (4) следует, что $|f_n(x)| \geq \frac{1}{4} |f_n(t_{2^\nu}^n)|$ в случаях (а) и (б3), $|f_n(x)| \geq \frac{1}{4} |f_n(t_{2^\nu-3}^n)|$ в случае (б1) и $|f_n(x)| \geq \frac{1}{4} |f_n(t_{2^\nu-2}^n)|$ в случае (б2). Учитывая (4) и (5) и свойство сильной регулярности заключаем, что существует постоянная C_3 такая, что $|f_n(x)| > C_3 \|f_n\|_\infty$. Лемма доказана.

Теперь можем завершить доказательство Теоремы 4. Из (3) следует, что $\| \{ \{n\}^{1/2} |f_n| \|_{\infty} \geq \frac{1}{C_1}$. Тогда учитывая Лемму, получим

$$\sum_{n=2^{2^p+1}}^{2^{2^p+2}} \left| \{n\}^{1/2} |f_n(t)| \right| > \frac{C_3}{C_1}, \quad t \in [0, 1].$$

Имеем

$$\begin{aligned} \sum |a_n f_n(t)| &= \sum_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu} \sum_{n=2^{2^{\mu}}+1}^{2^{2^{\mu}+1}} \left| \{n\}^{1/2} |f_n(t)| \right| \geq \\ &\geq \sum_{\mu=1}^{\infty} A_{2\mu} \sum_{n=2^{2^{2\mu-1}}+1}^{2^{2^{2\mu}+1}} \left| \{n\}^{1/2} |f_n(t)| \right| \geq \frac{C_3}{C_1} \sum_{\mu=1}^{\infty} A_{2\mu+1} = +\infty. \end{aligned}$$

Теорема 4 доказана.

Следствие. Пусть $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ — WR-система. Для того, чтобы последовательность $\{\omega(n)\}_{n=0}^{\infty}$, $1 \leq \omega(0) \leq \omega(1) \leq \dots$ была бы множителем Вейля для п.в. безусловной сходимости рядов по системе $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ достаточно, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\log_2(1+\frac{1}{\gamma})} \omega(n)} < +\infty.$$

Доказательство следует из Теоремы 3 и очевидного неравенства

$$C_4^{-1} \frac{1}{n^{\log_2(1+\gamma)}} \leq |\{n\}| \leq C_4 \frac{1}{n^{\log_2(1+\frac{1}{\gamma})}} \quad (11)$$

выполняемого для всех n и некоторой постоянной C_4 . Неравенство (11) показывает, что для классической системы Франклина (SR-система с $\gamma = 1$) Теорема 4 приводит к результату, полученному в [2].

Автор выражает благодарность профессору Г. Г. Геворкяну за постановку задачи и обсуждения результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Л. Ульянов, "О множителях Вейля для безусловной сходимости", Мат. Сборник, том 60 (102), № 1, стр. 39 — 62, 1967.
2. Г. Г. Геворкян, "О множителях Вейля для безусловной сходимости рядов по системе Франклина", Мат. Заметки, том 41, № 6, стр. 789 — 797, 1987.
3. Z. Ciesielski, A. Kamont, "Projections onto piecewise linear functions, Funct. Approx. Comment. Math., vol. 25, pp. 129 — 143, 1997.
4. G. Gevorgyan, A. Kamont, "On general Franklin systems", Dissert. Math., vol. 374, Warszawa, 1998.
5. Г. Г. Геворкян, Г. Л. Микаелян, "О безусловной и абсолютной сходимости рядов по общей системе Франклина" (в печати).
6. Б. С. Капьян, А. А. Саакян, Ортогональные Ряды, Москва, Наука, 1984.