ОПТИМАЛЬНАЯ ВЫБОРКА И ТОЧНОСТЬ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ ИЗОТРОПНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

А. Х. Симонян,[1] М. Р. Лидбеттер[2]

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 33, № 6, 1998

Результаты, касающиеся точности полиномиального оценивания действительнозначных изотропных случайный полей в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$ получены с использованием приближения особого типа многочленами достаточно высокой степени. Простое условие на ковариационную функцию гарантирует существование непрерывной версии случайного поля и дает возможность получить рекомендации по выбору шага оптимального квантования для регулярного выборочного метода при соответствующем алгоритме восстановления выборочных функций. Даны верхние экспоненциальные оценки для вероятностей больших уклонений для полей ошибок. Эти методы иллюстрируются на примерах при определенных условиях на энтропию параметрического пространства.

§1. ВВЕДЕНИЕ

При выборке в случае непрерывных сигналов выбор шага квантования очевидным образом важен. Он должен быть достаточно мал для как можно более точного восстановления выборочных функций, но достаточно велик для экономии объема компьютерной памяти. Качество восстановления реализаций зависит от поведения ковариационной функции случайного процесса в начале координат параметрического пространства.

Нужно также иметь в виду, что ковариационные функции недифференцируемых и дифференцируемых случайных процессов могут иметь визуально похожие

[1] *Данное исследование финансировано советом инностранных стипендий Фулбрайт и агенством Информации США. Частично финансировано грантом № N00014-93-1-0841 военно-морских исследований и контрактом № . F49620-95-1-0138 научных исследований министерства военно-воздушных сил.*

[2] *Исследование финансировано грантом № N00014-93-1-0841 военно-морских исследований.*

графики, хотя в этих случаях оптимальные шаги квантования и алгоритмы восстановления реализаций существенно отличаются. Таким образом, оценивание ковариационных функций на основе ограниченных эмпирических данных должно осуществляться достаточно точно. Для иллюстрации этого рассмотрим ковариационные функции вида

$$r^{(1)}(t) = 1 - \sqrt{t}, \quad r^{(2)}(t) = \frac{1}{2}\left(|1+t|^{3/2} + |1-t|^{3/2} - 2|t|^{3/2}\right),$$

$$r^{(3)}(t) = \exp(-t^2), \quad r^{(4)}(t) = \frac{\sin(2.4t)}{2.4t}, \quad t \in [0,1].$$

Графики этих функций показаны на Рис. 1.

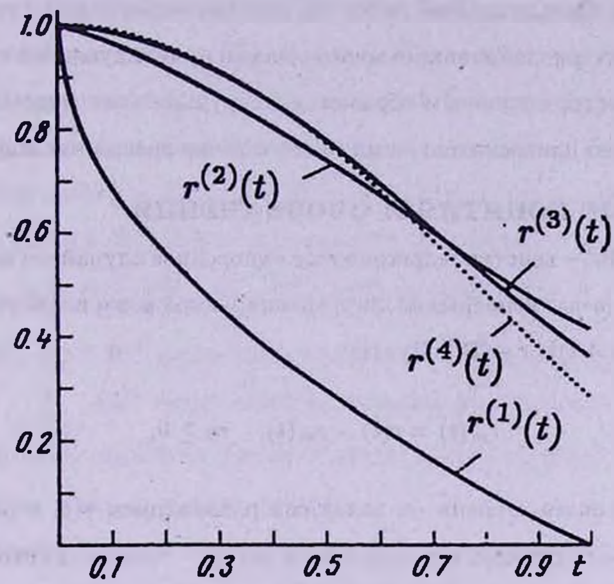

Рис. 1.

Здесь $r^{(1)}(\cdot)$ и $r^{(2)}(\cdot)$ соответствуют стационарным процессам с недифференцируемыми траекториями, тогда как $r^{(3)}(\cdot)$ и $r^{(4)}(\cdot)$ соответствуют дифференцируемым стационарным процессам. Отметим, что $r^{(3)}(\cdot)$ и $r^{(4)}(\cdot)$ выглядят аналогично $r^{(2)}(\cdot)$, но как увидим позже, оптимальные шаги квантования весьма разные. Во многих физических и технических применениях выборочные траектории непрерывных случайных функций обычно квантуют из источника данных, делая их доступными для компьютерного хранения и обработки.

В теории связи и передачи сигналов классическая выборочная теорема Шеннона широко используется для квантования и оценивания выборочных траекторий случайных процессов с ограниченным спектром. Однако, этот подход не срабатывает для процессов с неограниченным спектром, имеющих, например, ковариационные функции вида $r^{(1)}(\cdot)$ или $r^{(2)}(\cdot)$. Для этих случаев можно использовать регрессионные алгоритмы, и схемы квантования могут быть получены для гауссовских стационарных процессов с неограниченным спектром [2], [3]. Обобщения регрессионных оценок не практичны с точки зрения численного анализа [11] (алгоритмы восстановления реализаций зависят от значений ковариационной функции). Это же справедливо и при оценивании тригонометрическими многочленами [8].

В отличие от этого квантование и оценивание, рассматриваемые в настоящей статье, не предполагают гауссовости и могут быть сформулированы для многомерных случаев. Предложенный метод оценивания выборочных траекторий так называемыми интерполяционными многочленами индивидуальной степени имеет много преимуществ, и главным образом, конструкция этих многочленов делает их вычислительно привлекательными чисто с точки зрения численного анализа.

§2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть $\zeta(t)$, $t \in \mathbb{R}^d$ – действительнозначное однородное случайное поле с $E\zeta(t) = 0$, $E\zeta^2(t) < \infty$ и m-раз непрерывно дифференцируемой ковариационной функцией $r(t) = E\{\zeta(\tau)\zeta(\tau+t)\}$, $t \in \mathbb{R}^d$. Пусть

$$r_m(t) = r(t) - p_m(t), \quad m \geq 0, \tag{1}$$

где $p_m(t)$ – многочлен степени m, заданный разложением $r(t)$ в ряд Тейлора в окрестности $t = 0$, причем как $r(t)$, так и $p_m(t)$ - четные функции. Если m-нечетное число, то $p_m(t) = p_{m-1}(t)$. Далее, если $r(t)$ изотропно (т.е. зависит от евклидовой нормы $|t| = \sqrt{\sum t[l]^2}$ точки t), то

$$p_m(t) = p_{m-1}(t) = \sum_{j=0}^{(m-1)/2} c_j |t|^{2j}, \quad \text{причем} \quad (-1)^j c_j > 0. \tag{2}$$

Теорема 1. (Дж. Кент [6]) **Если $r(t)$ d-раз непрерывно–дифференцируема и**

$$|r_d(t)| = O\left(\frac{|t|^d}{|\log|t||^{3+\gamma}}\right), \quad |t| \to 0 \tag{3}$$

для некоторого $\gamma > 0$, то для случайного поля $\{\zeta(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$ существует версия с непрерывными реализациями.

Пример в [6] показывает, что условие (3) в Теореме 1 не может быть значительно ослаблено.

Замечание 1. В одномерном случае, когда $|r_1(t)| = r(0) - r(t)$, Теорема 1 является известным классическим результатом [4].

Замечание 2. Если для некоторого $\beta > 0$ выполняется более простое условие

$$|r_d(t)| = O\left(|t|^{d+\beta}\right), \quad |t| \to 0, \tag{4}$$

то имеет место и (3).

В этой статье мы рассматриваем случайные поля, удовлетворяющие условию (4), а $\zeta(t)$ обозначает непрерывную версию. Буквами i, j, k, m, n будем обозначать целые числа. Вектор $t = (t[1], ..., t[d]) \in \mathbb{R}^d$ назовем **позиционной точкой**. Буквы s и t будем использовать для позиционных точек в $\mathbb{R}^d$. $\mathbb{Z}^d$ является целочисленной решеткой и $\mathbb{Z}^d_+ = \{u \in \mathbb{Z}^d : u[l] \geq 0, \ l = 1, ..., d\}$. Буквы u, v, y, w будем использовать для элементов из $\mathbb{Z}^d_+$. Таким образом, $L_d(k) = \{u \in \mathbb{Z}^d_+ : u[l] \leq k, \ l = 1, ..., d\}$ обозначает кубическую решетку (содержащую $(k+1)^d$ позиционных точек), и $C_d = \{t \in \mathbb{R}^d : 0 \leq t[l] \leq 1, \ l = 1, ..., d\}$ есть единичный куб в $\mathbb{R}^d$. Для $u \in \mathbb{Z}^d_+$ можно использовать две нормы :

$$\text{(i)} \quad ||u||_1 = \sum_l u[l] \quad \text{и} \quad \text{(ii)} \quad ||u||_\infty = \max_l\{u[l]\}.$$

Для $u \in \mathbb{Z}^d_+$ и $t \in \mathbb{R}^d$ определим одночлен $t^u = \prod_{l=1}^{d} t[l]^{u[l]}$ и будем говорить, что многочлен $\sum_{||u||_1 \leq k} a_u t^u$ имеет **общую степень** k, тогда как $\sum_{||u||_\infty \leq k} a_u t^u$ имеет индивидуальную степень k. Таким образом, $p_m(t)$ в (1) имеет общую степень m, если m четно, и $m-1$, если m нечетно.

Введем следующий класс "интерполяционных многочленов", см. [6]. Возмем $h > 0$ и рассмотрим следующий регулярный выборочный метод или h-квантование параметрического пространства $\mathbb{R}^d$ с основным шагом h. Для $n \geq 1$ пусть $I_{h,y,n} = hy + hC_d = h(y + C_d)$, $y \in L_d(n-1)$, будет кубом с нижней вершиной в hy и ребрами длины h. Зафиксируем $k \geq 1$, $y \in L_d(n-1)$, $h > 0$ и для $t \in I_{h,y,n}$ положим $t = h(y+s)$, $s \in C_d$. Интерполяционный многочлен индивидуальной степени $k \geq 1$ определим как

$$q_h(y+s) = q(h(y+s)) = \sum_{||u||_\infty \leq k} A_u s^u,$$

где

$$A_u = \sum_{||v||_\infty \leq k} a_{uv} \zeta\left(h\left(y + \frac{v}{k}\right)\right),$$

a_{uv} определяются $(k+1)^d$ связующими условиями : $q\left(h\left(y+\frac{v}{k}\right)\right) = \zeta\left(h\left(y+\frac{v}{k}\right)\right)$. Таким образом, эти коэффициенты зависят от k и d, но не зависят от функции $\zeta(t)$

и от y и h. Если $k \geq 1$, то многочлен $q_h(t)$, ограниченный гранью куба $h(y+C_d)$, является интерполяционным многочленом в $\mathbb{R}^{d-1}$. На $(k+1)^{d-1}$ позиционных точках куба $h(y+L_d(k))$, лежащих на этой грани, предыдущий многочлен совпадает с исходным полем. На грани между любыми двумя смежными клетками, $q_h(t)$ сводится к одному и тому же $(d-1)$-мерному интерполяционному многочлену, проходящему через $(k+1)^{d-1}$ позиционные точки. Следовательно, $q_h(t)$ непрерывен (хотя и недифференцируем) на границах смежных клеток.

§3. ПРИРАЩЕНИЯ И ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Определение 1. Для $\zeta(t)$, $t \in \mathbb{R}^d$ рассмотрим линейную комбинацию $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \zeta(t_i)$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$ суть весовые коэффициенты, а n – число фиксированных позиций $t_i \in \mathbb{R}^d$. Такую линейную комбинацию будем называть **приращением k-го порядка** $(k \geq 1)$, если для всех $w \in \mathbb{Z}_+^d$ с $||w||_1 \leq k$ имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i t_i^w = 0.$$

Обозначим ошибку полиномиального оценивания $\zeta(t)$ (поле ошибок) через

$$\widehat{\zeta}_h(y+s) = \zeta(h(y+s)) - q(h(y+s)) = \zeta(h(y+s)) -$$

$$- \sum_{||v||_\infty \leq k} \left(\sum_{||u||_\infty \leq k} a_{uv} s^u \right) \zeta\left(h\left(y+\frac{v}{k}\right)\right),$$

и пусть

$$\widehat{r}_{h,y}(s,z) = cov\left[\widehat{\zeta}_h(y+s), \widehat{\zeta}_h(y+z)\right], \quad s,z \in C_d.$$

Лемма 1. Поле ошибок циклически стационарно (периодически коррелировано), т.е. $\widehat{r}_{h,y}(s,z) = \widehat{r}_{h,0}(s,z)$ и

$$\widehat{r}_h(s,z) = \widehat{r}_{h,0}(s,z) = r(h(s-z)) -$$

$$- \sum_{||u||_\infty \leq k} \left\{ \sum_{||v||_\infty \leq k} a_{uv} \left[r\left(h\left(s-\frac{v}{k}\right)\right) z^u + r\left(h\left(z-\frac{v}{k}\right)\right) s^u \right] \right\} +$$

$$+ \sum_{||u||_\infty \leq k} \sum_{||u'||_\infty \leq k} \left[\sum_{||v||_\infty \leq k} \sum_{||v'||_\infty \leq k} a_{uv} a_{u'v'} r\left(\frac{h}{k}(v-v')\right) s^u z^{u'} \right]. \tag{5}$$

Доказательство : следует из шаблонных вычислений.

Далее, не умаляя общности (см. Лемму 1), рассмотрим ошибку $\widehat{\zeta}_h(s)$ на C_d (эквивалентно случаю $y = 0$). Следующая лемма играет ключевую роль.

Лемма 2. Поле ошибок $\widehat{\zeta}_h(s)$ является приращением k-ого порядка для поля $\zeta(hs)$, $s \in C_d$.

Доказательство : Согласно Определению 1, $\widehat{\zeta}_h(s)$ является суммой вида $\sum \alpha_i \zeta(t_i)$, где

$$\alpha_0 = 1, \quad t_0 = hs, \quad \alpha_v = \sum_{||u||_\infty \le k} a_{uv} s^u, \quad t_v = h\frac{v}{k}, \quad ||v||_\infty \le k.$$

Нужно проверить, что $\sum \alpha_i t_i^w = 0$ для всех $w \in \mathbb{Z}_+^d$ с $||w||_1 \le k$. Имеем

$$\sum_i \alpha_i \zeta(t_i) = \alpha_0 \zeta(t_0) + \sum_{||v||_\infty \le k} \alpha_v \zeta(t_v),$$

$$\sum_i \alpha_i t_i^w = \alpha_0 t_0^w + \sum_{||v||_\infty \le k} \alpha_v t_v^w = (hs)^w - \sum_{||v||_\infty \le k} \left[\sum_{||u||_\infty \le k} a_{uv} \left(\frac{hv}{k}\right)^w \right] s^u =$$

$$= (hs)^w - \sum_{||u||_\infty \le k} \left[\sum_{||v||_\infty \le k} a_{uv} \left(\frac{hv}{k}\right)^w \right] s^u = (hs)^w - \sum_{||u||_\infty \le k} A_u s^u = (hs)^w - q(hs),$$

где $A_u = \sum\limits_{||v||_\infty \le k} a_{uv} \left(\frac{hv}{k}\right)^w$ суть коэффициенты интерполяционного многочлена $q(hs) = \sum\limits_{||u||_\infty \le k} A_u s^u$ для функции $g(hs) = (hs)^w$. Как и выше, постоянные a_{uv} не зависят от $g(t)$, а определются $(k+1)^d$ связующими условиями

$$g\left(\frac{hv}{k}\right) = q\left(\frac{hv}{k}\right), \quad ||v||_\infty \le k.$$

Следовательно, интерполяционный многочлен порядка k совпадает с простым многочленом $g(t) = t^w$, $||w||_1 \le k$ в $(k+1)^d$ позициях, и следовательно, они тождественны. Таким образом

$$\sum_i \alpha_i t_i^w = (hs)^w - q(hs) = (hs)^w - g(hs) = (hs)^w - (hs)^w = 0.$$

Лемма 3. Предположим, что ковариационная функция $r(t)$ поля $\zeta(t)$ m-раз непрерывно дифференцируема ($m \ge 0$). Тогда в формуле (5) значения функции $r(t)$ можно заменить их "иррегулярными" частями $r_m(t)$, задаваемыми согласно (1) для $2k \ge m$, если m четное, и $2k \ge m-1$, если m нечетное.

Доказательство : аналогично рассуждениям Леммы 2 в [6], хотя наше утверждение несколько более общее. Утверждение предыдущей Леммы 3 остается в силе и для средне квадратической ошибки (СКО) при оценивании поля $\zeta(t)$ интерполяционными многочленами индивидуальной степени k.

§4. ОПТИМАЛЬНАЯ РЕГУЛЯРНАЯ ВЫБОРКА И ТОЧНОСТЬ ОЦЕНИВАНИЯ

Пусть $\zeta(t)$, $t \in \mathbb{R}^d$ - изотропное случайное поле с m-раз непрерывно дифференцируемой ковариационной функцией $r(t)$. Пусть для $\delta_0 > 0$, постоянной b, четного целого m такого, что $m + \alpha \geq d$

$$r_m(t) = (-1)^{m/2+1} b^2 |t|^{m+\alpha}, \quad |t| \leq \delta_0, \quad 0 < \alpha < 2. \tag{6}$$

Так как из (6) следует (4) для некоторого $\beta > 0$, то $\zeta(t)$ можно предполагать непрерывной. Для гауссовских полей непрерывность следует из более слабого условия [1]

$$r(0) - r(t) = O\left(\frac{1}{|\log|t||^{1+\varepsilon}}\right), \quad \varepsilon > 0,$$

поэтому условие $m + \alpha \geq d$ можно опустить.

Обозначим дисперсию поля ошибок (или СКО) через $\sigma^2_{h,k}(s)$, и предположим, что $2k \geq m$.

Определение 2. Шаг квантования h_0 называется основным ε-оптимальным для некоторого $\varepsilon > 0$, если

$$h_0 = \sup\left\{h : \max_{s \in C_d} \sigma^2_{h,k}(s) \leq \varepsilon^2, \ 0 < h \leq \delta_0 d^{-1/2}\right\}.$$

Теорема 2. При условии (6) для $s \in C_d$, если $\zeta(hs) \not\equiv q_h(s)$,

(i)
$$\sigma^2_{h,k}(s) = -2 \sum_{\|u\|_\infty \leq k} \left[\sum_{\|v\|_\infty \leq k} a_{uv} r_m\left(h\left(s - \frac{v}{k}\right)\right) s^u\right] +$$
$$+ \sum_{\|u\|_\infty \leq k} \sum_{\|u'\|_\infty \leq k} \left[\sum_{\|v\|_\infty \leq k} \sum_{\|v'\|_\infty \leq k} a_{uv} a_{u'v'} r_m\left(\frac{h}{k}(v - v')\right) s^{u+u'}\right];$$

(ii) $\sigma^2_{h,k}(s) = b^2 h^{m+\alpha} \sigma^2_k(s)$, где

$$\sigma^2_k(s) = (-1)^{m/2}\left[2 \sum_{\|u\|_\infty \leq k} \sum_{\|v\|_\infty \leq k} a_{uv} \left|s - \frac{v}{k}\right|^{m+\alpha} s^u -\right.$$
$$\left. - \sum_{\|u\|_\infty \leq k} \sum_{\|u'\|_\infty \leq k} \sum_{\|v\|_\infty \leq k} \sum_{\|v'\|_\infty \leq k} a_{uv} a_{u'v'} \left|\frac{v - v'}{k}\right|^{m+\alpha} s^{u+u'}\right], \quad \sigma^2_k(s) \not\equiv 0;$$

(iii) $h_{opt} = h_0 = \left(\frac{\varepsilon^2}{b^2 \sigma^2_k}\right)^{1/(m+\alpha)}$, где $\sigma^2_k = \max_{s \in C_d} \sigma^2_k(s)$.

Доказательство : легко следует из Лемм 1 – 3, условия (6) и Определения 2.

Утверждение (ii) Теоремы 2 задает скорость убывания СКО по h и точное значение коэффициента $b^2 \sigma^2_k(s)$. Отсюда также следует, что $\sigma^2_k(s)$ зависит от d и неубывает по d.

Теорема 3. **Пусть $\zeta(t)$, $t \in \mathbb{R}$ – стационарный случайный процесс с абсолютно непрерывной спектральной компонентой. При условии (6) наименьшая подходящая степень для интерполяционного многочлена будет $k = 1$, а интерполяционный многочлен индивидуальной степени 1 является ломаной функцией. Следующие рекомендации по выбору h_{opt} обеспечивают СКО $= \varepsilon$, если $0 < h_0 < \delta_0$:**

$$(a) \quad h_{opt} = \left(\frac{2\varepsilon^2}{b^2(2^{2-\alpha}-1)}\right)^{1/\alpha}, \quad \text{для} \quad m = 0,\ 1 \le \alpha < 2$$

(для гауссовского процесса это справедливо при $0 < \alpha < 2$);

$$(b) \quad h_{opt} = \left(\frac{2\varepsilon^2}{b^2(1-2^{-\alpha})}\right)^{1/(2+\alpha)}, \quad \text{для} \quad m = 2;$$

$$(c) \quad h_{opt} = 2\left(\frac{\lambda_4\varepsilon^2}{6(\lambda_4-\lambda_2^2)}\right)^{1/4}, \quad \text{для} \quad m \ge 4,$$

где λ_i является i-ым спектральным моментом, причем $\lambda_0 = 1$.

Доказательство : Имеем $d = 1$, $k = 1$ и

$$q(hs) = \sum_{u=0}^{1}\sum_{v=0}^{1} a_{uv}\zeta(hv)s^u, \quad s \in [0,1],$$

$$q(hv) = \zeta(hv), \quad v = 0, 1.$$

Следовательно, $a_{00} = a_{11} = 1$, $a_{01} = 0$, $a_{10} = -1$ и $q(hs) = (1-s)\zeta(0) + s\zeta(h)$, $s \in [0,1]$. Из Теоремы 2 и вычисления σ_1^2 получаем (a) при $m = 0$, и (b) когда $m = 2$. Случай (c) можно проверить непосредственным вычислением σ_1^2 для $m \ge 4$. В последнем случае "регулярная" часть ковариационной функции играет решающую роль, так как $2k < m$, и мы не можем применить Теорему 2. Для случаев (a) и (b) Теорема 2 применима, и следовательно, "иррегулярная" часть ковариационной функции становится решающей.

Замечание 3. Случай (a) соответствует процессам, которые недифференцируемы в среднем квадратическом ($m = 0$ и $2k > m$), случай (b) соответствует один раз дифференцируемым процессам ($m = 2$ и $2k = m$), а случай (c) соответствует процессам, которые по крайней мере дважды дифференцируемы в среднем квадратическом ($m \ge 4$ и $2k < m$).

Замечание 4. Если, дополнительно предположить, что процесс $\zeta(t)$ гауссовский и $m = 0$, то наилучший регрессионный алгоритм для оценивания $\zeta(hs)$, $s \in [0,1]$, является функцией регрессии $E\{\zeta(hs)|\zeta(0),\zeta(h)\}$, см. [3]. Далее, с вероятностью 1, функция регрессии асимптотически является "многочленом Лидстоуна" степени α, $0<\alpha<2$, при $h\to 0$, т.е.

$$E\{\zeta(hs)|\zeta(0),\zeta(h)\}\sim\frac{1}{2}[1-s^\alpha+(1-s)^\alpha]\zeta(0)+\frac{1}{2}[1+s^\alpha-(1-s)^\alpha]\zeta(h)=$$

$$=\frac{1}{2}[\zeta(0)+\zeta(h)]+\frac{1}{2}[\zeta(h)-\zeta(0)][s^\alpha-(1-s)^\alpha],\quad s\in[0,1],\quad h\to 0. \qquad (7)$$

Заметим, что для малых значений h отклонение функции регрессии (7) от интерполяционного многочлена индивидуальной степени 1 (прямолинейный отрезок) определяется как $\Delta_\alpha(s)=s^\alpha-(1-s)^\alpha+1-2s,\quad s\in[0,1]$. Например, $\max\limits_{0\le s\le 1,\ 1\le\alpha<2}|\Delta_\alpha(s)|\approx 0.0268$, и график $\Delta_{3/2}(s)$ задан на Рис. 2.

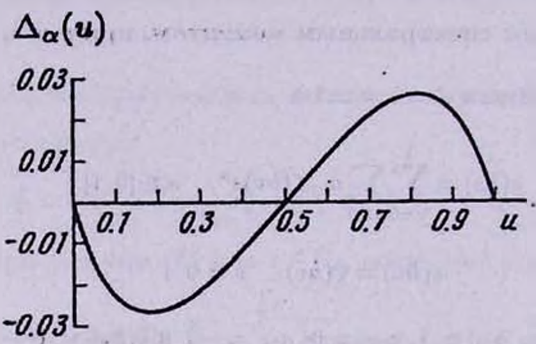

Рис. 2.

Более того, для оценки (7), $\max\limits_{s\in[0,1]}$ СКО (МСКО) $=b^2h^\alpha\sigma_1^2$ приводит к тому же самому h_{opt}. Это показывает, что интерполяционный многочлен степени 1, имеющий ту же оптимальность что и (7), является более простым для вычислений и поэтому предпочтителен чем (7).

Замечание 5. В случаях (b) и (c), $E\{\zeta(hs)|\zeta(0),\zeta(h)\}$ асимптотически является интерполяционным многочленом степени 1, при $h\to 0$, и вновь МСКО $=b^2h^{m+\alpha}\sigma_1^2$, см. [10].

Теорема 4. Пусть $\zeta(t)$, $t\in\mathbb{R}^2$ – изотропное гауссовское случайное поле с $E\zeta(t)\equiv 0$ и ковариационной функцией

$$r(t)=1-b^2|t|^\alpha,\quad |t|\le\delta_0,\quad 0<\alpha<2$$

для некоторого $\delta_0 > 0$. Тогда наименьшая подходящая степень для интерполяционного многочлена будет $k = 1$ и соответствующий интерполяционный многочлен имеет вид

$$q_h(s[1], s[2]) = (1 - s[1])(1 - s[2])\zeta(0,0) + s[2])(1 - s[1])\zeta(0,h) +$$

$$+ s[1])(1 - s[2])\zeta(h,0) + s[1]s[2]\zeta(h,h), \quad (s[1], s[2]) \in C_2. \tag{8}$$

Кроме того, для СКО $= \varepsilon$ и $0 < h_0 < \delta_0 2^{-1/2}$ имеем

$$h_{opt} = \left(\frac{\varepsilon^2}{b^2(2^{-\alpha/2+1} - 2^{\alpha/2-2} - 2^{-1})} \right)^{1/\alpha}. \tag{9}$$

Доказательство : Так как $d = 2$, $k = 1$, $m = 0$, то для $s[1], s[2]) \in C_2$ получаем

$$q_h(s[1], s[2]) = \sum_{u[1]=0}^{2} \sum_{u[2]=0}^{2} \sum_{v[1]=0}^{2} \sum_{v[2]=0}^{2} a_{u[1]u[2]v[1]v[2]} s[1]^{u[1]} s[2]^{u[2]} \zeta(hv[1], hv[2]),$$

$$q_h(v[1], v[2]) = \zeta(hv[1], hv[2]), \quad v[1] = 0, 1, \quad v[2] = 0, 1.$$

Следовательно

$$a_{0000} = a_{1100} = a_{0101} = a_{1010} = a_{1111} = 1,$$

$$a_{0001} = a_{0011} = a_{0010} = a_{0110} = a_{0111} = a_{1001} = a_{1011} = 0,$$

$$a_{0100} = a_{1000} = a_{1101} = a_{1110} = -1,$$

приводят к (8). Согласно Теореме 2, пункт (ii), имеем

$$\sigma_1^2(s[1], s[2]) = 2 \Big\{ (s[1]^2 + s[2]^2)^{\alpha/2} (1 - s[1])(1 - s[2]) +$$

$$+ (s[1]^2 + (1 - s[2])^2)^{\alpha/2} s[2])(1 - s[1]) + (s[2]^2 + (1 - s[1])^2)^{\alpha/2} s[1])(1 - s[2]) +$$

$$+ ((1 - s[1])^2 + (1 - s[2])^2)^{\alpha/2} s[1]) s[2] + 2(2 - 2^{\alpha/2}) s[1] s[2] (1 - s[1])(1 - s[2]) -$$

$$- s[1](1 - s[1]) - s[2](1 - s[2]) \Big\},$$

$$\sigma_1^2 = \sigma_1^2 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = 2^{-\alpha/2+1} - 2^{\alpha/2-2} - 2^{-1},$$

откуда следует (9).

Замечание 6. Утверждение Теоремы 4 является аналогом утверждения (a) Теоремы 3. Утверждения, подобные (b) и (c) можно получить аналогично, используя точные формулы из Теоремы 2.

Замечание 7. Случайные поля в Теореме 4 – недифференцируемы в среднем квадратическом. Формулы для $q_h(s)$ и $\sigma_1^2(s)$ в Теореме 3 для одномерного случая легко выводятся из формул $q_h(s[1], s[2])$ и $\sigma_1^2(s[1], s[2])$ подстановкой $s[2] = 0$.

Замечание 8. При $m = 0$ наилучший алгоритм для оценивания $\zeta(hs[1], hs[2])$, $(s[1], s[2]) \in C_2)$, основанный на $\zeta(0,0), \zeta(0,h), \zeta(h,0), \zeta(h,h)$ будет функцией регрессии $E\{\zeta(hs[1], hs[2])|\zeta(0,0), \zeta(0,h), \zeta(h,0), \zeta(h,h)\}$. Он более сложен с вычислительной точки зрения, чем $q_h(s[1], s[2])$. Для гауссовского случая и регрессионной оценки МСКО $= b^2h^\alpha\sigma_1^2$, см. [9], с той же σ_1^2 как и при оценивании посредством $q_h(s[1], s[2])$. Интерполяционные многочлены дают требуемую оптимальность и имеют более простой вид (8).

Замечание 9. По индукции (или непосредственным вычислением), для $\zeta(t)$, $t \in \mathbb{R}^3$ и $k = 1$ имеем

$$q_h(s[1], s[2], s[3]) = (1 - s[1])(1 - s[2])(1 - s[3])\zeta(0,0,0) +$$

$$+(1 - s[1])(1 - s[2])s[3]\zeta(0,0,h) + (1 - s[1])(1 - s[3])s[2]\zeta(0,h,0) +$$

$$+(1 - s[1])s[2]s[3]\zeta(0,h,h) + (1 - s[2])(1 - s[3])s[1]\zeta(h,0,0) +$$

$$+(1 - s[2])s[1]s[3]\zeta(h,0,h) + (1 - s[3])s[1]s[2]\zeta(h,h,0) + s[1]s[2]s[3]\zeta(h,h,h).$$

§5. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ “МАССИВНОСТИ” ОПТИМАЛЬНОЙ ВЫБОРОЧНОЙ СЕТИ

Займемся теперь некоторыми соотношениями, связанными с метрической энтропией по Колмогорову [7]. Напомним некоторые определения. Ниже X – метрическое пространство.

Определение 3. Множество $\widehat{T} \subset X$ называется ε-сетью для $T \subset X$, если для каждого $x \in T$ существует по крайней мере один $y \in \widehat{T}$ на расстоянии от x, не превосходящем $\varepsilon > 0 : \rho(x, y) \leq \varepsilon$.

Если T – компактное множество, то оно содержит конечную ε-сеть для каждого $\varepsilon > 0$. С этого момента всегда будем предполагать, что T компактно. Для заданного T и $\varepsilon > 0$ пусть $N_\varepsilon(T, \rho)$ есть минимальное значение n, при котором существует ε-сеть для T, состоящая из n точек, или что тоже, минимальное число ρ-шаров радиуса ε, которые покрывают T. ε-сеть, содержащая $N_\varepsilon(T, \rho)$ точек, называется **минимальной** ε-сетью. Натуральный логарифм от $N_\varepsilon(T, \rho)$, т.е.

$$H_\varepsilon(T, \rho) = H_\varepsilon(T, \rho)_X = \log N_\varepsilon(T, \rho) \qquad (10)$$

является ε-энтропией по Колмогорову (или метрической энтропией) множества T в X, которая характеризует "массу" множества T посредством H. Ступенчатая функция $H_\varepsilon(T,\rho)$ убывает, непрерывна справа по $\varepsilon > 0$ и быстро возрастает к бесконечности при $\varepsilon \downarrow 0$. Она также монотонно возрастает по T. Если множество T допускает ε-сеть из n элементов, то согласно (10), двоичные "кодовые слова" длины $\sim \log_2 n$ достаточны для восстановления $x \in T$ с ошибкой $\leq \varepsilon$. В частности, для каждого фиксированного d и любого d-мерного параллелепипеда $T \subset \mathbb{R}^d$ имеем

$$H_\varepsilon(T,\rho) = d\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + O(1), \quad \varepsilon \to 0. \tag{11}$$

Соотношение (11) имеет место для каждого ограниченного подмножества $T \in \mathbb{R}^d$, имеющего внутренние точки. Пусть

$$\sigma_h^2 = \sigma_{h,k}^2 = \max_{s\in C_d} \sigma_{h,k}^2(s) = \sup_{s\in C_d} E\left(\widehat{\zeta}_h(s)^2\right) = b^2 h^{m+\alpha}\sigma_k^2,$$

где σ_k^2 как в Теореме 2. Рассмотрим псевдометрику Дадли

$$\rho_\zeta(t,s) = \left\{E\left|\zeta(t) - \zeta_h(s)\right|^2\right\}^{1/2}.$$

Определение 4. Если $T \subset \mathbb{R}^d$, то сеть $S = S(\varepsilon, T)$ точек квантования в T называется **ε-оптималной выборочной сетью**, если $|S| = card\, S$ минимально и удовлетворяет условию $\sigma_h \leq \varepsilon$. По Определению 2. $\sigma_{h_{opt}} = \varepsilon$ и S_{opt} определяется по h_{opt}.

Определение 5. κ называется точной метрической размерностью T (или размерностью по Колмогорову), см. [7], если

$$\kappa = \inf\left\{\kappa' \geq 0 :\ H_\varepsilon(T,\rho) \leq H_0 + \kappa' \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),\ \varepsilon \leq 1\right\}. \tag{12}$$

В частности, если ρ – обычная евклидова метрика в $\mathbb{R}^d$, то $k = d$ (следует также из (11)). С другой стороны, если T – ограниченное выпуклое подмножество из $\mathbb{R}^d$, $\zeta(t)$ – изотропное случайное поле с ковариационной функцией

$$r(t) = 1 - b^2|t|^\alpha + o\left(|t|^\alpha\right), \quad t \to 0, \quad \alpha \in (0,2],$$

а ρ – псевдометрика Дадли, то $\rho_\zeta(t,s) \leq C|t-s|^{\alpha/2}$ и (12) имеет место при $\kappa = 2d/\alpha$. Более того, нетрудно проверить, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} H_\varepsilon(T,\rho_\zeta)\left(\frac{2d}{\alpha}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1} = 1, \quad 0 < \alpha \leq 2. \tag{13}$$

Напомним, что оценка поля $\zeta(t)$, $t \in [0,T]^d$ интерполяционными многочленами индивидуальной степени k требует $(k+1)^d|S(\varepsilon,[0,T]^d)|$ выборочных точек, так что разбиение пространства должно быть осуществлено шагом $\ll h$.

Теорема 5. **Если $\zeta(t)$, $t \in [0,T]^d$ удовлетворяет условиям Теоремы 2, то из условия $m+\alpha \geq d \geq 1$ и при $h_{opt} < \delta_0 d^{-1/2}$, получаем**

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{2d}{m+\alpha}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1}\log((k+1)^d|S(\varepsilon,[0,T]^d)|)=1, \tag{14}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\log((k+1)^d|S(\varepsilon,[0,T]^d)|)}{H_\varepsilon([0,T]^d,\rho_\zeta)}=\begin{cases}1 & \text{для}\quad m=0,\ d=1,\ 1\leq\alpha<2,\\ \frac{2}{m+\alpha} & \text{– в противном случае.}\end{cases} \tag{15}$$

Доказательство : По Теореме 2, если $h_0 < \delta_0 d^{-1/2}$, то имеем

$$|S(\varepsilon,[0,T]^d)|\leq\left(\left[\frac{T}{h_{opt}}\right]+1\right)^d\leq\left(T(|b|\sigma_k)^{2/(m+\alpha)}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2/(m+\alpha)}+1\right)^d,\quad\text{и}$$

$$\log|S(\varepsilon,[0,T]^d)|\leq d\log\left(T(|b|\sigma_k)^{2/(m+\alpha)}\right)+\frac{2d}{m+\alpha}\log\frac{1}{\varepsilon}+o(1),\quad\varepsilon\to 0.$$

Имея также, что

$$|S(\varepsilon,[0,T]^d)|\geq\left(\frac{T}{h_{opt}}-1\right)^d$$

получаем

$$\log|S(\varepsilon,[0,T]^d)|\sim\frac{2d}{m+\alpha}\log\frac{1}{\varepsilon},\quad\varepsilon\to 0,$$

т.е. (14). Из (13) и (14) следует (15).

Замечание 10. Из (15) вытекает, что если средняя квадратическая гладкость $\zeta(t)$ возрастает, то число ε-оптимальных выборочных точек убывает. Для недифференцируемого случайного процесса $\zeta(t)$, $t\in[0,T]$, число точек в ε-оптимальном выборочном множестве и минимальной ε-сети асимптотически эквивалентны. Таким образом, Теорема 5 показывает преимущество использования интерполяционных многочленов индивидуальной степени.

Теорема 6. **Если $\zeta(t)$ удовлетворяет условиям Теоремы 2, то для поля ошибок $\hat{\zeta}_{h_{opt}}(s)$**

(i)
$$P\left(\left|\hat{\zeta}_{h_{opt}}(s)\right|\geq a\right)\leq\frac{\varepsilon^2\sigma_k^2(s)}{\sigma_k^2 a^2},\quad s\in C_d,\quad a>0,$$

где $\sigma_k^2(s)$, σ_k^2 определяются как и в Теореме 2.

(ii) Если $\gamma\in(0,1)$, то $100(1-\gamma)\%$ - предел ошибки оценивания интерполяционными многочленами индивидуальной степени k будет $a_\gamma=\pm\dfrac{\varepsilon\sigma_k(s)}{\sigma_k\sqrt{\gamma}}$.

(*iii*) **Если функция $A(\varepsilon) > 0$ удовлетворяет условиям :**

$$\sum_{n=1}^{\infty}(A(2^{-n}))^{-2} < \infty, \quad (A(\varepsilon))^{-2} \text{ не возрастает, при } \varepsilon \to 0,$$

то

$$P\left(\frac{1}{\varepsilon}\left|\widehat{\zeta}_{h_{opt}}(s)\right| \geq A(\varepsilon) + \frac{1}{A(\varepsilon)}\right) \leq \frac{\sigma_k^2(s)}{\sigma_k^2 A^2(\varepsilon)}.$$

(*iv*) $\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\dfrac{1}{\varepsilon A(\varepsilon)}\left|\widehat{\zeta}_{h_{opt}}(s)\right| \leq 1$ **почти наверное для каждого $s \in C_d$.**

Доказательство : (i) По неравенству Маркова имеем

$$P\left(\left|\widehat{\zeta}_{h_{opt}}(s)\right| \geq a\right) \leq \frac{1}{a^2}\sigma^2_{h_{opt}}(s) = \frac{1}{a^2}b^2 h_{opt}^{m+\alpha}\sigma_k^2(s) = \frac{\varepsilon^2\sigma_k^2(s)}{\sigma_k^2 a^2}.$$

(ii) следует из (i), если взять $\gamma = \frac{\varepsilon^2\sigma_k^2(s)}{\sigma_k^2 a^2}$.

(iii) Из (i) имеем

$$P\left(\frac{1}{\varepsilon}\left|\widehat{\zeta}_{h_{opt}}(s)\right| \geq A(\varepsilon) + \frac{1}{A(\varepsilon)}\right) \leq \frac{\sigma_k^2(s)}{\sigma_k^2}\left(A(\varepsilon) + \frac{1}{A(\varepsilon)}\right)^{-2} \leq \frac{\sigma_k^2(s)}{\sigma_k^2 A^2(\varepsilon)}.$$

(iv) Если взять $0 < \varepsilon_n < 2^{-n}$, то согласно (iii) получаем

$$P\left(\frac{\left|\widehat{\zeta}_{h_{opt}}(s)\right|}{\varepsilon_n A(\varepsilon_n)} - 1 \geq \frac{1}{A^2(2^{-n})}\right) \leq P\left(\frac{\left|\widehat{\zeta}_{h_{opt}}(s)\right|}{\varepsilon_n A(\varepsilon_n)} - 1 \geq \frac{1}{A^2(\varepsilon_n)}\right) \leq$$

$$\leq \frac{\sigma_k^2(s)}{\sigma_k^2(A(\varepsilon_n))^2} \leq \frac{\sigma_k^2(s)}{\sigma_k^2(A(2^{-n}))^2} \leq \frac{1}{(A(2^{-n}))^2}.$$

Остается применить лемму Бореля–Кантелли.

Следствие 1. В частности, в качестве $A(\varepsilon)$ можно взять скорость возрастания "массивности" параметрического пространства, заданного формулой (10) или, что эквивалентно, скорость возрастания длины двоичных "кодовых слов", так что СКО $\leq \varepsilon$. Таким образом, если $A(\varepsilon) = \log(1/\varepsilon)$, то

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\frac{1}{\varepsilon\log(1/\varepsilon)}\left|\widehat{\zeta}_{h_{opt}}(s)\right| \leq 1.$$

§6. ТОЧНОСТЬ ПРИБЛИЖЕНИЯ ГАУССОВСКИХ ИЗОТРОПНЫХ ПОЛЕЙ В РАВНОМЕРНОЙ НОРМЕ

Целью этого параграфа является изучение максимума поля ошибок при полиномиальной интерполяции гауссовского изотропного поля с нулевым средним при условиях (6), приведенных в §4.

Лемма 4. **Если $\zeta(hs)$, $s \in C_d$ – изотропное случайное поле, удовлетворяющее условиям (6), и $\widehat{\zeta}_{h_0}(s)$ – поле ошибок при интерполяции многочленами с основным шагом h_0 для ε-квантования (см. (iii) Теоремы 2), то для $0 < \delta < \varepsilon$ имеем**

$$H_\delta\left([0,h_0]^d, \rho_{\widehat{\zeta}_{h_0}}\right) \le H_0 + \frac{2d}{m+\alpha}\log\frac{1}{\delta}, \tag{16}$$

где H_0 определяется через h_0, b, σ_k, m и α из Теоремы 2. $\rho_{\widehat{\zeta}_{h_0}}$ –размерность по Колмогорову (12) для параметрического пространства $[0,h_0]^d$ будет $\kappa = \frac{2d}{m+\alpha}$ и $\kappa \le 2$.

Доказательство : Согласно Теореме 2 дисперсия поля ошибок $\sigma^2_{h,k}(s)$ удовлетворяет неравенству

$$\sigma^2_{h,k}(s) \le b^2\sigma_k^2 h^{m+\alpha}, \quad s \in C_d.$$

По неравенству Минковского, если $t, s \in C_d$, имеем

$$\rho_{\widehat{\zeta}_{h_0}}(t,s) = \sqrt{Var\left[\widehat{\zeta}_h(t) - \widehat{\zeta}_h(s)\right]} \le \sqrt{Var\,\widehat{\zeta}_h(t)} + \sqrt{Var\,\widehat{\zeta}_h(s)} =$$

$$= \sigma_{h,k}(t) + \sigma_{h,k}(s) \le 2|b|\sigma_k h^{(m+\alpha)/2}.$$

Для $\delta = 2|b|\sigma_k h^{(m+\alpha)/2}$ мощность δ-сети будет

$$N_\delta\left([0,h_0]^d, \rho_{\widehat{\zeta}_{h_0}}\right) \le \left(\frac{h_0}{h}+1\right)^d = \left(h_0 2^{2/(m+\alpha)}|b|^{2/(m+\alpha)}\sigma_k^{2/(m+\alpha)}\delta^{-2/(m+\alpha)}+1\right)^d.$$

Следовательно, при $\delta \to 0$ для $\log N_\delta$ получаем

$$H_\delta\left([0,h_0]^d, \rho_{\widehat{\zeta}_{h_0}}\right) \le d\log\left(h_0 2^{2/(m+\alpha)}|b|^{2/(m+\alpha)}\sigma_k^{2/(m+\alpha)}\right) + \frac{2d}{m+\alpha}\log\frac{1}{\delta} + o(1),$$

что соответствует неравенству (16). Лемма 4 доказана.

Замечание 11. Аналогичными рассуждениями получаем, что для $0 < \delta < \varepsilon$ существует H_1 такое, что

$$H_\delta\left([0,h_0]^d, \rho_{\widehat{\zeta}_{h_0}}\right) \ge H_1 + \frac{2d}{m+\alpha}\log\frac{1}{\delta}. \tag{17}$$

Введем следующие обозначения : $B_\Delta(t)$ есть $\rho_{\varepsilon^{-1}\widehat{\zeta}_{h_0}}$ –шар радиуса Δ в точке t и $H_\delta\left(t, \Delta, \rho_{\varepsilon^{-1}\widehat{\zeta}_{h_0}}\right)$ является δ-энтропией шара $B_\Delta(t)$. Пусть

$$\psi(t,\Delta,\delta) = \int_0^\delta H_x^{1/2}\left(t,\Delta,\rho_{\varepsilon^{-1}\widehat{\zeta}_{h_0}}\right)dx, \quad \psi(\delta) = \int_0^\delta H_x^{1/2}\left([0,h_0]^d, \rho_{\varepsilon^{-1}\widehat{\zeta}_{h_0}}\right)dx,$$

$$\psi(\Delta,\delta) = \sup_{t\in[0,h_0]^d}\psi(t,\Delta,\delta),$$

так что $\psi(\delta)$ является интегралом Дадли.

Теорема 7. **Пусть $\zeta(h_0 s)$, $s \in C_d$ – гауссовское изотропное случайное поле с нулевым средним, удовлетворяющее условиям Леммы 4. Существует постоянная $C(d, m, \alpha)$ такая, что из неравенства**

$$a \geq \left(\sqrt{1 + \frac{2d}{m+\alpha} \log 2} + \sqrt{\frac{d\pi}{2(m+\alpha)}} \right) 4\sqrt{2} + 1$$

следует, что

$$P \left(\sup_{s \in C^d} \frac{1}{\varepsilon} \left| \widehat{\zeta}_{h_0}(s) \right| \geq a \right) \leq C(d, m, \alpha) a^{\frac{2d}{m+\alpha} - 1} \varepsilon^{-\frac{2d}{m+\alpha}} e^{(1+4\sqrt{2})H_0 - a^2/2}, \tag{18}$$

где $C(d, m, \alpha) = 9.6 \exp \left(2 + 4\sqrt{\frac{d\pi}{m+\alpha}} \right)$.

Доказательство : Согласно Теореме 2 гауссовское поле ошибок $\widehat{\zeta}_{h_0}(s)$, $s \in C_d$ удовлетворяет условию

$$E \left(\frac{1}{\varepsilon} \widehat{\zeta}_{h_0}(s) \right) = 0, \quad E \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \widehat{\zeta}^2_{h_0}(s) \right) \leq 1$$

и $\psi(1) < \infty$. Действительно, для заданного $\varepsilon > 0$ согласно (16) имеем

$$\psi(1) = \int_0^1 H_{\varepsilon x}^{1/2} \left([0, h_0]^d, \rho_{\widehat{\zeta}_{h_0}} \right) dx \leq \int_0^1 \sqrt{H_0 + \frac{2d}{m+\alpha} \log \frac{1}{\varepsilon x}} \, dx \leq$$

$$\leq \sqrt{H_0} + \sqrt{\frac{2d}{m+\alpha}} \int_0^1 \sqrt{\log \frac{1}{\varepsilon x}} \, dx \leq \sqrt{H_0} + \sqrt{\frac{2d}{m+\alpha}} \frac{1}{\varepsilon} \int_{1/\varepsilon}^{\infty} x^{-2} \sqrt{\log x} \, dx \leq$$

$$\leq \sqrt{H_0} + \sqrt{\frac{2d}{m+\alpha}} \frac{1}{\varepsilon} \int_1^{\infty} x^{-2} \sqrt{\log x} \, dx = \sqrt{H_0} + \sqrt{\frac{2d}{m+\alpha}} \frac{1}{\varepsilon} \Gamma \left(1 + \frac{1}{2} \right) =$$

$$= \sqrt{H_0} + \sqrt{\frac{2d}{m+\alpha}} \frac{1}{2\varepsilon} \sqrt{\pi} < \infty,$$

где $\Gamma(y)$ – функция Эйлера. При этих условиях поле $\varepsilon^{-1} \widehat{\zeta}_{h_0}(s)$ с вероятностью 1 будет непрерывным. Здесь было использовано, что

$$\rho_{\varepsilon^{-1} \widehat{\zeta}_{h_0}}(t, s) = \varepsilon^{-1} \rho_{\widehat{\zeta}_{h_0}}(t, s), \quad t, s \in C_d,$$

и (см. Лемму 4)

$$H_\delta \left([0, h_0]^d, \rho_{\varepsilon^{-1} \widehat{\zeta}_{h_0}} \right) \leq H_0 + \frac{2d}{m+\alpha} \log \frac{1}{\varepsilon \delta}. \tag{19}$$

Согласно [5] для $a \geq 1 + 4\sqrt{2}\psi(1)$ имеет место следующее неравенство :

$$P \left(\sup_{s \in C^d} \frac{1}{\varepsilon} \left| \widehat{\zeta}_{h_0}(s) \right| \geq a \right) \leq 9.6 \exp \left[-\frac{a^2}{2} + \theta(a) \right], \tag{20}$$

где

$$\theta(a) = \inf_{\Delta>0} \left\{ 2a^2\Delta^2 + 4\sqrt{2}a\psi(\Delta,\Delta) + H_\Delta\left([0,h_0]^d, \rho_{\varepsilon^{-1}\widehat{\zeta}_{h_0}}\right) + \log\Delta \right\}.$$

Теперь необходимо оценить $\theta(a)$. В силу (19)

$$H_\delta\left(t,\Delta,\rho_{\varepsilon^{-1}\widehat{\zeta}_{h_0}}\right) = H_{\varepsilon\delta}\left(t,\varepsilon\Delta,\rho_{\widehat{\zeta}_{h_0}}\right) \le H_0 + \frac{2d}{m+\alpha}\log\frac{\Delta}{\delta},$$

так что

$$\psi(\Delta,\Delta) \le H_0\Delta + \sqrt{\frac{2d}{m+\alpha}}\int_0^\Delta \sqrt{\log\frac{\Delta}{x}}\,dx =$$

$$= H_0\Delta + \sqrt{\frac{2d}{m+\alpha}}\Delta\int_0^1 \sqrt{\log\frac{1}{x}}\,dx = H_0\Delta + \sqrt{\frac{2d}{m+\alpha}}\Delta\frac{\sqrt{\pi}}{2} = c_1\Delta, \tag{21}$$

где $c_1 = H_0 + \sqrt{\frac{2d}{m+\alpha}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Наконец, из (19) и (21) для $\Delta = 1/a$ получим

$$\theta(a) \le 2 + e\sqrt{2}c_1 + H_0 + \frac{2d}{m+\alpha}\log\frac{a}{\varepsilon} + \log a \le$$

$$\le 2 + (1+4\sqrt{2})H_0 + 4\sqrt{\frac{\pi d}{m+\alpha}} + \frac{2d}{m+\alpha}\log\frac{a}{\varepsilon} + \log a.$$

Таким образом, теперь из (20) получаем (18). Из доказательства Леммы 4 имеем

$$H_0 \le d\log\left(h_0 2^{2/(m+\alpha)}|b|^{2/(m+\alpha)}\sigma_k^{2/(m+\alpha)}\right) + 1.$$

Согласно Теореме 2, $h_0 = \left(\frac{\varepsilon}{b\sigma_k}\right)^{2/(m+\alpha)}$, и поэтому

$$H_0 \le 1 + \frac{2d}{m+\alpha}\log 2 + \frac{2d}{m+\alpha}\log\varepsilon, \tag{22}$$

$$\psi(1) \le \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{2d}{m+\alpha}\log 2 + \frac{2d}{m+\alpha}\log\varepsilon + \frac{2d}{m+\alpha}\log\frac{1}{\varepsilon x}}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{2d}{m+\alpha}\log 2 + \frac{2d}{m+\alpha}\log\frac{1}{x}}\,dx \le$$

$$\le \sqrt{1 + \frac{2d}{m+\alpha}\log 2} + \sqrt{\frac{2d}{m+\alpha}}\int_0^1 \sqrt{\log\frac{1}{x}}\,dx = \sqrt{1 + \frac{2d}{m+\alpha}\log 2} + \sqrt{\frac{d\pi}{2(m+\alpha)}}.$$

Для получения неравенства $a \ge 1 + 4\sqrt{2}\psi(1)$ достаточно взять a как в условии Теоремы 7.

Теорема 8. В условиях Теоремы 7

$$P\left(\sup_{s\in C^d}\frac{1}{\varepsilon}\left|\widehat{\zeta}_{h_0}(s)\right|\geq a\right)\leq C_1(d,m,\alpha)a^{\frac{2d}{m+\alpha}-1}\varepsilon^{\frac{2d}{m+\alpha}4\sqrt{2}}e^{-\frac{a^2}{2}}, \tag{23}$$

где

$$C_1(d,m,\alpha)=C(d,m,\alpha)\exp\left[(1+4\sqrt{2})(1+\frac{2d}{m+\alpha}\log 2)\right].$$

Доказательство : непосредственно следует из Теоремы 7 и (22).

Теорема 9. В условиях Теоремы 8

(a) если $2d>m+\alpha$, то

$$P\left(\sup_{s\in C^d}\frac{1}{\varepsilon}\left|\widehat{\zeta}_{h_0}(s)\right|\geq A(\varepsilon)+\frac{z}{A(\varepsilon)}\right)\leq$$

$$\leq C_1(d,m,\alpha)(1+z)^{\frac{2d}{m+\alpha}-1}\varepsilon^{\frac{2d}{m+\alpha}(1+4\sqrt{2})}\exp\left[-z-\frac{z^2}{2A^2(\varepsilon)}\right], \tag{24}$$

(b) если $2d\leq m+\alpha$, то

$$P\left(\sup_{s\in C^d}\frac{1}{\varepsilon}\left|\widehat{\zeta}_{h_0}(s)\right|\geq A(\varepsilon)+\frac{z}{A(\varepsilon)}\right)\leq C_1(d,m,\alpha)\varepsilon^{\frac{2d}{m+\alpha}(1+4\sqrt{2})}\exp\left[-z-\frac{z^2}{2A^2(\varepsilon)}\right], \tag{25}$$

где $A(\varepsilon)$ – максимальный корень уравнения

$$A^{\frac{2d}{m+\alpha}-1}\exp\left(-\frac{A^2}{2}\right)=\varepsilon^{\frac{2d}{m+\alpha}}.$$

Достаточно взять

$$A(\varepsilon)=\sqrt{\frac{2d}{m+\alpha}}\sqrt{|\log\varepsilon|}+\frac{\left(\frac{2d}{m+\alpha}-1\right)\log|\log\varepsilon|}{2\sqrt{\frac{2d}{m+\alpha}}|\log\varepsilon|}.$$

Доказательство : следует из Теоремы 8, если положить $a=A(\varepsilon)+\frac{z}{A(\varepsilon)}$.

Следствие 2. С вероятностью 1

$$\varlimsup_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon\sqrt{|\log\varepsilon|}}\sup_{s\in C^d}\left|\widehat{\zeta}_{h_0}(s)\right|\right)\leq\sqrt{\frac{2d}{m+\alpha}}.$$

Следствие вытекает из Теоремы 9 и леммы Бореля–Кантелли.

Замечание 12. Оценки из предыдущих теорем можно использовать для получения доверительных интервалов для ошибки интерполяции гауссовского изотропного случайного поля многочленами индивидуальной степени.

Авторы блогадарны профессору Роберту Адлеру за указание на статью [6].

ABSTRACT. Results on the precision of polynomial estimation of real-valued isotropic random fields on $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$ are obtained using delicate approximation by polynomials of suitably high degree as estimators. A simple condition on the covariance function ensures the existence of a continuous version of the random field and provides guidance for the choice of the optimal quantization step for regular sampling designs with the appropriate reconstruction algorithm. Upper exponential bounds for tail probabilities for the error fields are given. The methods are illustrated by examples with entropy conditions on parameter space.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. J. Adler, The Geometry of Random Fields, Wiley, Chichester, 1981.
2. Ю. К. Беляев, А. Х. Симонян, "Асимптотические свойства уклонений реализации гауссовского процесса от аппроксимирующей ломаной, при уменьшении шага квантования", Случайные Процессы и Поля (под редакцией Ю. К. Беляева), МГУ, стр. 9 – 21, 1979.
3. Ю. К. Беляев, А. Х. Симонян, В. А. Красавкина, "Квантование по времени реализаций недифференцирусмых гауссовских процессов", Изв. АН СССР, Тех. Кибернетика, том 4, стр. 139 — 147, 1976.
4. Г. Крамер, М. Р. Лидбеттер, Стационарные Случайные Процессы. Свойства Выборочных Функций и их Приложения, Мир, Москва, 1969.
5. В. А. Дмитровский, "Оценки распределения максимума гауссовского поля", Случайные Процессы и Поля (под редакцией Ю. К. Беляева), МГУ, стр. 22 – 31, 1979.
6. J. T. Kent, "Continuity properties for random fields", The Annals of Probab., vol. 17, no. 4, pp. 1432 – 1440, 1989.
7. А. Н. Колмогоров, Теория Информации и Теория Алгоритмов, Наука, Москва, 1987.
8. О. В. Селезнев, "Приближение периодических гауссовских процессов тригонометрическими многочленами", ДАН СССР, том 21, № 1, стр. 29 — 33, 1980.
9. А. Х. Симонян, "О квантовании реализаций гауссовских случайных полей", Тезисы докладов Конф. по Применению Стат. Методов в Производстве и Управлении, Пермь, том 1, стр. 81 – 82, 1990.
10. А. Х. Симонян, "Квантование по времени и по уровню реализаций дифференцируемых стационарных гауссовских случайных процессов", Тезисы Докладов Конф. "Идентификация, измерение характеристик и имитация случайных сигналов", Новосибирск, стр. 171 – 172, 1991.
11. А. Х. Симонян, В. Р. Фаталов, "Квантование по времени реализаций дифференцируемых гауссовских процессов", Уч. Записки ЕГУ (Естеств. Науки), том 1, стр. 17 – 24, 1991.
12. А. Х. Симонян, Е. И. Островский, "Точность аппроксимации гауссовского поля регрессионными сплайнами", ДАН Арм. ССР, том 90, № 3, стр. 104 – 109, 1990.

5 октября 1998

Ереванский государственный университет,

Университет Северной Каролины
Чапел Хилл, США