ПРИНЦИП ГЮЙГЕНСА В ШЕСТИМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ С МЕТРИКОЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ

А. О. Оганесян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 33, № 6, 1998

В статье изучается проблема Адамара для линейных гиперболических уравнений второго порядка. По критерию Адамара описаны все уравнения Гюйгенса в шестимерном пространстве с метрикой диагональной плоской волны.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Задача описания линейных гиперболических уравнений второго порядка, удовлетворяющих принципу Гюйгенса, известна как задача Адамара. Адамар сформулировал эту проблему в 1923 году [1] и сделал важный шаг для ее решения в рамках теории задачи Коши для линейных гиперболических уравнений второго порядка

$$\sum_{i,j=0}^{n-1} g_{ij}(x)\, u_{x_i x_j} + \sum_{i=0}^{n-1} b_i(x)\, u_{x_i} + c(x)\, u = 0, \tag{1}$$

$$u|_S = f, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S = g. \tag{2}$$

Здесь S – многообразие размерности $n-1$, а $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ — производная в направлении нормали ν к S.

Определение. Уравнение (1) удовлетворяет принципу Гюйгенса (по терминологии Адамара "в узком смысле" [1]), если в каждой точке $x^0 = (x_0^0, \dots, x_{n-1}^0)$ значение решения задачи Коши (1), (2) зависит от значений данных Коши на пересечении начального многообразия S с характеристическим коноидом с вершиной в точке x^0.

Из классических результатов Пуассона, Кирхгофа и Тедоне следует, что обычное волновое уравнение

$$\Box_n\, u \equiv u_{x_0 x_0} - \sum_{i=1}^{n-1} u_{x_i x_i} = 0$$

является гюйгенсовым, если $n \geq 4$ четное. При этом характеристическим коноидом является конус

$$(x_0 - x_0^0)^2 - \sum_{i=1}^{n-1}(x_i - x_i^0)^2 = 0$$

с вершиной в точке $x^0 = (x_0^0, \ldots, x_n^0)$.

Принцип Гюйгенса инвариантен относительно так называемых элементарных преобразований :

a) невырожденная замена независимых переменных ;

b) преобразование неизвестной функции $u \to \lambda(x)\, u$, $\lambda(x) \neq 0$ (калибровочное преобразование) ;

c) умножение уравнения на функцию $\lambda(x) \neq 0$.

Два уравнения называются эквивалентными, если одно из них получается из другого с помощью элементарных преобразований. Гиперболические уравнения, эквивалентные волновому, называются тривиальными гюйгенсовыми уравнениями. Долгое время казалось, что кроме тривиальных нет других гюйгенсовых уравнений. Первые примеры нетривиальных уравнений, удовлетворяющих принципу Гюйгенса, были получены К. Штельмахером [2]. Он доказал, что уравнения вида

$$\Box_6\, u + c(x_0, \ldots, x_5) u = 0$$

с действительным аналитическим коэффициентом c, удовлетворяет принципу Гюйгенса тогда и только тогда, когда $c = 0$, $c = -\dfrac{2}{x_0^2}$, $c = \dfrac{2}{x_i^2}$, $i = 1, \ldots, 5$. Настоящая статья изучает тот же вопрос для уравнения

$$u_{x_0x_0} - u_{x_1x_1} - \sum_{i=2}^{5} a_i(x_0 - x_1)\, u_{x_ix_i} + c\,(x_0 - x_1, x_2, \ldots, x_5)\, u = 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^6 \quad (3)$$

с действительными аналитическими коэффициентами $a_i > 0$ $(i = 2, \ldots, 5)$ и c. Известно [3] — [5], что для $c = 0$, $c = \dfrac{2a_i(x_0 - x_1)}{x_i^2}$, $i = 2, \ldots, 5$ уравнение (3) удовлетворяет принципу Гюйгенса. Возникает проблема описания всех гюйгенсовых уравнений вида (3).

§1. КРИТЕРИЙ АДАМАРА

Рассмотрим лоренцово пространство V_6 с метрикой плоской волны

$$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - \sum_{i=2}^{5} a_i^{-1}(x_0 - x_1)\, dx_i^2,$$

порожденной уравнением (3). Пусть $x^0 \in V_6$ фиксирована и $\Gamma(x, x^0)$ – квадрат геодезического расстояния между точками $x^0, x \in V_6$. Известно [3], [5], что

$$\Gamma(x, x^0) = (x_0 - x_0^0)^2 - (x_1 - x_1^0)^2 - \sum_{i=2}^{5} A_i^{-1}(x_0 - x_1, x_0^0 - x_1^0)(x_i - x_i^0)^2,$$

где

$$A_i(x_0 - x_1, x_0^0 - x_1^0) = \frac{1}{(x_0 - x_1) - (x_0^0 - x_1^0)} \int_{x_0^0 - x_1^0}^{x_0 - x_1} a_i(\sigma)\, d\sigma, \quad i = 2, \ldots, 5.$$

Функция вида

$$U(x, x^0) = V(x, x^0)\Gamma^{-2} - W(x, x^0) \ln \Gamma + R \tag{4}$$

называется элементарным решением уравнения (3), если она удовлетворяет (3) вне характеристического коноида

$$\Gamma(x, x^0) = 0. \tag{5}$$

В (4)

$$V(x, x^0) = U_0(x, x^0) + U_1(x, x^0)\Gamma, \qquad W(x, x^0) = \sum_{i=2}^{\infty} U_\nu(x, x^0)\Gamma^{\nu - 2}$$

где U_ν, $(\nu = 0, 1, \ldots)$ и R – достаточно гладкие функции.

Подстановка функции $U(x, x^0)$ в (3) приводит к системе уравнений в частных производных относительно U_0, U_1, U_2 и W

$$XU_0 = 0, \tag{6}$$

$$4(X + 1)U_1 = L[U_0], \tag{7}$$

$$4(X + 2)\, U_2 = L[U_1], \qquad L[W] = 0, \tag{8}$$

где

$$X = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x_0}\frac{\partial}{\partial x_0} - \frac{\partial \Gamma}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} - \sum_{i=2}^{5} a_i(x_0 - x_1)\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{4}(M - 12) \equiv$$
$$\equiv X_1 + \frac{1}{4}(M - 12), \tag{9}$$

$$M = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_1^2} - \sum_{i=2} 5a_i(x_0 - x_1)\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i^2}.$$

Ясно, что M зависит только от $x_0 - x_1$. Функция $W(x, x^0)$ является решением задачи Гурса для уравнения (3) с данными на поверхности характеристического коноида (5). Критерий Адамара утверждает, что уравнение (3) удовлетворяет принципу Гюйгенса тогда и только тогда, когда логарифмический член его элементарного решения (4) исчезает для всех $x^0 \in V_6$ и всех x, лежащих внутри коноида (5), т.е.

$$W(x, x^0) = 0. \tag{10}$$

Замечание. Из единственности решения задачи Гурса следует, что условие (10) эквивалентно требованию

$$W(x, x^0) \triangleq 0, \tag{10'}$$

которое можно заменить условием

$$U_2(x, x^0) \triangleq 0. \tag{10''}$$

Здесь знак $\triangleq$ означает, что уравнение удовлетворяется только на характеристическом коноиде (5).

Известно [4], что оператор X_1 в (9) является дифференциальным оператором вдоль геодезических кривых, которые являются бихарактеристическими кривыми для уравнения (3). Так как коноид (5) содержит эти кривые, то из условия (10″) следует $X\, U_2(x, x^0) \triangleq 0$. Используя уравнение (8), получаем

$$L[U_1] \triangleq 0. \tag{11}$$

Таким образом, задача построения всех гюйгенсовых уравнений вида (3) свелась к задаче нахождения функций $c(x_0, x_1, x_2, \cdots, x_s)$, для которых коэффициент $U_1(x, x^0)$ в (4) удовлетворяет уравнению (7) и условию (11).

§2. ПОСТРОЕНИЕ ГЮЙГЕНСОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Решения уравнений (6) и (7) можно представить в виде [4]

$$U_0(x, x^0) = \alpha \exp\left[-\int_0^s \frac{1}{4\sigma}(M - 12)d\sigma\right], \tag{12}$$

$$U_1(x, x^0) = \frac{U_0(x, x^0)}{4s}\int_0^s \frac{L[U_0]}{U_0(x(\sigma), x^0)}\, d\sigma. \tag{13}$$

Используя нормировку, примененную в [1], получим

$$\alpha = U_0(x^0, x^0) = \prod_{i=2}^{5}(a_i(x_0^0 - x_1^0))^{-1/2},$$

а интегралы вычисляются вдоль геодезической кривой, соединяющей точки x^0, x. На этой кривой имеем

$$x_0 - x_1 = x_0^0 - x_1^0 + (\tau_0 + \xi_0)\,\sigma, \tag{14}$$

$$x_i = x_i^0 - \sigma A_i(x_0 - x_1, x_0^0 - x_1^0)\eta_{0i} \quad i = 2, \cdots, 5, \tag{15}$$

где τ_0, ξ_0, η_{0i} определяют касательную к геодезической кривой в точке x^0.

$$U_0(x, x^0) = \prod_{i=2}^{5} (A_i(x_0 - x_1, x_0^0 - x_1^0))^{-1/2}.$$

Поэтому для U_1 имеем

$$U_1(x, x^0) = \frac{U_0}{4s} \int_0^s c(x_0^0 - x_1^0 + (\tau_0 + \xi_0)\sigma, x_2^0 - \sigma A_2 \eta_{02}, \cdots, x_5^0 - \sigma A_5 \eta_{05}) d\sigma =$$

$$= \frac{U_0}{4s(\tau_0 + \xi_0)} \int_0^{s(\tau_0+\xi_0)} c(x_0^0 - x_1^0 + \gamma, x_2^0 - \frac{\eta_{02}}{(\tau_0 + \xi_0)} \int_{x_0^0 - x_1^0}^{x_0^0 - x_1^0 + \gamma} a_2(r)\, dr, \cdots, x_5^0 -$$

$$- \frac{\eta_{05}}{(\tau_0 + \xi_0)} \int_{x_0^0 - x_1^0}^{x_0^0 - x_1^0 + \gamma} a_5(r)\, dr) d\gamma \equiv F\left(s(\tau_0 + \xi_0), \frac{s\tau_{02}}{s(\tau_0 + \xi_0)}, \cdots, \frac{s\eta_{05}}{s(\tau_0 + \xi_0)}\right).$$

Согласно формулам (14), (15), отсюда следует, что $U_1 = U_1(x_0 - x_1, x_2, \cdots, x_5)$. Следовательно, функция $L[U_1]$ зависит от переменных $p = x_0 - x_1, x_2, \cdots, x_5$ и не зависит от $q = x_0 + x_1$. С другой стороны, согласно (11), $L[U_1] = 0$ на пятимерной характеристической поверхности

$$q = q^0 + \frac{1}{p - p^0} \sum_{i=2}^{5} A_i^{-1}(p, p^0)(x_i - x_i^0)^2, \quad p^0 = x_0^0 - x_1^0, \quad q^0 = x_0^0 + x_1^0.$$

Следовательно

$$L[U_1] = 0. \tag{16}$$

Теперь мы должны определить функцию U_1 из уравнения (7), которое в данном случае может быть записано в виде

$$4(p - p^0)\frac{\partial U_1}{\partial p} + 4\sum_{i=2}^{5} a_i(p)\, A_i^{-1}(p, p^0)(x_i - x_i^0)\frac{\partial U_1}{\partial x_i} +$$

$$+2\left(\sum_{i=2}^{5} a_i(p)\, A_i^{-1}(p, p^0) - 4\right) U_1 + 4U_1 = U_0\, c. \tag{17}$$

Разделив последнее уравнение на U_0 и учитывая (6), для функции $V = \dfrac{4U_1}{U_0}$ получаем

$$(p - p^0)\frac{\partial V}{\partial p} + \sum_{i=2}^{5} a_i(p)\, A_i^{-1}(p, p^0)(x_i - x_i^0)\frac{\partial V}{\partial x_i} + V = c. \tag{18}$$

Легко видеть, что условие (16) эквивалентно условию

$$L[V] = 0. \tag{19}$$

Решение этого уравнения строится в виде степенного ряда

$$V = V_0 + V_1(p - p^0) + \sum_{i=2}^{5} V_i(x_i - x_i^0) + \cdots.$$

Условие (19) можно записать в виде

$$L[V]|_{x'=\xi} + \frac{\partial L[V]}{\partial p}|_{x'=\xi}(p - p^0) + \sum_{i=2}^{5} \frac{\partial L[V]}{\partial x_i}|_{x'=\xi}(x_i - x_i^0) +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 L[V]}{\partial p^2}|_{x'=\xi}(p - p^0)^2 + \sum_{i=2}^{5} \frac{\partial^2 L[V]}{\partial p\, \partial x_i}(p - p^0)(x_i - x_i^0) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k,l=2}^{5} \frac{\partial^2 L[V]}{\partial x_k \partial x_l}|_{x'=\xi}(x_k - x_k^0)(x_l - x_l^0) + \cdots = 0, \tag{20}$$

где $x' = (p, x_2, \cdots, x_5)$ и $\xi = (p^0, x_2^0, \cdots, x_5^0)$. Приравнивая к нулю коэффициенты этого разложения, получим последовательность уравнений для функции c. Непосредственные вычисления дают

$$L[V]|_{x'=\xi} = -\frac{1}{3}\sum_{i=2}^{5} a_i(p^0)\frac{\partial^2 c}{\partial x_i^2}(\xi) + c^2(\xi). \tag{21}$$

Взяв точку ξ произвольной, получаем первое уравнение для c :

$$\sum_{i=2}^{5} a_i(x_0 - x_1)\,\frac{\partial^2 c}{\partial x_i^2} - 3c^2 = 0. \tag{22}$$

Из этого уравнения следует, что $\dfrac{\partial}{\partial p}L[V]|_{x'=\xi} = 0$ и $\dfrac{\partial}{\partial x_i}L[V]|_{x'=\xi} = 0$. Члены второго порядка дают уравнения

$$\sum_{i=2}^{5}\left[-\frac{1}{5}a_i\frac{\partial^4 c}{\partial p^2 \partial x_i^2} - \frac{2}{5}a_i'\frac{\partial^3 c}{\partial p \partial x_i^2} - \frac{11}{45}a_i''\frac{\partial^2 c}{\partial x_i^2} + \frac{1}{15a_i}(a_i')^2\frac{\partial^2 c}{\partial x_i^2}\right] + \frac{4}{3}c\frac{\partial^2 c}{\partial p^2} + \left(\frac{\partial c}{\partial p}\right)^2 = 0, \tag{23}$$

$$\sum_{i=2}^{5}\left[-\frac{1}{5}a_i\frac{\partial^4 c}{\partial p \partial x_r \partial x_i^2} + \left(-\frac{1}{5}a_i' + \frac{1}{40}\frac{a_i}{a_r}a_r'\right)\frac{\partial^3 c}{\partial x_r \partial x_i^2} - \frac{1}{12}\frac{1}{a_r}a_r' c\frac{\partial c}{\partial x_r}\right] +$$

$$+\frac{4}{3}c\frac{\partial^2 c}{\partial p \partial x_r} + \frac{\partial c}{\partial x_r}\frac{\partial c}{\partial p} = 0, \quad r = 2, \ldots, 5, \tag{24}$$

$$-\frac{1}{5}\sum_{i=2}^{5} a_i\frac{\partial^4 c}{\partial x_l \partial x_r \partial x_i^2} + \frac{4}{3}c\frac{\partial^2 c}{\partial x_l \partial x_r} + \frac{\partial c}{\partial x_r}\frac{\partial c}{\partial x_l} = 0, \quad r, l = 2, \ldots, 5. \tag{25}$$

Из последнего уравнения и (22) получим

$$\frac{2}{3}\frac{\partial^2 c}{\partial x_r \partial x_l}c - \frac{\partial c}{\partial x_l}\frac{\partial c}{\partial x_r} = 0,$$

которое легко свести к

$$\frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_l}c^{-\frac{1}{2}} = 0, \quad r, l = 2, \ldots, 5.$$

Отсюда

$$c = \left(\sum_{l=2}^{5} d_l(x_0 - x_1)x_l + k\,(x_0 - x_1)\right)^{-2} \tag{26}$$

с произвольными функциями $d_l(x_0 - x_1)$ $(l = 2, \ldots, 5)$ и $k(x_0 - x_1)$. Согласно (22) уравнение (24) сводится к

$$\frac{1}{a_r}a_r' c\frac{\partial c}{\partial x_r} - 3\frac{\partial c}{\partial x_r}\frac{\partial c}{\partial p} + 2c\frac{\partial^2 c}{\partial p \partial x_r} = 0.$$

Подставляя функцию c из (26), получаем

$$d_r = \frac{\beta_r}{\sqrt{2a_r}}, \qquad r = 2, \ldots, 5, \tag{27}$$

а из (22)

$$\sum_{r=2}^{5}\beta_r^2 = 1. \tag{28}$$

Уравнение (25) вместе с (22) дает

$$\sum_{i=2}^{5}\frac{3}{a_i}(a_i')^2\frac{\partial^2 c}{\partial x_i^2} - 2\sum_{i=2}^{5}a_i''\frac{\partial^2 c}{\partial x_i^2} - 9\left(\frac{\partial c}{\partial p}\right)^2 + 6c\frac{\partial^2 c}{\partial p^2} = 0.$$

Подставляя выражение для c, получим

$$\sum_{i=2}^{5}\left[\frac{3}{a_i}(a_i')^2 - 2a_i''\right]d_i^2\left(\sum_{l=2}^{5}d_l x_l + k\right) - 2\left(\sum_{l=2}^{5}d_l'' x_l + k''\right) = 0. \tag{29}$$

Отсюда

$$d_r\sum_{i=2}^{5}\left[\frac{3}{a_i}(a_i')^2 - 2a_i''\right]d_i^2 = 2d_r'', \quad r = 2, \ldots, 5, \tag{30}$$

$$k\sum_{i=2}^{5}\left[\frac{3}{a_i}(a_i')^2 - 2a_i''\right]d_i^2 = 2k''. \tag{31}$$

После легких преобразований запишем уравнение (30) в виде

$$\beta_r\sum_{i=2}^{5}\sqrt{a_i}(a_i^{-1/2})''\beta_i^2 = \beta r\sqrt{a_r}(a_r^{-1/2})'', \quad r = 1, \ldots, 5. \tag{32}$$

Обозначим $r_i = \sqrt{a_i}(a_i^{-1/2})''$, $i = 2, \ldots, 5$. Пусть

$$r_i \neq r_j, \quad i \neq j, \quad i, j = 2, \ldots, 5. \tag{33}$$

Тогда система уравнений (28), (32) имеет только решения $\beta_l = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\beta_i = 0$, $i \neq l$ $(l, i = 2, \ldots, 5)$. В этом случае из (27) получим $d_l = \dfrac{1}{\sqrt{2a_l}}$, $d_i = 0$, $i \neq l$, $l, i = 2, \ldots, 5$, и уравнение (31) принимает вид $k'' - r_l k = 0$, $l = 2, \ldots, 5$. Общее решение этого уравнения есть

$$k_l = \frac{\alpha_l \tilde{A}_l}{\sqrt{2a_l}} + \frac{c_l}{\sqrt{2a_l}} \quad (\alpha_l, c_l = const),$$

где

$$\tilde{A}_l = \int_{x_0^0 - x_1^0}^{x_0 - x_1} a_l(\sigma)\, d\sigma, \quad l = 2, \ldots, 5.$$

Подставляя значения d_l и k_l в (26), находим функцию c и уравнение (3) принимает вид

$$u_{x_0x_0} - u_{x_1x_1} - \sum_{i=2}^{5} a_i(x_0 - x_1) u_{x_ix_i} + \frac{2a_l(x_0 - x_1)}{(x_l + \alpha_l \tilde{A}_l)^2} u = 0, \quad l = 2, \ldots, 5. \tag{34}$$

Рассмотрим теперь случай

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4, \tag{35}$$

когда условия (33) нарушаются. В этом случае система уравнений (28), (32) имеет решения $\beta_i = \dfrac{\alpha_i}{\sqrt{2}}$ с $\alpha_i = const$, $i = 2, \ldots, 5$, $\sum\limits_{i=2}^{5} \alpha_i^2 = 1$. Тогда из формулы (27) получаем $d_i = \dfrac{\alpha_i}{\sqrt{2a_i}}$, $i = 2, \ldots, 5$ и уравнение (31) принимает вид $k'' - r_i k = 0$, $i = 2, \ldots, 5$. Отсюда

$$k_i = \frac{m_i \tilde{A}_i}{\sqrt{2a_i}} + \frac{l_i}{\sqrt{2a_i}} \quad i = 2, \ldots, 5 \quad (m_i, l_i = const).$$

Из условий (35) следует, что

$$\frac{1}{\sqrt{2a_i}} = \frac{\gamma_{ij} \tilde{A}_j}{\sqrt{2a_j}} + \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{2a_j}} \quad (\delta_{ij}, \gamma_{ij} = const), \quad i, j = 2, \ldots, 5.$$

Если $\gamma_{ij} = 0$ и $a_i = \sigma_{ij} a_j$, где $\sigma_{ij} = const$, $i, j = 2, \ldots, 5$, то для (3) получаем уравнение

$$u_{x_0x_0} - u_{x_1x_1} - a_j(x_0 - x_1) \sum_{k=2}^{5} \sigma_{kk} u_{x_kx_k} + \frac{2a_j}{\left(\sum_{k=2}^{5} \frac{\alpha_k x_k}{\sqrt{\sigma_{kj}}} + m_j \tilde{A}_j\right)^2} u = 0, \ j = 2, \ldots, 5,$$

$$\sum_{i=2}^{5} \alpha_i^2 = 1,$$

которое эквивалентно частному случаю уравнения (34). Если $\delta_{ij} = 0$, $i, j = 2, \ldots, 5$, то из (26) получаем

$$c = \frac{2a_j}{\left(\alpha_j x_j + \tilde{A}_j \sum\limits_{i=2, i\neq j}^{5} \gamma_{ij}\alpha_i x_i + m_j \tilde{A}_j\right)^2}, \quad j = 2, \ldots, 5, \quad \sum_{i=2}^{5} \alpha_i^2 = 1.$$

Аналогичным образом исследуются остальные случаи нарушения условия (33). Поскольку для построенных уравнений выполняется критерий Адамара, то принцип Гюйгенса удовлетворяется, а все коэффициенты в разложении (20) обращаются в нуль. Таким образом, получаем следующий результат.

Теорема. Уравнение (3), кроме тривиального случая $c = 0$, удовлетворяет принципу Гюйгенса тогда и только тогда, когда функция c равна

$$a) \qquad c = \frac{2a_l(x_0 - x_1)}{(x_l + \alpha_l \tilde{A}_l)^2}, \quad l = 2, \ldots, 5, \quad \text{при} \quad \frac{1}{\sqrt{2a_i}} \neq \frac{\gamma_{ij}\tilde{A}_j}{\sqrt{2a_j}},$$
$$i \neq j, \quad i, j = 2, \ldots, 5;$$

$$b) \quad c = \frac{2a_{i_1}}{\left(\alpha_{i_1} x_{i_1} + \tilde{A}_{i_1} \sum_{k=2}^{p} \gamma_{i_k i_1} \alpha_{i_k} x_{i_k} + m_{i_1} \tilde{A}_{i_1}\right)^2}, \quad \text{при} \quad \frac{1}{\sqrt{2a_{i_k}}} = \frac{\gamma_{i_k i_1}\tilde{A}_{i_1}}{\sqrt{2a_{i_1}}},$$

$$\sum_{r=2}^{5} \alpha_{i_r}^2 = 1, \quad k = 2, \ldots, p, \quad p = 2, \ldots, 4, \quad i_l = 2, \ldots, 5, \quad l = 1, \ldots, 4, \quad i_l \neq i_1.$$

ABSTRACT. In the paper Hadamar's problem for the linear second order hyperbolic equations is investigated. By Hadamard's criterion, all Huygens' equations in six dimensions with diagonal plane wave metric are described.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Hadamard, Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations, New Haven, Yale University Press, 1923.
2. K. Stellmacher, Ein Beispiel einer Huygensschen Differentialgleichung, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl, IIa, Bd. 10, pp. 133 – 138, 1953.
3. P. Günther, Huygens' Principle and Hyperbolic Equations, Acad. Press, Boston, 1988.
4. А. О. Оганесян, "Обобщение метода Лагнеза-Штельмахера на один класс уравнений, удовлетворяющих принципу Гюйгенса", Изв. АН Арм. ССР, Математика, том 25, № 5, стр. 462 — 473, 1990.
5. Н. Х. Ибрагимов, А. О. Оганесян, "Иерархия гюйгенсовых уравнений в пространствах с нетривиальной конформной группой", Успехи Мат. Наук, 46, № 3, стр. 111 – 146, 1991.

18 сентября 1998

Ереванский государственный университет