АСИМПТОТИКА ФУНКЦИЙ ВЕЙЛЯ КАНОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. А. Яврян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 33, № 5, 1998

Статья изучает асимптотику функций Вейля системы дифференциальных уравнений $Jy' = \lambda H(x)y$, где J и $H(x) \geq 0$ – 2×2-мерные матрицы.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$Jy' = \lambda H(x)y, \quad 0 < x < b \leq \infty, \tag{1.1}$$

где

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H(x) = \begin{pmatrix} h_{11}(x) & h_{12}(x) \\ \overline{h_{12}(x)} & h_{22}(x) \end{pmatrix}, \quad y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix},$$

а λ – комплексный параметр. Предполагаем, что $H(x)$ – неотрицательная матрица-функция с локально интегрируемыми элементами $h_{ik} \in L_1(0,a)$ для любого $0 < a < b$. Если y_μ и y_ν – решения уравнения (1.1) при $\lambda = \mu$ и $\lambda = \nu$, то

$$(Jy'_\mu, y_\nu) = \mu(H(x)y_\mu, y_\nu), \quad (y_\mu, Jy'_\nu) = \overline{\nu}(y_\mu, H(x)y_\nu).$$

Суммируя эти уравнения и учитывая, что $J^* = -J$, $H^*(x) = H(x)$, получим (см. [1], гл. 6 и [2], гл. 9)

$$(Jy_\mu(x), y_\nu(x))\Big|_0^a = (\mu - \overline{\nu}) \int_0^a (H(x)y_\mu(x), y_\nu(x))\, dx. \tag{1.2}$$

Данное исследование частично финансировано грантом № 93 – 0249 научного фонда INTAS.

Пусть $\varphi(x,\lambda)$ и $\psi(x,\lambda)$ – решения системы (1.1), удовлетворяющие начальным условиям

$$\varphi(0,\lambda)=\eta_\alpha\equiv\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix},\quad \psi(0,\lambda)=\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix},\quad -\frac{\pi}{2}<\alpha\le\frac{\pi}{2}.$$

Интервал $(0,a)$ называется H-неделимым интервалом типа α, если $H(x)\eta_\alpha=0$ для любого $x\in(0,a)$ (в [3] интервал с этим свойством называется H-неделимым типа $\alpha+\pi/2$). Рассмотрим функцию

$$U_a(\lambda,\beta)=\cos\beta\varphi_2(a,\lambda)-\sin\beta\varphi_1(a,\lambda),\quad -\frac{\pi}{2}<\beta\le\frac{\pi}{2}.$$

Лемма 0. Если $U_a(\lambda_0,\beta)=0$ при некотором λ_0, $\operatorname{Im}\lambda_0\neq 0$, то $\beta=\alpha$ и $U_a(\lambda,\beta)=0$ при всех λ. При этом, интервал $(0,a)$ есть H-неделимый интервал типа α.

Доказательство : Имеем $(J\varphi(a,\lambda_0),\varphi(a,\lambda_0))=0$. Тогда, учитывая уравнение $(J\varphi(0,\lambda_0),\varphi(0,\lambda_0))=0$, из (1.2) получим

$$\int_0^a(H(x)\varphi(x,\lambda_0),\varphi(x,\lambda_0))\,dx=0.$$

Предположение $H(x)\ge 0$ влечет $H(x)\varphi(x,\lambda_0)=0$ при $x\in(0,a)$. Из уравнения (1.1) при $\lambda=\lambda_0$ получим $\varphi(x,\lambda_0)=\eta_\alpha$. Таким образом, $H(x)\eta_\alpha=0$ для $x\in(0,a)$, т.е. $(0,a)$ есть H-неделимый интервал типа α. Из (1.1) следует, что $\varphi((x,\lambda))=\eta_\alpha$ для любого λ и $x\in[0,a]$. Следовательно, $U_x(\lambda,\beta)=0$ для $x\in[0,a]$. Равенство $U_0(\lambda,\beta)=0$ влечет $\beta=\alpha$. Лемма доказана.

Обозначим через

$$\chi(x,\lambda)=\psi(x,\lambda)+m_{a,\beta}(\lambda)\varphi(x,\lambda),\quad \operatorname{Im}\lambda\neq 0 \tag{1.3}$$

решение уравнения (1.1) на $(0,a)$, удовлетворяющее условию

$$\cos\beta\chi_2(a,\lambda)-\sin\beta\chi_1(a,\lambda)=0.$$

Имеем

$$m_{a,\beta}(\lambda)(=m_{a,\beta}(\lambda,\alpha))=-\frac{\cos\beta\psi_2(a,\lambda)-\sin\beta\psi_1(a,\lambda)}{\cos\beta\varphi_2(a,\lambda)-\sin\beta\varphi_1(a,\lambda)},\quad \operatorname{Im}\lambda\neq 0. \tag{1.4}$$

Рассмотрим дробно-линейное отображение

$$m(\lambda)=-\frac{Az+B}{Cz+D},\quad \operatorname{Im}\lambda\neq 0, \tag{1.5}$$

где $A = \psi_1(a,\lambda)$, $B = -\psi_2(a,\lambda)$, $C = \varphi_1(a,\lambda)$, $D = -\varphi_2(a,\lambda)$. Согласно Лемме 0, если $(0,a)$ не является H-неделимым интервалом типа α и $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, то отображение (1.5) переводит вещественную ось $\operatorname{Im} z = 0$ на окружность $C_a(\lambda)(= C_a(\lambda,\alpha))$. Внутренность окружности $C_a(\lambda)$ обозначим через $K_a(\lambda)$. Когда β пробегает интервал $(-\pi/2,\pi/2]$, то точка $m_{a,\beta}(\lambda)$ пробегает окружность $C_a(\lambda)$.

Если $(0,a)$ есть H-неделимый интервал типа α, то прямая $\operatorname{Im} z = 0$ переходит в прямую $\operatorname{Im} m = const$. Из (1.3) следует, что радиус окружности $C_a(\lambda)$ есть

$$r_a(\lambda) = \frac{|AD - BC|}{|\overline{C}D - C\overline{D}|}.$$

Так как $AD - BC = W(a,\lambda)$, где $W(x,\lambda)$ – вронскиан функций $\varphi(x,\lambda)$ и $\psi(x,\lambda)$, $tr(-JH(x)) = -2i \operatorname{Im} h_{12}(x)$, то из формулы Лиувилля–Остроградского получаем

$$AD - BC = \exp\left(-2i\lambda \int_0^a \operatorname{Im} h_{12}(x)\,dx\right).$$

Имеем

$$\overline{C}D - C\overline{D} = -\overline{\varphi_1(a,\lambda)}\varphi_2(a,\lambda) + \varphi_1(a,\lambda)\overline{\varphi_2(a,\lambda)} = (J\varphi(a,\lambda),\varphi(a,\lambda)).$$

С учетом $(J\varphi(0,\lambda),\varphi(0,\lambda)) = 0$, из (1.2) получим

$$\overline{C}D - C\overline{D} = 2i \operatorname{Im}\lambda \int_0^a (H(x)\varphi(x,\lambda),\varphi(x,\lambda))\,dx.$$

Следовательно,

$$r_a(\lambda)(= r_a(\lambda,\alpha)) = \exp\left(2 \operatorname{Im}\lambda \int_0^a \operatorname{Im} h_{12}(x)\,dx\right) \times$$
$$\times \left(2|\operatorname{Im}\lambda| \int_0^a (H(x)\varphi(x,\lambda),\varphi(x,\lambda))\,dx\right)^{-1}.$$

Применяя формулу (1.2) для $y_\lambda = \chi(x,\lambda)$ $(\mu = \nu = \lambda)$ и учитывая, что $(J\chi(a,\lambda),\chi(a,\lambda)) = 0$, находим уравнение окружности $C_a(\lambda)$ в виде

$$\int_0^a \Big(H(x)(\psi(x,\lambda) + m(\lambda)\varphi(x,\lambda)), \psi(x,\lambda) + m(\lambda)\varphi(x,\lambda)\Big)\,dx = \\ = -\frac{\operatorname{Im} m(\lambda)}{\operatorname{Im}\lambda}, \quad \operatorname{Im}\lambda \neq 0. \tag{1.6}$$

Следоватеьно, круг $K_a(\lambda)$ задается неравенством

$$\int_0^a \Big(H(x)(\psi(x,\lambda) + m(\lambda)\varphi(x,\lambda)), \psi(x,\lambda) + m(\lambda)\varphi(x,\lambda)\Big)\,dx \leq \\ \leq -\frac{\operatorname{Im} m(\lambda)}{\operatorname{Im}\lambda}, \quad \operatorname{Im}\lambda \neq 0. \tag{1.7}$$

Обозначим через $L^2_H(0,b)$ гильбертово пространство вектор-функций $f(x)$, для которых

$$|f(x)|^2_H = \int_0^b (H(x)f(x), f(x))\,dx < \infty.$$

Из (1.6) и (1.7) следует, что при $\operatorname{Im}\lambda > 0$ окружности $C_a(\lambda)$ лежат в нижней полуплоскости и $K_{a'}(\lambda) \subseteq K_a(\lambda)$ при $0 < a < a' < b$. Следовательно, множество $K_b(\lambda) \equiv \bigcap\limits_{a<b} K_a(\lambda)$ либо точка, либо круг. Подобно случаю уравнения Штурма–Лиувилля, эти случаи называем случаями **точки Вейля и круга Вейля.** Очевидно, что в случае точки Вейля существует предел $m_b(\lambda) = \lim\limits_{a\to b} m_{a,\beta}(\lambda)$. Этот предел не зависит от β и

$$\chi(\cdot,\lambda) = \psi(\cdot,\lambda) + m_b(\lambda)\varphi(\cdot,\lambda) \in L^2_H(0,b), \quad \operatorname{Im}\lambda \neq 0.$$

Предположим теперь, что при $\operatorname{Im}\Lambda_0 \neq 0$ имеет место случай круга Вейля. Покажем, что $m_b(\lambda)$ можно определить для любого λ, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$. Пусть $m_b(\lambda_0) \in C_b(\lambda_0)$ есть произвольная точка, и пусть

$$\chi_k(x,\lambda) = \psi(x,\lambda) + m_k(\lambda)\varphi(x,\lambda), \quad m_k(\lambda) = m_{a_k,\beta_k}(\lambda),$$

где $a_k \uparrow b$ выбрана так, что $\lim\limits_{k\to\infty} m_k(\lambda_0) = m_b(\lambda_0)$. В (1.2) возьмем $\mu = \lambda_0$, $\nu = \lambda$, $y_\mu = \chi_k(x,\lambda_0)$ и $y_\nu = \chi_k(x,\lambda)$. Так как

$$(J\chi_k(a_k,\lambda_0), \chi_k(a_k,\lambda)) = 0, \quad (J\chi_k(0,\lambda_0), \chi_k(0,\lambda)) = m_k(\lambda_0) - \overline{m_k(\lambda)},$$

получим

$$(\lambda_0 - \overline{\lambda}) \int_0^{a_k} \Big(H(x)\chi_k(x,\lambda_0), \chi_k(x,\lambda)\Big)\,dx = -m_k(\lambda_0) + \overline{m_k(\lambda)}.$$

Подставив значение χ_k из (1.3) в это уравнение и решая относительно $\overline{m_k(\lambda)}$, получим

$$\overline{m_k(\lambda)} = \frac{m_k(\lambda_0) + (\lambda_0 - \overline{\lambda}) \int_0^{a_k} \big(H(x)\chi_k(x,\lambda_0), \psi(x,\lambda)\big)\,dx}{1 - (\lambda_0 - \overline{\lambda}) \int_0^{a_k} \big(H(x)\chi_k(x,\lambda_0), \varphi(x,\lambda)\big)\,dx}. \tag{1.8}$$

Если $K_b(\lambda)$ есть круг, то $\varphi(\cdot,\lambda) \in L^2_H(0,b)$ и $\psi(\cdot,\lambda) \in L^2_H(0,b)$. Из (1.8) следует, что существует $\lim\limits_{k\to\infty} m_k(\lambda)$, который обозначим через $m_b(\lambda)$. Таким образом

$$\overline{m_b(\lambda)} = \frac{m_b(\lambda_0) + (\lambda_0 - \overline{\lambda}) \int_0^{b} \big(H(x)\chi(x,\lambda_0), \psi(x,\lambda)\big)\,dx}{1 - (\lambda_0 - \overline{\lambda}) \int_0^{b} \big(H(x)\chi(x,\lambda_0), \varphi(x,\lambda)\big)\,dx}.$$

Следовательно, $m_b(\lambda)(= m_b(\lambda,\alpha))$ определяется выбором $m_b(\lambda_0) \in C_b(\lambda_0)$ и не зависит от выбора последовательности $m_b(\lambda_0)$. Подобно случаю операторов Штурма–Лиувилля, $m_b(\lambda)$ называется **функцией Вейля**.

Отметим, что если b – регулярный конец, то выбор $m_b(\lambda_0)$ определяет выбор β и при этом $m_b(\lambda) = m_{b,\beta}(\lambda)$. Так как $-\operatorname{Im} m_b(\lambda) \geq 0$ при $\operatorname{Im}\lambda > 0$, функция $-m_b(\lambda)$ имеет представление (см. [2])

$$-m_b(\lambda) = c + l\lambda + \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{t-\lambda} - \frac{t}{1+t^2}\right) d\sigma(t), \quad \operatorname{Im}\lambda > 0,$$

где $\sigma(t)$ – неубывающая функция, $\operatorname{Im} c = 0$, $l \geq 0$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{1+t^2} < \infty.$$

Функция $\sigma(t)$ называется **спектральной функцией** $-m_b(\lambda)$.

§2. ФОРМУЛИРОВКА И ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega \\ \omega & \omega_2 \end{pmatrix} \neq 0, \quad d = \sqrt{\det\Omega}$$

вещественная неотрицательная матрица и пусть

$$\beta(x) = \frac{1}{x}\int_0^x |H(s) - \Omega|\, ds.$$

Здесь и ниже $|B|$ означает сумму модулей элементов матрицы B. Обозначим

$$S_\theta = \{\lambda :\ 0 < \theta < \arg\lambda < \pi - \theta\}.$$

Теорема 1. Пусть

$$\beta(x) = o(1), \quad x \to 0. \tag{2.1}$$

Тогда $m_b(\lambda)$ имеет конечный или бесконечный предел при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in S_\theta$ и

$$\lim_{\lambda\to\infty} m_b(\lambda) = \begin{cases} -(\omega(\alpha) + id)(\omega_1(\alpha))^{-1}, & \omega_1(\alpha) \neq 0, \\ \infty, & \omega_1(\alpha) = 0, \end{cases}$$

где

$$\omega_1(\alpha) = \omega_1\cos^2\alpha + 2\omega\sin\alpha\cos\alpha + \omega_2\sin^2\alpha,$$

$$\omega(\alpha) = \omega\cos^2\alpha + (\omega_2 - \omega_1)\sin\alpha\cos\alpha - \omega\sin^2\alpha.$$

Применив теорему И. Капа (см. [4], [2], Дополнение 1), получим

Следствие 1. При условиях (2.1) и $d \neq 0$ спектральная функция $\sigma(\lambda)$ функции $-m_b(\lambda)$ удовлетворяет условию : для любого $\delta > 0$

$$\int_{|t|>1} \frac{1}{|t|}\, d\sigma(t) = \infty, \quad \int_{|t|>1} \frac{1}{|t|^{1+\delta}}\, d\sigma(t) < \infty.$$

Учитывая важность частного случая $d = 0$, сформулируем результат в виде отдельной теоремы.

Теорема 2. При условиях (2.1) и $d = 0$

$$\lim_{\lambda\to\infty} m_b(\lambda) = \begin{cases} -\gamma(\alpha), & \omega_1 \neq 0, \\ -\cot\alpha, & \omega_1 = 0, \end{cases}$$

где

$$\gamma(\alpha) = \frac{\omega\cos\alpha - \omega_1\sin\alpha}{\omega_1\cos\alpha + \omega\sin\alpha}.$$

При условиях более сильных чем (2.1), можно получить уточнение Теоремы 2, которое мы приводим в случае $\omega_1 \neq 0$.

Теорема 3. Пусть $d = 0$, $\omega_1 \neq 0$, $\omega_1\cos\alpha + \omega\sin\alpha \neq 0$ и

$$\beta(x) = o\left(\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{-\sigma}\right), \qquad x \to 0, \quad \sigma > 4. \tag{2.2}$$

Тогда для любого $\delta \in (1, \sigma/4)$

$$m_b(\lambda) = -\gamma(\alpha) + o\left((\ln\tau)^{-\delta}\right), \quad \lambda \to \infty, \quad \lambda \in S_\theta, \quad \tau = \operatorname{Im}\lambda.$$

Снова применив теорему И. Каца, получим

Следствие 2. При условиях Теоремы 3 имеем $(1+|t|)^{-1} \in L^1_\sigma(-\infty,\infty)$ и

$$-m_b(\lambda) = \gamma(\alpha) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t-\lambda}, \quad \operatorname{Im}\lambda \neq 0.$$

Рассмотрим теперь более общее уравнение чем (1.1) :

$$Jy' - F(x)y = \lambda H(x)y, \quad 0 < x < b \leq \infty, \tag{2.3}$$

где $F(x) = F^*(x)$ и $H(x) \geq 0$ – 2×2 матрицы-функции с комплексными локально–интегруемыми в $[0, b)$ элементами. Этот случай сводится к (1.1) (см. [1], гл. 6). Действительно, пусть $V(x)$ – абсолютно непрерывная матрица-функция такая, что $V(0) = I$ и

$$JV'(x) - F(x)V(x) = 0. \tag{2.4}$$

Имеем $V^*(x)JV(x) = J$ и при $y = V(x)z$ уравнение (1.1) сводится к

$$Jz' = \lambda\widetilde{H}(x)z, \quad \widetilde{H}(x) = V^*(x)H(x)V(x). \tag{2.5}$$

Легко видеть, что если $H(x)$ удовлетворяет условию (2.1), то $\widetilde{H}(x)$ тоже удовлетворяет (2.1). Таким образом, утверждения Теорем 1 и 2 сохраняют силу для уравнения (2.3).

При предположениях, что $F(x)$ – вещественная, $H(x)$ – диагональная матрица и $\omega_1, \omega_2 > 0$ (следовательно, $d > 0$), Теорема 1 для (2.3) была установлена в [5].

Рассмотрим уравнение

$$-u'' + q(x)u = \lambda u, \quad 0 < x < b, \tag{2.6}$$

где $q(x)$ вещественна, $q \in L_1(0, a)$ для любого $a \in (0, b)$. Пусть $\Phi(x, \lambda)$ и $\Psi(x, \lambda)$ – решения уравнения (2.6), удовлетворяющие условиям

$$\Phi(0, \lambda) = \cos\alpha, \quad \Phi'(0, \lambda) = \sin\alpha, \quad \Psi(0, \lambda) = -\sin\alpha, \quad \Psi'(0, \lambda) = \cos\alpha.$$

Подставляя $y_1 = u$, $y_2 = u'$, уравнение (2.6) переходит в (2.3), где

$$F(x) = \begin{pmatrix} -q(x) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если $V(x) = ||v_{ik}(x)||$ $(i, k = 1, 2)$ решение уравнения (2.4), то введя $y(x) = V(x)z$, получим (2.5), где

$$\widetilde{H}(x) = \begin{pmatrix} v_{11}^2(x) & v_{11}(x)v_{12}(x) \\ v_{11}(x)v_{12}(x) & v_{12}^2(x) \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что $v_{11}(x)$ и $v_{12}(x)$ удовлетворяют (2.6) при $\lambda = 0$ и $v_{11}(0) = v'_{12}(0) = 1$, $v'_{11}(0) = v_{12}(0) = 0$. Тогда, при $\Omega = \widetilde{H}(0) = H(0)$ имеем

$$\beta(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \left|\widetilde{H}(s) - \Omega\right| ds = O(x), \quad x \to 0.$$

Следовательно, выполняются условия Теоремы 3. С другой стороны, легко проверить, что функция

$$w_{a,\beta}(\lambda) = -\frac{\Psi(a, \lambda)\cos\beta - \Psi'(a, \lambda)\sin\beta}{\Phi(a, \lambda)\cos\beta - \Phi'(a, \lambda)\sin\beta}$$

совпадает с $m_{a,\beta}(\lambda)$ для системы (2.5). Следовательно, применяя Теорему 3, для функции Вейля $w_b(\lambda)$ уравнения (2.6), получаем известную формулу (см. [6] и [7], гл. 2) :

$$-w_b(\lambda) = -\tan\alpha + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t - \lambda}, \quad \operatorname{Im}\lambda \neq 0.$$

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Докажем Теоремы 1 – 3 при предположении, что $\alpha = 0$.

Лемма 1. Если $d = 0$, $\alpha = 0$ и $\beta(x) = o(1)$ при $x \downarrow 0$, то

$$m_b(\lambda) = -\frac{\omega}{\omega_1} + o(1), \quad \lambda \to \infty, \quad \lambda \in S_\theta, \quad \omega_1 \neq 0, \tag{3.1}$$

$$\lim_{\lambda \to \infty} m_b(\lambda) = \infty, \quad \lambda \in S_\theta, \quad \omega_1 = 0. \tag{3.2}$$

Доказательство : Сначало предположим, что $\beta(x) > 0$ при $x > 0$. Пусть $\beta_1(x) = \sup\{\beta(t) : 0 \leq t \leq x\}$. Заметим, что $\beta_1(x)$ убывает, если x убывает и $\beta_1(x) = o(1)$ при $x \downarrow 0$. Пусть

$$\tau(x) = \frac{1}{x}\beta_1(x)^{-\delta}, \quad 0 < \delta < \frac{1}{3}.$$

Обозначим через $X(\tau)$ обратную к $\tau(x)$ функцию, так что $X(\tau)$ убывает. Имеем $X(\tau) = o(1)$, $\tau X(\tau) \to \infty$ и

$$\tau^3 X^2(\tau) \int_0^{X(\tau)} |H(s) - \Omega|\, ds = o(1), \quad \tau \to \infty. \tag{3.3}$$

Пусть 2×2 матрица-функция $Y_0(x, \lambda)$ – решение системы

$$JY_0' = \lambda \Omega Y_0, \quad Y_0(0, \lambda) = I.$$

Имеем $Y_0(x, \lambda) = \exp(-\lambda x J \Omega)$, и следовательно

$$Y_0(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 + \lambda x \omega & \lambda x \omega_2 \\ -\lambda x \omega_1 & 1 - \lambda x \omega \end{pmatrix} = I - \lambda x J \Omega. \tag{3.4}$$

Пусть $y(x, \lambda)$ – некоторое решение уравнения (1.1), которое запишем в виде

$$Jy' - \lambda \Omega y = \lambda(H(x) - \Omega)y.$$

Применяя метод вариации постоянных, получаем

$$y(x, \lambda) = Y_0(x, \lambda)y(0, \lambda) + \lambda \int_0^x Y_0(x - s, \lambda)A(s)y(s, \lambda)\, ds, \tag{3.5}$$

где $A(x) = -J(H(x) - \Omega)y$. Так как

$$|Y_0(x, \lambda)| \leq 1 + x|\lambda \Omega| \leq M_1(1 + |\lambda| x),$$

из (3.5) имеем

$$|y(x, \lambda)| \leq M_1(1 + x|\lambda|)|y(0, \lambda)| + M_1|\lambda|(1 + |\lambda| x) \int_0^x |A(s)| \cdot |y(s, \lambda)|\, ds$$

или

$$\frac{|y(x,\lambda)|}{1+|\lambda|x} \le M_1|y(0,\lambda)| + M_1|\lambda| \int_0^x (1+|\lambda|s)|A(s)| \frac{|y(s,\lambda)|}{1+|\lambda|s}\, ds.$$

Здесь M_1 и в дальнейшем M_k – некоторые положительные константы. Из леммы Гронуолла (см. [8]) имеем

$$|y(x,\lambda)| \le M_1(1+x|\lambda|)|y(0,\lambda)| \exp\left[M_1|\lambda|(1+|\lambda|x)\int_0^x |A(s)|\, ds\right]. \tag{3.6}$$

Так как $\lambda \in S_\theta$, имеем $|\lambda| \le \tau/\sin\theta$, где $\tau = \operatorname{Im}\lambda > 0$. Из (3.3) и $|A(x)| = |H(x)-\Omega|$ следует, что при $x = X(\tau)$ и $\lambda \in S_\theta$ показатель экспоненты в (3.6) есть $o(1)$ при $\tau \to \infty$, и, следовательно, ограничен. Из (3.5) получим

$$|y(x,\lambda)| \le M_2(1+\tau x)|y(0,\lambda)|, \quad 0 \le x \le X(\tau). \tag{3.7}$$

Тогда

$$|y(x,\lambda) - Y_0(x,\lambda)y(0,\lambda)| \le M_1M_2\tau(1+\tau X(\tau))^2|y(0,\lambda)| \int_0^{X(\tau)} |A(s)|\, ds, \tag{3.8}$$
$$0 \le x \le X(\tau).$$

Пусть $y(0,\lambda) = y(0)$ не завист от λ. Из (3.8) и (3.3) следует, что

$$|y(x,\lambda) - Y_0(x,\lambda)y(0)| = o(1), \quad \lambda \to \infty, \quad \lambda \in S_\theta, \quad 0 \le x \le X(\lambda). \tag{3.9}$$

Таким образом, согласно (3.4) при $0 \le x \le X(\lambda)$ имеем

$$\begin{aligned} \varphi(x,\lambda) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda x \begin{pmatrix} \omega \\ -\omega_1 \end{pmatrix} + o(1), \\ \psi(x,\lambda) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda x \begin{pmatrix} \omega_2 \\ -\omega \end{pmatrix} + o(1), \quad \lambda \to \infty, \quad \lambda \in S_\theta. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Следовательно,

$$\mu(\lambda) \equiv m_{X(\tau),\pi/2}(\lambda) = -\frac{\psi_1(X(\tau),\lambda)}{\varphi_1(X(\tau),\lambda)} = -\frac{\lambda X(\tau)\omega_2 + o(1)}{1+\lambda X(\tau)\omega + o(1)}. \tag{3.11}$$

Для $\omega \ne 0$ имеем $\omega_1 \ne 0$, $\omega_2 \ne 0$ и согласно (3.11)

$$\mu(\lambda) = -\frac{\omega_2}{\omega} + o(1) = -\frac{\omega}{\omega_1} + o(1). \tag{3.12}$$

Для $\omega = 0$, $\omega_1 \ne 0$ имеем $\omega_2 = 0$ и $\mu(\lambda) = o(1)$. Оценим теперь радиус $r_{X(\tau)}(\lambda)$ соответствующего круга. Учитывая $\Omega\begin{pmatrix} \omega \\ -\omega_1 \end{pmatrix} = 0$, из (3.10) получим

$$(\Omega\varphi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda)) = \omega_1 + o(1), \quad 0 \le x \le X(\tau).$$

Следовательно,

$$I_1 = 2\tau \int_0^{X(\tau)} \left(\Omega\varphi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda)\right) dx = 2\tau X(\tau)(\omega_1 + o(1)).$$

Обозначив через $||T||$ норму 2×2-матрицы T в $\mathbf{C}^2$, а через $||\gamma||$ норму $\gamma \in \mathbf{C}^2$, имеем $||T|| \le \sqrt{2}|T|$ и $||\gamma|| \le |\gamma|$. Из (3.3) и (3.7) следует, что

$$I_2 = 2\tau \int_0^{X(\tau)} \left((H(x) - \Omega)\varphi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda)\right) dx \le$$

$$\le M_3\tau[1 + \tau X(\tau)]^2 \int_0^{X(\tau)} |H(x) - \Omega|\, dx = o(1)).$$

Так как Ω вещественна, из (3.3) и (3.5) имеем

$$r_{X(\tau)}(\lambda) = \frac{1}{I_1 + I_2} \exp\left(-2\tau \int_0^{X(\tau)} \operatorname{Im} h_{12}(x)\, dx\right) =$$
$$= \frac{1}{2\omega_1 \tau X(\tau)}(1 + o(1)) = o(1), \quad \lambda \to \infty, \quad \lambda \in S_\theta. \tag{3.13}$$

Так как $m_b(\lambda) \in K_{X(\tau)}(\lambda)$, то

$$|m_b(\lambda) - \mu(\lambda)| \le 2r_{X(\tau)}(\lambda) = o(1).$$

Таким образом, при условии $\beta(x) > 0$ для $x > 0$, из (3.12) и (3.13) следует утверждение (3.1) Леммы 1. Если $\beta(a) = 0$ при некотором $a \in (0, b)$, то $H(x) = \Omega$ почти всюду в $(0, a)$. Тогда, при $x \in (0, a)$ и $\omega_1 \ne 0$, (3.10) переходит в точные равенства

$$m_{a,\pi/2}(\lambda) = -\frac{\lambda x \omega_2}{1 + \lambda x \omega} = -\frac{\omega}{\omega_1} + o(1), \quad \lambda \to \infty,$$

$$r_a(\lambda) = \frac{1}{2\omega_1 a \tau} \to 0, \quad \tau \to \infty.$$

Первое утверждение Леммы 1 доказывается как и выше.

Пусть теперь $\omega_1 = 0$, а значит $\omega = 0$, $\omega_2 \ne 0$. Для $\alpha = \beta = \pi/2$ при (1.4) получаем

$$m_{a,\pi/2}\left(\lambda, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\varphi_1(a,\lambda)}{\psi_1(a,\lambda)} = -\frac{1}{m_{a,\pi/2}(\lambda)}.$$

Заметим, что $m_{a,\pi/2}(\lambda, \pi/2)$ принадлежит окружности $C_a(\lambda, \pi/2)$ с радиусом

$$r_a(\lambda, \pi/2) = \left[2\tau \int_0^{X(\tau)} (H(x)\psi(x,\lambda), \psi(x,\lambda))\, dx\right]^{-1} \times$$

$$\times \exp\left(-2\tau \int_0^{X(\tau)} \operatorname{Im} h_{12}(x)\, dx\right).$$

Повторяя предыдущие рассуждения с заменой ψ на φ, заключаем, что $\omega_2 \ne 0$ влечет $m_b(\lambda, \pi/2) \to 0$. Так как $m_b(\lambda) m_b(\lambda, \pi/2) = -1$, получим (3.2).

При несколько более жестких условиях на $\beta(x)$, можно получить более точную формулировку, которая содержит случай задачи Штурма–Лиувилля.

Лемма 2. Пусть $d = 0$, $\alpha = 0$, $\omega_1 \neq 0$ и

$$\beta(x) = \frac{1}{x}\int_0^x |H(s) - \Omega|\, ds = o\left(\left(\log\frac{1}{x}\right)^{-\sigma}\right), \quad x \to 0, \quad \sigma > 4.$$

Тогда для любого $\delta \in (1, \sigma/4)$

$$m_b(\lambda) = -\frac{\omega}{\omega_1} + o\left((\log\tau)^{-\delta}\right), \quad \lambda \to \infty, \quad \lambda \in S_\theta, \quad \tau = \operatorname{Im}\lambda. \tag{3.14}$$

Если $\sigma(t)$ – спектральная функция $-m_b(\lambda)$, то $(1+|t|)^{-1} \in L^1_\sigma(-\infty,\infty)$ и

$$-m_b(\lambda) = \frac{\omega}{\omega_1} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t-\lambda}\, d\sigma(t), \quad \operatorname{Im}\lambda \neq 0. \tag{3.15}$$

Доказательство : Пусть

$$X(\tau) = \frac{1}{\tau}(\log\tau)^\delta, \quad \delta \in \left(1, \frac{\sigma}{4}\right), \quad \tau > \tau_0 = e^\delta. \tag{3.16}$$

Функция $X(\tau)$ убывает при $\tau > \tau_0$ и удовлетворяет условию

$$\tau^3 X^2(\tau)\int_0^{X(\tau)} |H(s) - \Omega|\, ds = o\left((\log\tau)^{-\nu}\right), \quad \nu = \sigma - 3\delta > 1, \quad \tau \to \infty.$$

Используя (3.8), получим (ср. с (3.9))

$$|y(x,\lambda) - Y_0(x,\lambda)| = o\left((\log\tau)^{-\nu}\right).$$

Тогда, при $0 \le x \le X(\tau)$, $\lambda \in S_\theta$ имеем

$$\varphi(x,\lambda) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \lambda x\begin{pmatrix}\omega\\-\omega_1\end{pmatrix} + o\left((\log\tau)^{-\nu}\right),$$

$$\psi(x,\lambda) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \lambda x\begin{pmatrix}\omega_2\\-\omega\end{pmatrix} + o\left((\log\tau)^{-\nu}\right), \quad \lambda \to \infty.$$

Из (3.11)

$$m_{X(\tau)}(\lambda) = -\frac{\omega}{\omega_1} + o\left((\log\tau)^{-\nu}\right). \tag{3.17}$$

Из (3.13) и (3.16)

$$r_{X(\tau)}(\lambda) = \frac{1}{2\omega_1(\log\tau)^\delta}(1 + o(1)). \tag{3.18}$$

Так как $\delta < \nu$, (3.17) и (3.18) влекут (3.14). Для доказательства (3.15) заметим, что из (3.17) следует $-\operatorname{Im} m_b(i\tau) = o\left((\log\tau)^\delta\right)$. Следовательно,

$$-\int_1^\infty \frac{1}{\tau}\operatorname{Im} m_b(i\tau)\, d\tau < \infty.$$

Согласно теореме И. Капа, $(1+|t|)^{-1} \in L^1_\sigma(-\infty,\infty)$. Вместе с (3.14) это дает (3.15).

Лемма 3. Если $\alpha = 0$ и $\beta(x) = o(1)$ при $x \to 0$, то

$$m_b(\lambda) = -\frac{\omega + id}{\omega_1} + o(1), \quad \text{при} \quad \omega_1 \neq 0, \tag{3.19}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} m_b(\lambda) = \infty, \quad \lambda \to \infty, \quad \lambda \in S_\theta, \quad \text{при} \quad \omega_1 = 0\ (\Rightarrow d = 0).$$

Доказательство : Случай $d = 0$ уже доказан в Лемме 1. Таким образом, остается доказать (3.19) при $d \neq 0$. Легко видеть, что функция

$$Y_0(x,\lambda) = \exp(-\lambda x J\Omega) = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{d}\sin\lambda dx + \cos\lambda dx & \frac{\omega_2}{d}\sin\lambda dx \\ -\frac{\omega_1}{d}\sin\lambda dx & -\frac{\omega}{d}\sin\lambda dx + \cos\lambda dx \end{pmatrix}$$

есть решение уравнения (1.2) и

$$|Y_0(x,\lambda)| \leq M_4 \exp(\tau dx), \quad \tau = \operatorname{Im}\lambda. \tag{3.20}$$

Предположим, что $\beta(x) > 0$ при $x > 0$, и пусть $\tau(x) = [x\beta_1(x)]^{-1}$. Обозначим через $X(\tau)$ обратную функцию к $\tau(x)$ и заметим, что $X(\tau)$ убывает, удовлетворяет (1.1) и

$$\tau \int_0^{X(\tau)} |H(x) - \Omega|\, dx = o(1), \quad \tau \to \infty. \tag{3.21}$$

Как и в доказательстве Леммы 1, из (1.4), (3.20), (3.21) и леммы Гронуолла получим

$$|y(x,\lambda)| \leq M_4 \exp(\tau dx)|y(0)|, \quad 0 \leq x \leq X(\tau).$$

В силу (1.4) и (3.21)

$$|y(x,\lambda) - Y_0(x,\lambda)y(0)| \leq \exp(\tau dx)o(1), \quad 0 \leq x \leq X(\tau),$$

откуда при $y = \varphi(x,\lambda)$ и $y = \psi(x,\lambda)$ следует

$$\varphi_1(x,\lambda) = \frac{-\omega + id}{2id}\exp(\tau dx)(1 + o(1)), \tag{3.22}$$

$$\psi_1(x,\lambda) = \frac{-\omega_2}{2id}\exp(\tau dx)(1 + o(1)), \quad 0 \leq x \leq X(\tau).$$

Тогда

$$\mu(\lambda) \equiv m_{X(\tau),\pi/2}(\lambda) = -\frac{\omega + id}{\omega_1} + o(1), \quad \lambda \to \infty.$$

Так как $d > 0$, при некотором $c_1 > 0$ имеем

$$(\Omega\varphi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda)) \geq c_1|\varphi(x,\lambda)|^2 \geq c_1|\varphi_1(x,\lambda)|^2.$$

Следовательно, из (3.22) при некотором $c_2 > 0$

$$I_1 = 2\tau \int_0^{X(\tau)} \left(\Omega\varphi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda)\right) dx \geq \tau e^{2d\tau X(\tau)}(c_2 + o(1)).$$

С другой стороны, из (3.21) имеем

$$I_2 = 2\tau \int_0^{X(\tau)} \left((H(x) - \Omega)\varphi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda)\right) dx \leq \tau e^{2d\tau X(\tau)} o(1).$$

Так как Ω вещественна, из (1.4) и (3.21) получим $r_{X(\tau)}(\lambda) = o(1)$. Как и в доказательстве Леммы 1, это дает (3.19). Доказательство (3.19) в случае $\beta(a) = 0$, $0 < a < b$ аналогично доказательству (3.1). Лемма 3 доказана.

Мы доказали Теоремы 1 – 3 в случае $\alpha = 0$. Покажем, что общий случай можно свести к этому случаю. Пусть

$$y = U_\alpha z, \quad U_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение (1.1) сводится к уравнению

$$Jz' = \lambda \widetilde{H}(x) z, \quad \widetilde{H}(x) = U_\alpha^{-1} H(x) U_\alpha. \tag{3.23}$$

При этом, решения $\varphi(x,\lambda)$ и $\psi(x,\lambda)$ уравнения (1.1), удовлетворяющие условиям

$$\varphi^*(0,\lambda) = (\cos\alpha, \sin\alpha), \quad \psi^*(0,\lambda) = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$$

переходят в решения $\widetilde{\varphi}$ и $\widetilde{\psi}$ уравнения (3.23) с условиями $\widetilde{\varphi}^*(0,\lambda) = (1,0)$ и $\widetilde{\psi}^*(0,\lambda) = (0,1)$, соответственно. Положим $\widetilde{\Omega} = U_\alpha^{-1}\Omega U_\alpha$. Легко проверить, что

$$\widetilde{\Omega} = \begin{pmatrix} \omega_1(\alpha) & \omega(\alpha) \\ \omega(\alpha) & \omega_2(\alpha) \end{pmatrix},$$

где

$$\omega_1(\alpha) = \omega_1 \cos^2\alpha + 2\omega \sin\alpha\cos\alpha + \omega_2 \sin^2\alpha,$$

$$\omega(\alpha) = \omega \cos^2\alpha + (\omega_2 - \omega_1)\sin\alpha\cos\alpha - \omega\sin^2\alpha,$$

$$\omega_2(\alpha) = \omega_2 \cos^2\alpha - 2\omega\sin\alpha\cos\alpha + \omega_1 \sin^2\alpha.$$

Очевидно, $\det\widetilde{\Omega} = \det\Omega = d$, и $\widetilde{H}(x)$ удовлетворяет (2.1) (или (2.2)) с заменой Ω на $\widetilde{\Omega}$, если только $H(x)$ удовлетворяет условию (2.1) (или (2.2)), что и требовалось доказать.

ABSTRACT. The paper investigates asymptotic behavior of Weyl functions of the system of differential equations $Jy' = \lambda H(x)y$, where J and $H(x) \geq 0$ are 2×2 matrices.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Теория Вольтеровых Операторов в Гильбертовом Пространстве и ее Приложения, Наука, Москва, 1967.
2. Ф. В. Аткинсон, Дискретные и Непрерывные Граничные Задачи, Мир, 1968.
3. И. Ц. Кац, "Линейные соотношения, порождаемые каноническими дифференциальными уравнениями", Функциональный анализ и его приложения, том 17, № . 4, стр. 86 – 87, 1983.
4. И. Ц. Кац, "Об интегральном представлении функций, отображающих верхнюю полуплоскость в ее часть", УМН, том 11, № 3(69), 1956.
5. W. N. Everitt, D. B. Hinton, J. K. Shaw, "The asymptotic form of the Titschmarsch-Weyl coefficients for Dirac system", J. London Math. Soc., vol. 27, № 2, pp. 465 – 476, 1983.
6. В. А. Марченко, "Разложения по собственным функциям несамосопряженных сингулярных дифференциальных операторов второго порядка", Матем. сб., том 52, № 2, стр. 739 – 789, 1960.
7. Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака, Наука, Москва, 1988.
8. Ф. Хартман, Обыкновенные Дифференциальные Уравнения, Мир, Москва, 1970.

15 ноября 1997

Ереванский государственный университет