ТОЧЕЧНОЕ СТОХАСТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ

Т. А. Симонян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 33, № 5, 1998

Рассматривается дифференциальная игра уклонения поэтапно меняющейся нелинейной системы от m целевых множеств в классе стохастических программных стратегий. Второй игрок строит свою стратегию, отслеживая построенный поводырь при самом упорном сопротивлении со стороны первого игрока. Сформулированы и доказаны принцип минимума и правило максимина. Получена оценка, позволяющая оценить уклонение стохастического программного пучка системы от поводыря в любой момент времени.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть движение системы в конфликтно-управляемой дифференциальной игре описывается дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_k = f_k(t, x_k, u_k, v_k), \quad k \in I = \{1, ..., m\}, \tag{1.1}$$

где $f_k : [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times P_k \times Q_k \longmapsto \mathbb{R}^n$ – непрерывные функции и допускают непрерывные производные $\dfrac{\partial f_k}{\partial x_k'}$, компактные множества $P_k \subset \mathbb{R}^{p_k}$ и $Q_k \subset \mathbb{R}^{q_k}$ суть множества возможностей игроков. Предполагаем, что f_k удовлетворяет условию бесконечной продолжимости решения для каждого $k \in I$

$$|x_k' f_k(t, x_k, u_k, v_k)| \le \chi_k(1+||x_k||^2), \quad (t, x_k, u_k, v_k) \in [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times P_k \times Q_k, \tag{1.2}$$

где χ_k – постоянные числа. Предполагается, что выполняется условие седловой точки (см. [1], стр. 55) для каждого $k \in I$:

$$\min_{u_k \in P_k} \max_{v_k \in Q_k} S' f_k(t, x_k, u_k, v_k) = \max_{v_k \in Q_k} \min_{u_k \in P_k} S' f_k(t, x_k, u_k, v_k),$$

$$(t, x_k) \in [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \quad S \in \mathbb{R}^n. \tag{1.3}$$

Предположим также, что заданы замкнутые множества M_k в евклидовом пространстве $\{t, x\} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Пусть задан набор моментов времени $t_0 = \theta_0 \leq \theta_1 \leq \cdots \leq \theta_m = \theta$, причем

$$M_k \cap \{(t, x) : x \in \mathbb{R}^n,\ t = \theta_k\} \neq \emptyset, \quad k \in I. \tag{1.4}$$

Пусть $(t_0; x_0)$ – исходная позиция системы (1.1), где $x_0 = x(t_0)$, и Δ_r – разбиение полуоси $[t_0, \infty)$ узлами $\tau_i^{(r)}$ с диаметром разбиения

$$\delta_r = \sup_i \left[\tau_{i+1}^{(r)} - \tau_i^{(r)}\right], \quad r = 1, 2, \ldots$$

Предположим, что для каждого r моменты времени θ_k принадлежат множеству узлов разбиения, т.е.

$$\tau_{i_0}^{(r)} = \theta_0, \quad \tau_{i_1}^{(r)} = \theta_1, \quad \cdots \tau_{i_m}^{(r)} = \theta_m = \theta.$$

Рассмотрим дифференциальную игру уклонения от всех множеств M_k к моментам времени θ_k, $k \in I$ при условиях (1.1) – (1.4), в которой управления u_k и v_k являются случайными функциями, т.е. зависят от элементарных событий $\omega_{i_k} = \{\xi_1, \ldots, \xi_{i_k}\}$ из вероятностного пространства $\{\Omega_{i_k}, B_{i_k}, \mathrm{P}_{i_k}\}$, которое строится по схеме, описанной в [2], стр. 291.

Определение 1.1. Стохастическим программным управлением

$$\eta_{j,(\cdot)} = \eta_{j,(t,\omega)} = \eta_{j,(\cdot)}(du_k, dv_k|(t, \omega)), \quad t \in [\theta_{k-1}, \theta_k)$$

назовем любое измеримое по t, ω отображение из $(t_0, \infty) \times \Omega_{i_k}$ в пространство вероятностных мер из множества $P_k \times Q_k$, удовлетворяющее условию

$$\eta_{j,(\cdot)}(du_k, dv_k|(t, \omega)) = \eta_{j,(\cdot)}[du_k, dv_k|(t, \xi_1, \ldots, \xi_i)], \quad t \in \left[\tau_{i-1}^{(r)}, \tau_i^{(r)}\right).$$

Определение 1.2. Стохастическим кусочным управлением

$$\eta_{j,(t,\omega)}, \quad t_* \leq t < \theta_m, \quad \theta_{k-1} \leq t_* \leq \theta_k, \quad j = k, \ldots, m, \quad \omega \in \Omega_k$$

назовем любой набор $\eta_{\{j\},(t,\omega)}$ стохастических программных управлений.

Определение 1.3. Множество

$$\left\{\eta_{\{j\},(\cdot)}, [t_*, \theta_m), \nu_{\{j\},(\cdot)}\right\}_{\Pi}, \quad \theta_{k-1} \leq t_* \leq \theta_k, \quad j = k, \ldots, m, \quad \omega \in \Omega_k, \quad k \in I$$

всех стохастических кусочных программных управлений, удовлетворяющих равенству

$$\int_{P_k} \eta_{\{j\},(t,\omega)}(du_k, dv_k|(t,\omega)) = \eta_{\{j\},(t,\omega)}(P_k, dv_k) = \nu_{\{j\},(t,\omega)}(du_k), \quad \omega \in \Omega_k$$

при почти всех значениях $t \in [t_*, \theta_m)$, назовем **стохастической кусочной элементарной программой.**

Всякая стохастическая кусочная элементарная программа является выпуклой, замкнутой и компактным множеством стохастических кусочных программных управлений.

Определение 1.4. Замыкание какого-либо объединения стохастических кусочных элементарных программ назовем **стохастической кусочной элементарной программой** $\{\eta_{\{j\},(\cdot)}, [t_*, \theta_m)\}_\Pi$ **второго игрока на полуинтервале** $[t_*, \theta_m)$ $(j = k, ..., m, \omega \in \Omega_k,\ k \in I)$.

Определение 1.5. Функция $x(t,\omega)$, которая на интервале $[max\{t_*, \theta_{j-1}\}, \theta_j)$ совпадает с решением $x_j(t,\omega)$ стохастического дифференциального уравнения

$$\dot{x}_j = \int_{P_j}\int_{Q_j} f_j(t, x_j, u_j, v_j)\eta_{j,(t,\omega)}(du_j, dv_j|(t,\omega)) \tag{1.5}$$

и удовлетворяет начальному условию $x(t_*) = x_*$, называется **стохастическим программным движением**

$$x(t,\omega) = x(t,\omega,t_*,x_*,\eta_{\{j\},(\cdot)}), \quad t_* \in [\theta_{k-1}, \theta_k), \quad t \in [t_*, \theta_m), \quad \omega \in \Omega_k,$$

порожденным кусочным стохастическим управлением $\eta_{\{j\},(t,\omega)}$, **исходящим из точки** (t_*, x_*). Заметим, что для решений x_j, $j = k, ..., m-1$ выполнено условие непрерывности $x_j(\theta_j,\omega) = x_{j+1}(\theta_j,\omega)$.

Определение 1.6. Множество функций $\{x(t,\omega,t_*,x_*,\eta_{\{j\},(\cdot)})\}$ назовем **движением, порожденным стохастической кусочно-элементарной программой**

$$\{\eta_{\{j\},(\cdot)}, [t_*, \theta_m), \nu_{\{j\},(\cdot)}\}_\Pi \tag{1.6}$$

второго игрока, исходящее из точки (t_*, x_*), если каждое движение $x(t,\omega,t_*,$ $x_*,\eta_{\{j\},(\cdot)})$ из этого пучка порождено кусочно-стохастическим управлением

$\eta_{\{j\},(\cdot)}$ из (1.6). Отметим, что необходимо

$$
\begin{aligned}
&\eta_{k,(\cdot)} \in \left\{\eta_{k,(\cdot)},\ [t_*,\theta_k),\ \nu_{k,(\cdot)},\ \omega\in\Omega_k\right\},\\
&\eta_{k+1,(\cdot)} \in \left\{\eta_{k+1,(\cdot)},\ [\theta_k,\theta_{k+1}),\ \nu_{k+1,(\cdot)},\ \omega\in\Omega_{k+1}\right\},\\
&.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\
&\eta_{m,(\cdot)} \in \left\{\eta_{m,(\cdot)},\ [\theta_{m-1},\theta_m),\ \nu_{m,(\cdot)},\ \omega\in\Omega_m\right\}.
\end{aligned}
$$

Аналогично определяется стохастическое программное движение $\{x(t,\omega, t_*, x_*, \eta_{\{j\},(\cdot)})\}$, порожденное кусочной стохастической программой $\{\eta_{\{j\},(\cdot)}\}_{\Pi}$.

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРОГРАММНЫЕ ЗАДАЧИ

Задача 2.1. Предположим, что имеет место (1.4), а также при заданных моментах времени $t_0=\theta_0\le\theta_1\le\cdots\le\theta_m=\theta$ имеем начальную позицию (t_*,x_*), $t_*\in[\theta_{k-1},\theta_k)$ и стохастическую программу (1.6). Внутри этой стохастической программы требуется найти оптимальное стохастическое минимизирующее управление $\eta^0_{\{j\},(t,\omega)}$, $t\in[t_*,\theta_m)$, $\omega\in\Omega_j$, которое удовлетворяет условию

$$
\rho\Big(\big(\theta_j,x_j,p^0_j\big)_{j=1,\dots,k-1};\big(\theta_j,x(\theta_j,\omega,t_*,x_*,\eta^0_{\{j\},(\cdot)}),p^0_j\big)_{j=k,\dots,m}\Big)=
$$

$$
=\min_{\eta_{\{j\},(\cdot)}\in\{\eta_{\{j\},(\cdot)}\}_\Pi}\rho\Big(\big(\theta_j,x_j,p^0_j\big)_{j=1,\dots,k-1};\big(\theta_j,x(\theta_j,\omega,t_*,x_*,\eta_{\{j\},(\cdot)}),p^0_j\big)_{j=k,\dots,m}\Big), \tag{2.1}
$$

где

$$
\rho\big((\theta_j,x_j,p^0_j)_{j=1,\dots,m}\big)=\min_{p_j\in M_j(\theta_j)}\left[\chi\big((\theta_j,x_j,p_j)_{j=1,\dots,m}\big):p_j\in M_j(\theta_j)_{j=1,\dots,m}\right].
$$

Аргументы x_j, $j=1,\dots,k-1$ в (2.1) являются фиксированными, если $t_*\in[\theta_{k-1},\theta_k)$. Предположим, что функция

$$
\chi:[t_0,\infty)\times\mathbb{R}^n\times\cdots\times[t_0,\infty)\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longmapsto\mathbb{R}^1
$$

непрерывна и имеет непрерывные частные производные по всем аргументам в области $\chi((t_j,x_j,p_j)_{j=1,\dots,m})>C$.

Решение Задачи 2.1 всегда существует, т.к. функции χ непрерывны, а их аргументами являются непрерывные функционалы, определенные на множестве непрерывных движений. Множество всех движений, управляемых по программе (1.6), компактно в метрике $\mathbf{C}_{[t_*,\theta_m]}$.

Задача 2.2. Даны начальная позиция (t_*, x_*), моменты времени $t_0 = \theta_0 \le \theta_1 \le \dots \le \theta_m$, компактные множества M_k, (1.4) и $t_* \in [\theta_{k-1}, \theta_k)$, $k \in I$. Требуется найти максиминное стохастическое программное управление $\eta^{00}_{\{j\},(\cdot)}$, $t \in [t_*, \theta_m)$, удовлетворяющее условию максимина

$$\rho\Big((\theta_j, x_j, p^0_j)_{j=1,\dots,k-1}; \big(\theta_j, x(\theta_j, \omega, t_*, x_*, \eta^{00}_{\{j\},(\cdot)}), p^0_j\big)_{j=k,\dots,m}\Big) =$$

$$= \max_{\{\eta_{\{j\},(\cdot)}, \nu_{\{j\},(\cdot)}\}_\Pi} \ \min_{\eta_{\{j\},(\cdot)} \in \{\eta_{\{j\},(\cdot)}, \nu_{\{j\},(\cdot)}\}_\Pi} \rho\Big((\theta_j, x_j, p^0_j)_{j=1,\dots,k-1};$$

$$\big(\theta_j, x(\theta_j, \omega, t_*, x_*, \eta_{\{j\},(\cdot)}), p^0_j\big)_{j=k,\dots,m}\Big) = \mathcal{E}^{(0)}(t_*, x_*, \omega, x_1, \dots, x_{k-1}, \{\theta_j\}). \tag{2.2}$$

Для доказательства существования решения Задачи 2.2 достаточно показать, что максимум в (2.2) достигается. Каждое из областей достижимости

$$G_k = \{x = x(\theta_k, \omega, t_*, x_*, \eta_{\{j\},(\cdot)}) : \eta_{\{j\},(\cdot)} \in \{\eta_{\{j\},(\cdot)}, [t_*, \theta_m), \nu_{\{j\},(\cdot)}\}\}$$

замкнуто в $\mathbb{R}^n$ и непрерывно зависит (по метрике Хаусдорфа) от $\nu_{\{j\},(\cdot)}$ второго игрока [1], стр. 131 – 132. Функционал

$$\min\Big[\min\Big(\chi((\theta_1, x_1, p_1), \dots, (\theta_m, x_m, p_m) : p_j \in M_j(\theta_j),\ j = 1, \dots, m\Big) :$$

$$x_i \in G_i,\ i = k, \dots, m\Big] \tag{2.3}$$

зависит от G_k непрерывно, т.к. множества $M_1, \dots, M_m$ замкнуты. Следовательно, функционал (2.3) зависит от программных управлений $\nu_{\{j\},(\cdot)}$ второго игрока. Из компактности программных управлений $\nu_{\{j\},(\cdot)}$ второго игрока вытекает, что максимум в (2.2) достигается.

§3. ПРИНЦИП МИНИМУМА

Ниже, в предложении, обозначим

$$\overline{S}'_l(t) = \sum_{j=l}^{m} \left[\frac{\partial \chi}{\partial x_j}\right]'_{[(\theta_i, x_i, P^0_i)_{i=1,\dots,k-1}; (\theta_i, x^0(\theta_i), P^0_i)_{i=k,\dots,m}]} S_j(\theta_j, \theta_{j-1}) \times \dots \times S_l(\theta_l, t),$$

где $S_i(t, \tau)$ – фундаментальная матрица линейного дифференциального уравнения

$$\dot{S}_i(\tau) = -L'_i(\tau) S_i(\tau), \quad S_i(t, t) = E. \tag{3.1}$$

Матрица $L_i(\tau)$ определяется уравнением

$$L_i(\tau) = \int_{P_i}\int_{Q_i} \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right]'_{x^0(\tau,\omega)} \eta^0_{i,(\cdot)}(du_i, dv_i | (t, \omega)), \tag{3.2}$$

а векторы $p^0_i \in M_i(\theta_i)$, $i = 1, \dots, m$ являются точками минимума в (2.1).

Предложение. При условии

$$\min_{\eta_{\{j\},(\cdot)}\in\{\eta_{\{j\},(\cdot)}\}_\Pi} \rho\Big((\theta_j, x_j, P_j^0)_{j=1,\dots,k-1};\; (\theta_j, x(\theta_j, \omega, t_*, x_*, \eta_{\{j\},(\cdot)}), P_j^0)_{j=k,\dots,m}\Big) > C, \tag{3.3}$$

оптимальное стохастическое управление

$$\eta^0_{\{j\},(t,\omega)}, \quad t\in[t_*,\theta_m), \quad t_*\in[\theta_{k-1},\theta_k), \quad \omega\in\Omega_k,$$

разрешающее Задачу 2.1, и соответствующее стохастическое программное движение $x^0(t,\omega)$ удовлетворяет равенству

$$\int_{P_l}\int_{Q_l} \overline{S}_l'(t) f_l(t, x^0(t,\omega), u_l, v_l)\eta^0_{l,(t,\omega)}(du_l, dv_l|(t,\omega)) = \\ = \int_{Q_l} \min_{u_l\in P_l} \overline{S}_l'(t) f_l(t, x^0(t,\omega), u_l, v_l)\nu_{l,(t,\omega)}(du_l|(t,\omega)) \tag{3.4}$$

при почти всех

$$\nu_l(dv_l) = \int_{P_l} \eta^0_{l,(\cdot)}(du_l, dv_l|(t,\omega)), \quad t\in[t_*,\theta_m)\cap[\theta_{l-1},\theta_l), \quad \omega\in\Omega_l, \quad l\ge k.$$

Доказательство : аналогично доказательству Леммы 36.1 в [1].

§4. ПРАВИЛО МАКСИМИНА

Стохастическая кусочная элементарная программа (1.6) второго игрока регулярна для начальной позиции (t_*, x_*) и набора $(x_1, \dots, x_{k-1})$, если

1) при выборе стохастической программы (1.6) при всех этапах $t\in[\max\{t_*,\theta_{j-1}\},\theta_j)$, $j=k,\dots,m$, $t_*\in[\theta_{k-1},\theta_k)$ и начальной позиции (t_*, x_*), Задача 2.2 имеет единственное по существу решение $\eta^0_{\{j\},(\cdot)}$;

2) набор векторов $p_i^0\in M_i(\theta_i)$, $i=1,\dots,m$, минимизирующий (2.1) при $\eta_{\{j\},(\cdot)} = \eta^0_{\{j\},(\cdot)}$, единственен на каждом этапе.

Лемма 4.1. Пусть оптимальная максимизирующая стохастическая программа $\left\{\eta^0_{\{j\},(\cdot)}, [t_*,\theta_m), \nu^0_{\{j\},(\cdot)}\right\}_\Pi$ из Задачи 2.2 регулярна для данной позиции (t_*, x_*) и набора $(x_1,\dots,x_{k-1})$. Предположим, что $\eta^{00}_{\{j\},(\cdot)}$ и $x^{00}(t,\omega)$ суть оптимальное кусочное стохастическое управление и порожденное им оптимальное стохастическое движение, разрешающее Задачу 2.2. Тогда при почти всех $t\in[t_*,\theta_m)\cap[\theta_{l-1},\theta_l)$ выполняется следующее условие максимина :

$$\int_{P_l}\int_{Q_l} \overline{S}_l'(t) f_l(t, x^{00}(t,\omega), u_l, v_l)\eta^{00}_{l,(t,\omega)}(du_l, dv_l|(t,\omega)) = \\ = \max_{v_l\in Q_l}\min_{u_l\in P_l} \overline{S}_l'(t) f_l(t, x^{00}(t,\omega), u_l, v_l), \quad l\ge k, \tag{4.1}$$

где $\overline{S}'_l(t) =$

$$= \sum_{j=l}^{m} \left[\frac{\partial \chi}{\partial x_j}\right]'_{[(\theta_i, x_i, P_i^{00})_{i=1,\dots,k-1}; (\theta_i, x^{00}(\theta_i), P_i^{00})_{i=k,\dots,m}]} S_j(\theta_j, \theta_{j-1}) \times \cdots \times S_l(\theta_l, t_*).$$

Здесь $S_i(t, \tau)$ – фундаментальная матрица линейного дифференциального уравнения (3.1) с

$$L_i(\tau) = \int_{P_i} \int_{Q_i} \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right]'_{x^{00}(\tau, \omega)} \eta^{00}_{i,(\cdot)}(du_i, dv_i | (t, \omega)), \tag{4.2}$$

а векторы $p_i^{00} \in M_i(\theta_i)$, $i = 1, ..., m$ – точки максимума в (2.2).

Доказательство : аналогично доказательству Леммы 37.1 в [1].

Наряду с движением системы (1.1), рассмотрим движение поводыря $w_k(t)$. Динамика поводыря определяется следующим уравнением :

$$\dot{w}_k = f_k(t, w_k, u_k, v_k). \tag{4.3}$$

Построим функцию Ляпунова и определим управляющее воздействие второго игрока, обеспечивающее соответствующие уклонения. Предположим, что для любой позиции (t_*, x_*) в задаче программного максимина для детерминированной системы (4.3), существуют регулярные случаи с гипотетическими рассогласованиями $\mathcal{E}^0(t_*, w_*, \theta_k, M_k(\theta_k))$ (см. [1], стр. 149) для всех множеств M_k ($t_* \in [\theta_{k-1}, \theta_k)$) на k-ом этапе. Предположим, что для всех $t, \tau \in [\theta_{k-1}, \theta_k)$, $w_k, l_k \in \mathbb{R}^n$ существует $v_k(u_k) \in Q_k$ такое, что

$$l'_k L_k(\tau, t) f_k(t, w_k, u_k, v_k) \geq \min_{u_k \in P_k} \max_{v_k \in Q_k} l'_k L_k(\tau, t) f_k(t, w_k, u_k, v_k). \tag{4.4}$$

Построим следующие функции Ляпунова [3] с параметром μ :

$$\lambda_k(t, w_k, t_k, ..., t_{m-1}) = \int_t^{\theta_k - \mu} \frac{d\tau_k}{\mathcal{E}^{(0)}_{k,k}(t, w_k, \tau_k)} + \sum_{j=k+1}^{m} \int_t^{t_j} \frac{d\tau_j}{\mathcal{E}^{(0)}_{k,j}(t, w_k, t_k, ..., t_{j-1}, \tau_j)} \tag{4.5}$$

если $t \in [t_{k-1}, \theta_k - \mu]$

$$\lambda'_k(t, w_k, t_k, ..., t_{m-1}) = \sum_{j=k+1}^{m} \int_t^{t_j} \frac{d\tau_j}{\mathcal{E}^{(0)}_{k,j}(t, w_k, t_k, ..., t_{j-1}, \tau_j)}, \tag{4.6}$$

если $t \in [\theta_k - \mu, t_k]$, $\theta_m = t_m$, $k \in I$, где $\mathcal{E}^{(0)}_{k,j}$ определяется выражением (2.2). Области определения функций λ_k и λ'_k следующие :

$$G_k = \min_{\tau_j} \mathcal{E}^{(0)}_{k,j}(t, w_k, t_k, ..., t_{j-1}, \tau_j) > 0, \quad t \in [t_{k-1}, \theta_k - \mu], \quad j = k, ..., m, \tag{4.7}$$

$$G'_k = \min_{\tau_j} \mathcal{E}^{(0)}_{k,j}(t, w_k, t_k, ..., t_{j-1}, \tau_j) > 0, \quad t \in [\theta_k - \mu, t_k], \quad j = k+1, ..., m. \tag{4.8}$$

Функции λ_k и λ'_k бесконечны на границах этих открытых областей. Таким образом, если стратегия второго игрока допускает ограниченность функций λ_k и λ'_k, то будет обеспечено уклонение позиции $(t, w_k[\cdot])$ от соответствующих множеств до моментов $\theta_k - \mu$ включительно.

Определим стратегию второго игрока из следующих условий :

$$\int_{Q_k} \min_{u_k \in P_k} \left[\int_t^{\theta_k - \mu} \frac{d\tau_k}{[\mathcal{E}^{(0)}_{k,k}(t, w_k, \tau_k)]^2} l_k^{(0)'} L_k(\tau_k, t) f_k(t, w_k, u_k, v_k) \nu^{(0)}_{k,(\cdot)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=k+1}^{m} \int_t^{\theta_j - \mu} \frac{d\tau_j}{[\mathcal{E}^{(0)}_{k,j}(t, w_k, t_k, ..., t_{j-1}, \tau_j)]^2} l_j^{(0)'} L_j(\tau_j, t) f_j(t, w_j, u_j, v_j) \nu^{(0)}_{j,(\cdot)} \right] (dv_j) =$$

$$= \max_{v_k \in Q_k} \min_{u_k \in P_k} \left[\int_t^{\theta_k - \mu} \frac{d\tau_k}{[\mathcal{E}^{(0)}_{k,k}(t, w_k, \tau_k)]^2} l_k^{(0)'} L_k(\tau_k, t) f_k(t, w_k, u_k, v_k) + \right. \tag{4.9}$$

$$\left. + \sum_{j=k+1}^{m} \int_t^{\theta_j - \mu} \frac{d\tau_j}{[\mathcal{E}^{(0)}_{k,j}(t, w_j, t_k, ..., t_{j-1}, \tau_j)]^2} l_j^{(0)'} L_j(\tau_j, t) f_j(t, w_j, u_j, v_j) \right],$$

если $t \in [t_{k-1}, \theta_k - \mu]$, и

$$\int_{Q_k} \min_{u_k \in P_k} \sum_{j=k+1}^{m} \int_t^{\theta_j - \mu} \frac{d\tau_j}{[\mathcal{E}^{(0)}_{k,j}(t, w_j, \tau_j)]^2} l_j^{(0)'} L_j(\tau_j, t) f_j(t, w_j, u_j, v_j) \nu^{(0)}_{j,(\cdot)}(dv_j) =$$

$$= \max_{v_k \in Q_k} \min_{u_k \in P_k} \sum_{j=k+1}^{m} \int_t^{\theta_j - \mu} \frac{d\tau_j}{[\mathcal{E}^{(0)}_{k,j}(t, w_j, t_k, ..., t_{j-1}, \tau_j)]^2} l_j^{(0)'} L_j(\tau_j, t) f_j(t, w_j, u_j, v_j), \tag{4.10}$$

если $t \in [\theta_k - \mu, t_k]$, а при $(t, w_k) \notin G_k$ полагаем $\{\nu^{(0)}_{k,(\cdot)}(dv_k)\} = Q_k$. В [3] доказано, что при выполнении условий (4.4) и регулярности, кусочные программные стохастические управления второго игрока, определяемые из (4.9) с соответствующими переключениями, обеспечат уклонения всех движений $w_k[t, t_0, t_1^*, ..., t_{m-1}^*, w_0]$ от попадания на множества M_k до моментов времени $\theta_k^* - \mu$, $k = 1, ..., m$, если только $(t_0, w_0 \in G_1)$.

Так как целью второго игрока является получение гарантированного уклонения от целевых множеств $M_1, ..., M_m$ при самом строгом сопротивлении первого игрока, то второй игрок прицеливает движение на поводырь. Следовательно, пучок функций, описывающих поводырь, будет решением нестохастического уравнения

$$\dot{w}_k = f_k(t, w_k, u_k[t], \widetilde{v}_k), \quad w_0 = w(t_0),$$

где $u_k[t]$ – любое допустимое управление, а $\widetilde{v}_k \in Q_k$ определяется из (4.9).

§5. ОЦЕНКА

Конкретная динамика игры удовлетворяет уравнению

$$\dot{x}_k[t] = f_k(t, x_k, u_k, v_k^*). \tag{5.1}$$

Пусть $x_k^* = x_k[t_*]$ – истинное положение системы и пусть поводырь $w_k(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{w}_k(t) = f_k(t, w_k, u_k^*, \widetilde{v}_k), \quad \widetilde{v}_k \in Q_k, \tag{5.2}$$

где $w_k^* = w_k(t_*)$ является самым близким положением поводыря к x_k^*. Точки $u_k^* \in P_k$ и $v_k^* \in Q_k$ определяются из условий

$$\max_{v_k \in Q_k} (w_k^* - x_k^*)' f_k(t_*, x_k^*, u_k^*, v_k) = \min_{u_k \in P_k} \max_{v_k \in Q_k} (w_k^* - x_k^*)' f_k(t_*, x_k^*, u_k, v_k), \tag{5.3}$$

$$\min_{u_k \in P_k} (w_k - \widehat{x}_k^*)' f_k(t_*, \widehat{x}_k^*, u_k, v_k^*) = \max_{v_k \in Q_k} \min_{u_k \in P_k} (w_k - \widehat{x}_k^*)' f_k(t_*, \widehat{x}_k^*, u_k, v_k). \tag{5.4}$$

Точка u_k, выбираемая первым игроком, предполагается допустимой, а точка $\widetilde{v}_k \in Q_k$ – одна из допустимых управлений второго игрока, определяемая из (4.9) (см. [1], стр. 59). Предположим, что первый игрок может измерить положение системы и точно определить свое управляющее воздействие из условия (5.3). Второй игрок может определить положение системы с точностью $\widehat{x}_k - x_k^*$. Рассмотрим интервал времени $[t_0, \theta_1)$ и обозначим

$$\rho(t) = \|w_1(t) - \widehat{x}_1[t]\|, \quad t \in [t_0, \theta_1), \tag{5.5}$$

где $\|\cdot\|$ – евклидова норма. В момент времени $t = t_0$ имеем $\rho(t_0) = \|w_1^0 - \widehat{x}_1^0\|$. Следовательно,

$$\frac{d\rho^2(t)}{dt} = 2\left(\widehat{x}_1[t] - w_1(t)\right)' \left(f_1^{(1)}[t] - f_1^{(2)}(t)\right), \tag{5.6}$$

где

$$f_1^{(1)}[t] = \dot{\widehat{x}}_1[t] = f_1(t, \widehat{x}_1[t], u_1, v_1^*), \quad f_1^{(2)}(t) = \dot{w}_1(t) = f_1(t, w_1(t), u_1^*, \widetilde{v}_1).$$

В некоторой ограниченной области, содержащей движения, справедливы следующие оценки :

$$\left\|f_1^{(1)}[t]\right\| \le \psi_1, \quad \left\|f_1^{(2)}(t)\right\| \le \psi_1,$$

$$\left\|\widehat{x}_1[t] - \widehat{x}_1^0\right\| \le \psi_1(t - t_0), \quad \left\|w_1(t) - w_1^0\right\| \le \psi_1(t - t_0),$$

где ψ_1 – некоторое достаточно большое число. Тогда, из (5.6) получаем

$$\frac{d\rho^2(t)}{dt} \le 2\left(w_1^0 - \widehat{x}_1^0\right)'\left[f_1^{(1)}[t] - f_1^{(2)}(t)\right] + 8\psi_1^2(t - t_0). \qquad (5.7)$$

Оценим $(w_1^0 - \widehat{x}_1^0)'\left[f_1^{(1)}[t] - f_1^{(2)}(t)\right]$. Имеем

$$f_1^{(2)}(t) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^{(i)} f_1(t, w_1(t), u_{1,i}^*, \widetilde{v}_1), \quad u_{1,i}^* \in P_1, \quad \alpha_i^{(i)} \ge 0, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^{(i)} = 1. \quad (5.8)$$

Учитывая, что $f_1(t, x, u, v)$ непрерывна по t и липшицева по x, выражение (5.8) можно представить в виде

$$f_1^{(2)}(t) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^{(i)} f_1(t_0, \widehat{x}_1^0, u_{1,i}^*, \widetilde{v}_1) + \Delta f_1^{(2)}(t),$$

$$\left\|\Delta f_1^{(2)}(t)\right\| \le \varphi_1^0(t - t_0) + \lambda_1 \left\|w_1^0 - \widehat{x}_1^0\right\|.$$

Здесь λ_1 – постоянная Липшица по x_1 функции f_1 в заданной области, φ_1^0 – непрерывная функция, удовлетворяющая условию $\lim_{\delta\to 0} \varphi_1^0(\delta) = 0$. Поскольку $f_1^{(1)}[t]$ также можно представить в виде

$$f_1^{(1)}[t] = f_1(t_0, \widehat{x}_1^0, u_1, v_1^*) + \Delta f_1^{(1)}[t],$$

$$\left\|\Delta f_1^{(1)}[t]\right\| \le \varphi_1^0(t - t_0) + \left\|\widehat{x}_1^0 - x_1^0\right\|,$$

получаем следующую оценку :

$$\begin{aligned}&(w_1^0 - \widehat{x}_1^0)'\left[f_1^{(1)}[t] - f_1^{(2)}(t)\right] \le (w_1^0 - \widehat{x}_1^0)'\left[f_1(t_0, \widehat{x}_1^0, u_1, v_1^*) - \right.\\ &\left.\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^{(i)} f_1(t_0, \widehat{x}_1^0, u_{1,i}^*, \widetilde{v}_1)\right] + 2\left\|w_1^0 - \widehat{x}_1^0\right\| \varphi_1^0(t - t_0) + \lambda_1 \left\|w_1^0 - \widehat{x}_1^0\right\| + \left\|\widehat{x}_1^0 - x_1^0\right\|.\end{aligned} \qquad (5.9)$$

Заметим, что по определению векторов u_1^* (5.3) и v_1^* (5.4) и в силу предполагаемого нами условия седловой точки, имеем

$$(w_1^0 - \widehat{x}_1^0)' f_1(t_0, \widehat{x}_1^0, u_1, v_1^*) \le (w_1^0 - \widehat{x}_1^0)' f_1(t_0, \widehat{x}_1^0, u_{1,i}^*, \widetilde{v}_1), \quad i = 1, \ldots, n+1.$$

Умножая эти неравенства на неотрицательные числа $\alpha_i^{(i)}$ и суммируя по i, получим

$$(w_1^0 - \widehat{x}_1^0)'\left[f_1(t_0, \widehat{x}_1^0, u_1, v_1^*) - \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^{(i)} f_1(t_0, \widehat{x}_1^0, u_{1,i}^*, v_1^*)\right] \le 0. \qquad (5.10)$$

Таким образом, из (5.7), (5.9) и (5.10) получим

$$\frac{d\rho^2(t)}{dt} \le \|\widehat{x}_1^0 - x_1^0\| + 2\lambda_1\rho^2(t) + \overline{\varphi}_1(t-t_0), \tag{5.11}$$

где $\overline{\varphi}_1(t-t_0) = 4\rho(t_0)\varphi_1^0(t-t_0) + 8(t-t_0)\chi^2$.

Проинтегрировав (5.11), получим

$$\rho^2(t) \le \rho^2(t_0)e^{2\lambda_1(t-t_0)} + e^{2\lambda_1}\int_{t_0}^{t} e^{-2\lambda_1\tau}\left[\|\widehat{x}_1^0 - x_1^0\| + \overline{\varphi}_1(\tau-t_0)\right]\,d\tau.$$

Обозначив

$$\varphi_1(t-t_0) = \max_{\tau\in[t_0,t]} \overline{\varphi}_1(\tau-t_0),$$

получим

$$\rho^2(t) \le \rho^2(t_0)e^{2\lambda_1(t-t_0)} + e^{2\lambda_1 t}\varphi_1(t-t_0)\frac{1}{2\lambda_1}(e^{-2\lambda_1 t_0} - e^{-2\lambda_1 t}) +$$
$$+ e^{2\lambda_1 t}\|\widehat{x}_1^0 - x_1^0\|(e^{-2\lambda_1 t_0} - e^{-2\lambda_1 t}) \le$$
$$\le \rho^2(t_0)e^{2\lambda_1(t-t_0)} + \frac{\varphi_1(t-t_0)}{2\lambda_1}(e^{2\lambda_1(t-t_0)} - 1) + \frac{\|\widehat{x}_1^0 - x_1^0\|}{2\lambda_1}(e^{2\lambda_1(t-t_0)} - 1).$$

Следовательно, для интервала времени $[t_0, \theta_1)$

$$\rho^2(\theta_1) \le \rho^2(t_0)\exp\left(2\lambda_1\sum_{i=1}^{k+1}\delta_i^{(1)}\right) + \frac{1}{2\lambda_1}\left[\varphi(\delta_1^{(1)}) + \mathcal{E}_1^{(1)}\right]\left[\exp\left(2\lambda_1\sum_{i=1}^{k+1}\delta_i^{(1)}\right) -\right.$$
$$\left. - \exp\left(2\lambda_1\sum_{i=2}^{k+1}\delta_i^{(1)}\right)\right] + \frac{1}{2\lambda_1}\sum_{j=2}^{k+1}\left[\varphi(\delta_j^{(1)}) + \mathcal{E}_j^{(1)}\right]\left[\exp\left(2\lambda_1\sum_{i=j}^{k+1}\delta_i^{(1)}\right) - 1\right],$$

где $\mathcal{E}_j^{(1)} > 0$ – расстояние между истинным положением системы и положением, измеренным с ошибкой, и

$$\delta_i^{(1)} = \tau_i^{(1)} - \tau_{i-1}^{(1)}, \qquad \left\|\widehat{x}\left(t_0 + \sum_{i=1}^{j-1}\delta_i^{(1)}\right) - x\left(t_0 + \sum_{i=1}^{j-1}\delta_i^{(1)}\right)\right\| \le \mathcal{E}_j^{(1)}.$$

Те же рассуждения для интервала времени $[\theta_1, \theta_2)$ дают

$$\rho^2(\theta_2) \le \rho^2(t_0)\exp\left(2\lambda_1\sum_{i=1}^{i_1}\delta_i^{(1)} + 2\lambda_2\sum_{i=i_1+1}^{i_2}\delta_i^{(2)}\right) +$$
$$+ \frac{1}{2\lambda_1}\left[\varphi(\delta_1^{(1)}) + \mathcal{E}_1^{(1)}\right]\left[\exp\left(2\lambda_1\sum_{i=1}^{i_1}\delta_i^{(1)} + 2\lambda_2\sum_{i=i_1+1}^{i_2}\delta_i^{(2)}\right) -\right.$$
$$\left. - \exp\left(2\lambda_2\sum_{i=i_1+1}^{i_2}\delta_i^{(2)}\right)\right] + \frac{1}{2\lambda_2}\left[\varphi(\delta_2^{(2)}) + \mathcal{E}_2^{(2)}\right]\left[\exp\left(2\lambda_2\sum_{i=i_1+1}^{i_2}\delta_i^{(2)}\right) -\right.$$
$$\left. - \exp\left(2\lambda_2\sum_{i=i_1+2}^{i_2}\delta_i^{(2)}\right)\right] + \frac{1}{2\lambda_2}\sum_{j=i_1+2}^{i_2}\left[\varphi(\delta_j^{(2)}) + \mathcal{E}_j^{(2)}\right]\left[\exp\left(2\lambda_2\sum_{i=j}^{i_2}\delta_i^{(2)}\right) - 1\right],$$

где

$$\delta_i^{(2)} = \tau_i^{(2)} - \tau_{i-1}^{(2)}, \quad \left\| \hat{x}\left(t_0 + \sum_{i=i_1+1}^{i_2} \delta_i^{(2)}\right) - x\left(t_0 + \sum_{i=i_1+1}^{i_2} \delta_i^{(2)}\right) \right\| \le \mathcal{E}_j^{(2)}.$$

Продолжая эту итерацию, приходим к следующей оценке для интервала времени $[\theta_{k-1}, \theta_k)$:

$$\rho^2(\theta_k) \le \rho^2(t_0)\exp\left(\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} 2\lambda_k\delta_i^{(k)}\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k}\frac{1}{2\lambda_k}\left[\varphi(\delta_k^{(k)}) + \mathcal{E}_k^{(k)}\right]\left[\exp\left(\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} 2\lambda_k\delta_i^{(k)}\right) -\right.$$

$$\left.-\exp\left(\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=i_{k-1}+2}^{i_k} 2\lambda_k\delta_i^{(k)}\right)\right] + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=i_{k-1}+2}^{i_k}\frac{1}{2\lambda_k}\left[\varphi(\delta_j^{(k)}) + \mathcal{E}_j^{(k)}\right]\times \tag{5.12}$$

$$\times\left[\exp\left(\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=j}^{i_k} 2\lambda_k\delta_i^{(k)}\right) - 1\right],$$

где $\mathcal{E}_j^{(k)}$ – расстояние между истинным положением системы и положением, измеренным с ошибкой, и

$$\delta_i^{(k)} = \tau_i^{(k)} - \tau_{i-1}^{(k)}, \quad \left\| \hat{x}\left(t_0 + \sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} \delta_i^{(k)}\right) - x\left(t_0 + \sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} \delta_i^{(k)}\right) \right\| \le \mathcal{E}_j^{(k)}.$$

Оценка (5.12) позволяет оценить математические ожидания и дисперсии и т.д., для отклонения системы от поводыря, следовательно, и от соответствующих целевых множеств.

ABSTRACT. A differential game for pointwise changing non-linear system with m target sets is considered basing upon stochastic programmable strategies. The second player constructs his strategy watching the guide under maximal resistance of the first player. Both minimum and maximin rules are formulated and proved. An estimate of the deviation of the stochastic programmable bunch of the system from the guide is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, Позиционные Дифференциальные Игры, Наука, Москва, 1974.
2. Н. Н. Красовский, Управление Динамической Системой, Наука, Москва, 1985.
3. М. С. Габриелян, "Дифференциальные игры при m целевых множествах", Докторская диссертация, ЕГУ, 1986.

13 октября 1997

Ереванский государственный университет