Посвящается памяти родителей,
Александра и Аршалуйс Мирзоян

КОНУСЫ НАД ЭЙНШТЕЙНОВЫМИ ПРОСТРАНСТВАМИ

В. А. Мирзоян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 33, № 5, 1998

В статье рассматриваются конусы с многомерными образующими над римановыми пространствами. Оказывается, что любой из таких конусов над эйнштейновым пространством является либо риччи-плоским, либо полуэйнштейновым пространством.

§1. ВВЕДЕНИЕ : ПОЛУЭЙНШТЕЙНОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Римановые Ric-полупараллельные пространства [1] — [15], характеризуемые условием $R(X,Y) \cdot R_1 = 0$, где R_1 – тензор Риччи, $R(X,Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$ – операторы кривизны. Они расширяют симметрические пространства и охватывают эйнштейновы и полусимметрические пространства. В 1991 году автором было анонсировано [16] и в 1992 году опубликовано [17] доказательство следующей классификационной теоремы.

Теорема. **Риманово пространство М класса C^∞ удовлетворяет условию $R(X,Y) \cdot R_1 = 0$ тогда и только тогда, когда оно является либо двумерным, либо эйнштейновым, либо полуэйнштейновым, либо локальным произведением таких пространств.**

Эйнштейновы пространства характеризуются условием $R_1 = \lambda I$, где λ – постоянная и I – тождественное преобразование (см. [18] и [19]). Если

$R_1 = 0$, то риманово пространство называется риччи-плоским. Полуэйнштейновы пространства, как и класс римановых пространств, удовлетворяющих условию $R(X,Y)\cdot R_1 = 0$, впервые были введены в [16], [17]. Напомним их определение.

Пусть M – риманово пространство. Подпространство $T_x^{(0)}$ касательного пространства $T_x(\mathrm{M})$ в точке $x \in \mathrm{M}$, определенное равенством

$$T_x^{(0)} = \{X \in T_x(\mathrm{M})\colon R(X,Y) = 0 \quad \text{для любого} \quad Y \in T_x(\mathrm{M})\},$$

называется пространством дефектности в точке x, а его размерность $\mu_x = \dim T_x^{(0)}$ называется индексом дефектности в точке x.

Пространство $T_x^{(0)}$ было изучено С. Чженом и Н. Кюйпером [20]. В частности, они доказали, что распределение $T^{(0)}$ (распределение дефектности) инволютивно и вполне геодезично. Подпространство $T_x^{(0)}$ всегда содержится в подпространстве собственных векторов тензора R_1, отвечающих нулевому собственному значению. Ортогональное дополнение $T_x^{(1)}$ пространства $T_x^{(0)}$ в $T_x(\mathrm{M})$ инвариантно относительно всех операторов кривизны $R(X,Y)$ и тензора Риччи R_1 (см. [17]).

Таким образом, в каждой точке $x \in \mathrm{M}$ тензор Риччи R_1 имеет два инвариантных подпространства $T_x^{(0)}$, $T_x^{(1)}$ и $T_x(\mathrm{M}) = T_x^{(0)} + T_x^{(1)}$.

Риманово пространство M с ненулевым индексом дефектности в каждой точке x называется полуэйнштейновым, если его тензор Риччи R_1 на каждом инвариантном подпространстве $T_x^{(1)}$ имеет только одно ненулевое собственное значение [17].

Теоремы, доказанные в настоящей работе, дают класс примеров неприводимых полуэйнштейновых пространств, имеющих достаточно высокий индекс дефектности.

Автор благодарен доценту А. О. Бабаяну за обсуждение некоторых вопросов, связанных с нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных.

§2. ТЕОРЕМЫ

Начнем с определений конусов и цилиндров над римановыми пространствами. Пусть $\mathbb{R}_+$, $u \in \mathbb{R}_+$ – положительная полуось и пусть $\widetilde{\mathrm{M}}$ – некоторое риманово пространство с метрикой $d\widetilde{s}^2$. Многообразие $M = \mathbb{R}_+ \times \widetilde{M}$, наделенное метрикой $ds^2 = du^2 + u^2 d\widetilde{s}^2$ называется конусом с одномерными образующими над $\widetilde{M}$ (см. [4] или [19]).

Пусть $C_1, ..., C_k$ – ненулевые постоянные, C – произвольная постоянная. Обозначим через $\mathbb{R}^k_+$ полупространство в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$ с декартовыми координатами $u^1, ..., u^k$, определенные неравенством $C_a u^a + C > 0$. Многообразие $M = \mathbb{R}^k_+ \times \widetilde{M}$, наделенное метрикой

$$ds^2 = \sum_{a=1}^{k} (du^a)^2 + (C_a u^a + C)^2 \, d\widetilde{s}^2, \tag{2.1}$$

называется конусом с k-мерными плоскими образующими над $\widetilde{M}$. Его вершиной является гиперплоскость в $\mathbb{R}^k$, определяемая уравнением $C_a u^a + C = 0$. Пусть $\mathbb{R}^k_- \times \widetilde{M}$ – полупространство в $\mathbb{R}^k$, определяемое неравенством $C_a u^a + C < 0$. Многообразие $\mathbb{R}^k_- \times \widetilde{M}$, наделенное метрикой (2.1), является конусом, изометричным конусу $\mathbb{R}^k_+ \times \widetilde{M}$. Поэтому мы будем рассматривать только конусы $\mathbb{R}^k_+ \times \widetilde{M}$.

Многообразие $\mathbb{R}^k \times \widetilde{M}$, наделенное метрикой

$$ds^2 = \sum_{a=1}^{k} (du^a)^2 + C^2 \, d\widetilde{s}^2, \qquad C \neq 0, \tag{2.2}$$

называется цилиндром с k-мерными ($k \geq 1$) плоскими образующими над римановым пространством $\widetilde{M}$. Основные результаты настоящей работы содержатся в следующих теоремах.

Теорема 1. Всякий конус с k-мерными ($k \geq 1$) плоскими образующими над произвольным двумерным римановым пространством непостоянной кривизны является неприводимым полуэйнштейновым пространством индекса дефектности k.

Теорема 2. Пусть $\widetilde{M}$ – эйнштейново пространство размерности $m \geq 2$ с эйнштейновой постоянной λ. Если $\lambda \leq 0$, то всякий конус с k-мерными ($k \geq 1$) плоскими образующими над $\widetilde{M}$ является неприводимым полуэйнштейновым пространством индекса дефектности k. Если $\lambda > 0$, то всякий конус с k-мерными плоскими образующими над $\widetilde{M}$ является либо риччи-плоским пространством,

либо неприводимым полуэйнштейновым пространством индекса дефектности k.

Так как тензор кривизны риманова пространства инвариантен относительно изометрий, то индекс дефектности и тензор Риччи также инвариантны. Тогда свойство полуэйнштейновости инвариантно относительно изометрических отображений. Следовательно, из Теоремы 2 вытекает следующий результат.

Теорема 3. Каждое риманово пространство, изометричное конусу с k-мерными ($k \geq 1$) плоскими образующими над эйнштейновым пространством, является либо риччи-плоским, либо неприводимым полуэйнштейновым пространством индекса дефектности k. Каждое риманово пространство, изометричное произведению конусов над эйнштейновыми пространствами, удовлетворяет условию $R(X,Y) \cdot R_1 = 0$.

В работе [21], конусы с псевдоевклидовыми образующими над римановыми пространствами рассматривались с более общей точки зрения.

§3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РЕЗУЛЬТАТ

В этом параграфе мы докажем лемму, которая лежит в основе доказательства Теорем 1 — 3.

Лемма. Пусть u^1, ..., u^k – декартовы координаты в $\mathbb{R}^k$, а $G(u^1, ..., u^k)$ – положительная функция в некоторой области $U \subset \mathbb{R}^k$, $\widetilde{\mathrm{M}}$ – некоторое риманово пространство с метрикой $d\tilde{s}^2(u^{k+1}, ..., u^n)$. Тогда на многообразии $U \times \widetilde{\mathrm{M}}$, наделенном метрикой

$$ds^2 = g_{ij}\, du^i\, du^j = \sum_{a=1}^{k} (du^a)^2 + G(u^1, ..., u^k)\, d\tilde{s}^2, \tag{3.1}$$

в каждой точке направления $\dfrac{\partial}{\partial u^a}$ принадлежат пространству дефектности тогда и только тогда, когда (3.1) является либо 1) метрикой конуса или цилиндра с k-мерными плоскими образующими над $\widetilde{\mathrm{M}}$, либо 2) метрикой цилиндра с l-мерными ($1 \leq l < k$) плоскими образующими над конусом с $(k-l)$-мерными плоскими образующими над $\widetilde{\mathrm{M}}$.

Отметим, что метрика (3.1) является частным случаем метрики полуприводимого риманова пространства [22] (эквивалентно, скрещенного произведения двух метрик [23]).

Доказательство леммы. Предположим, что многообразие $U \times \widetilde{\mathrm{M}}$ наделено метрикой (3.1), т.е.

$$d\tilde{s}^2 = \tilde{g}_{rs}(u^{k+1}, ..., u^n)\, du^r\, du^s. \tag{3.2}$$

В (3.1), (3.2) и ниже $i, j, l, p = 1, ..., n$; $a, b, c, d = 1, ..., k$; $r, s, t, v, w = k+1, ..., n$, волнистая линия сверху относится к метрике (3.2). Из (3.1) следует, что

$$g_{aa} = 1, \quad g_{ab} = 0\ (a \neq b), \quad g_{ar} = 0, \quad g_{rs} = G\tilde{g}_{rs}.$$

Для контравариантных компонент g^{ij} имеем

$$g^{aa} = 1, \quad g^{ab} = 0\ (a \neq b), \quad g^{ar} = 0, \quad g^{rs} = \frac{1}{G}\tilde{g}^{rs}.$$

Вычисляя символы Кристоффеля, получим

$$\Gamma^a_{bc} = \Gamma^a_{br} = \Gamma^a_{rb} = \Gamma^r_{ab} = 0, \quad \Gamma^a_{rs} = -\frac{G'_a}{2}\tilde{g}_{rs},$$

$$\Gamma^r_{at} = \Gamma^r_{ta} = \frac{G'_a}{2G}\delta^r_t, \quad \Gamma^r_{st} = \tilde{\Gamma}^r_{st}, \quad G'_a = \frac{\partial G}{\partial u^a}.$$

Для компонент тензора кривизны имеем

$$R^a_{bcd} = R^a_{bcr} = R^a_{brc} = R^a_{rbc} = R^a_{rsb} =$$

$$= R^a_{rst} = R^r_{abc} = R^r_{sta} = R^r_{sat} = R^r_{ast} = R^r_{bcs} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} R^a_{brs} &= (G'_a G'_b - 2\,GG''_{ab})\,(4G)^{-1}\,\tilde{g}_{rs}, \\ R^r_{sab} &= (G'_a G'_b - 2\,GG''_{ab})\,4^{-1}\,G^{-2}\,\delta^r_s, \end{aligned}\right. \tag{3.3}$$

$$R^r_{stv} = \tilde{R}^r_{stv} + (4G)^{-1}\sum_a (G'_a)^2\,(\tilde{g}_{sv}\delta^r_t - \tilde{g}_{tv}\delta^r_s), \tag{3.4}$$

где $G''_{ab} = \dfrac{\partial^2 G}{\partial u^a\,\partial u^b}$.

Предположим, что направления $\partial/\partial u^a$ в каждой точке $u = (u^1, ..., u^n)$ принадлежат пространству дефектности $T^{(0)}_u$. Имеем

$$R^a_{ijp} = R^l_{ajp} = R^l_{iap} = R^l_{ija} = 0. \tag{3.5}$$

Отличные от нуля компоненты тензора кривизны могут быть только среди компонент вида R^r_{stv}. Обратно, если условия (3.5) выполняются, то направления $\partial/\partial u^a$ являются направлениями нулевой кривизны, т.е. в каждой точке они принадлежат $T_u^{(0)}$. Из (3.3) следует, что (3.5) выполняются тогда и только тогда, когда функция G удовлетворяет уравнению

$$G''_{ab} = \frac{G'_a G'_b}{2G}. \tag{3.6}$$

Полагая $G = \varphi^2(u^1, ..., u^k)$, в силу (3.6) получим $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial u^a\,\partial u^b} = 0$ для любых значений индексов a, b. Таким образом, φ является линейной функцией, т.е. $\varphi = C_a u^a + C$, где C, C_a – произвольные постоянные и $C^2 + \sum_a C_a^2 \neq 0$. Имеем

$$G = (C_a u^a + C)^2 . \tag{3.7}$$

Следовательно, если все компоненты $C_a \neq 0$, то (3.1) является метрикой конуса с k–мерными плоскими образующими над $\widetilde{\mathrm{M}}$. Если $C_a = 0$ для всех a и $C \neq 0$, то (3.1) является метрикой цилиндра с k–мерными плоскими образующими над $\widetilde{\mathrm{M}}$. Если в (3.7) $C_1 = ... = C_l = 0$ и $C_{l+1} \neq 0, ..., C_k \neq 0$, то (3.1) является метрикой цилиндра над конусом над $\widetilde{\mathrm{M}}$.

§4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 1 И 2

Сначало вычислим компоненты тензора Риччи метрики (3.1), где G определяется равенством (3.7). Так как в этом случае отличные от нуля компоненты тензора кривизны могут быть среди R^r_{stv}, заключаем, что индекс дефектности больше или равен k. Вычисляя компоненты R_{jp} тензора Риччи по формуле $R_{jp} = R^i_{ijp}$ и учитывая (3.4), получим

$$R_{ab} = R_{ar} = 0, \tag{4.1}$$

$$R_{tv} = \widetilde{R}_{tv} + \frac{1-m}{4G} \sum_a (G'_a)^2 \cdot \widetilde{g}_{tv}, \tag{4.2}$$

где $m = n-k$. Так как $(G'_a)^2 = 4\,G\,C_a^2$ и $\sum_a (G'_a)^2 = 4\,G \sum_a C_a^2$, в силу (4.2) и равенства $\widetilde{g}_{tv} = G^{-1}\,g_{tv}$, получим

$$R_{tv} = \widetilde{R}_{tv} + \frac{1-m}{G} \sum_a C_a^2 \cdot g_{tv}. \tag{4.3}$$

Из (4.1) следует, что в каждой точке u в направлениях $\partial/\partial u^a$ тензор Риччи имеет ненулевое собственное значение. Согласно (4.3) в m–мерном ($m = n-k$) направлении, ортогональном к линейной оболочке векторов $(\partial/\partial u^a)_u$, тензор Риччи имеет только одно собственное значение тогда и только тогда, когда $\widetilde{R}_{tv} = \lambda\widetilde{g}_{tv}$. Это только в случае, когда метрика $d\widetilde{s}^2$ в (3.1) является либо метрикой двумерного пространства, либо эйнштейновой метрикой. Таким образом,

$$R_{tv} = \frac{\lambda + (1-m)\sum_a C_a^2}{G} g_{tv}. \tag{4.4}$$

Если числитель в (4.4) отличен от нуля, то в каждой точке пространство дефектности $T_u^{(0)}$ натянуто на векторы $(\partial/\partial u^a)_u$, а его ортогональное дополнение $T_u^{(1)}$ натянуто на векторы $(\partial/\partial u^r)_u$. Однако на $T_u^{(1)}$ тензор Риччи имеет только одно ненулевое собственное значение. Тогда индекс дефектности пространства M равен k и метрика является полуэйнштейновой. В случае, когда числитель в (4.4) равен нулю, получим риччи-плоскую метрику.

Доказательство Теоремы 1 : Пусть $\widetilde{\mathrm{M}}$ – двумерное риманово пространство непостоянной кривизны. Тензор Риччи пространства $\widetilde{\mathrm{M}}$ пропорционален метрике с непостоянным коэффициентом λ. Наделим многообразие $\mathbb{R}_+^k \times \widetilde{\mathrm{M}}$ метрикой (3.1), где G определяется формулой (3.7) и предположим, что $C_a \neq 0$ для любого a. Мы получаем конус с k–мерными плоскими образующими над $\widetilde{\mathrm{M}}$. Так как λ является функцией на $\widetilde{\mathrm{M}}$, то числитель в (4.4) всегда можем считать отличным от нуля. Используя вышеприведенные рассуждения, получим неприводимое полуэйнштейново пространство индекса дефектности k. Теорема 1 доказана.

Доказательство Теоремы 2 : Пусть $\widetilde{\mathrm{M}}$ – эйнштейново пространство размерности $m \geq 2$ с эйнштейновой постоянной λ. Пусть $\lambda \leq 0$, многообразие $\mathbb{R}_+^k \times \widetilde{\mathrm{M}}$ наделим метрикой (3.1), где G определяется формулой (3.7) и, $C_a \neq 0$ для любого a. В этом случае числитель в (4.4) всегда отличен от нуля. Таким образом, всякий конус с k–мерными плоскими образующими над $\widetilde{\mathrm{M}}$ является полуэйнштейновым пространством индекса дефектности k.

Пусть теперь $\lambda > 0$. Многообразие $\mathbb{R}^k_+ \times \widetilde{M}$ снова наделим метрикой (3.1), где G определяется формулой (3.7) и $C_a \neq 0$ для любого a. Если числитель в (4.4) равен нулю, получим риччи-плоский конус над $\widetilde{M}$. В противном случае, полученный конус над $\widetilde{M}$ является неприводимым полуэйнштейновым пространством индекса дефектности k. Это завершает доказательство Теоремы 2.

ABSTRACT. The paper considers cones with multidimensional generators over Riemannian spaces. It turns out that any such cone over an Einstein space is either Ricci–flat or semi–Einstein space.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. С. Синюков, Геодезические Отображения Римановых Пространств, Москва, Наука, 1979.
2. K. Nomizu, "On hypersurfaces satisfying a certain condition on the curvature tensor", Tôhoku Math. J., vol. 20, no. 1, pp. 46 — 59, 1968.
3. H. Takagi, "An example of Riemannian manifolds satisfying $R(X,Y) \cdot R = 0$ but not $\nabla R = 0$", Tôhoku Math. J., vol. 24, no. 1, pp. 105 — 108, 1972.
4. Z. I. Szabo, "Structure theorems on Riemannian spaces satisfying $R(X,Y) \cdot R = 0$. The local version", J. Different. Geom., vol. 17, no. 4, pp. 531 — 582, 1982.
5. Z. I. Szabo, "Structure theorems on Riemannian spaces satisfying $R(X,Y) \cdot R = 0$. Global version", Geom. dedic., vol. 19, no. 1, pp. 65 — 108, 1985.
6. Н. С. Синюков, Е. Н. Синюкова, "О голоморфно-проективных отображениях келеровых пространств", Мат. Зам., том 36, № 3, стр. 417 — 423, 1984.
7. Е. Н. Синюкова, "О геодезических отображениях некоторых специальных римановых пространств", Мат. Зам., том 30, № 6, стр. 889 — 894, 1981.
8. Y. Matsuyama, "Hypersurfaces with $R \cdot S = 0$ in Euclidean space", Bulletin of the Faculty of Science and Engineering CHUO University, vol. 24, pp. 13 — 19, 1981.
9. Y. Mikesh, "Geodesic mapping of special Riemannian spaces", Topology & Different. Geom. Colloq., Debrecen, 26 Aug. — 1 Sept. 1984; vol. II, Amsterdam, pp. 793 — 813, 1988.
10. H. Nakagawa, R. Takagi, "Kähler submanifolds with $R \cdot S = 0$ in a complex projective space", Hokkaido Math. J., vol. 5, no. 1, pp. 67 — 70, 1976.
11. K. Sekigawa, H. Takagi, "On conformally flat spaces satisfying a certain condition on the Ricci tensor", Tôhoku Math. J., vol. 23, no. 1, pp. 1 — 11, 1971.
12. K. Sekigawa, "On some hypersurfaces satisfying $R(X,Y) \cdot R_1 = 0$", Hokkaido Math. J., vol. 1, no. 1, pp. 102 — 109, 1972.
13. K. Sekigawa, "On some 3–dimensional Riemannian manifolds", Hokkaido Math. J., vol. 2, no. 2, pp. 259 — 270, 1973.
14. H. Takagi, Y. Watanabe, "Kählerian manifolds with vanishing Bochner curvature tensor satisfying $R(X,Y) \cdot R_1 = 0$", Hokkaido Math. J., vol. 3,

no. 1, pp. 129 — 132, 1974.
15. S. Tanno, "Hypersurfaces satisfying a certain condition on the Ricci tensor", Tôhoku Math. J., vol. 21, no. 2, pp. 297 — 303, 1969.
16. В. А. Мирзоян, "*Ric*–полусимметрические подмногообразия", Итоги Науки и техники, Проблемы Геометрии, том 23, стр. 29 — 66, 1991.
17. В. А. Мирзоян, "Структурные теоремы для римановых *Ric*–полусимметрических пространств", Изв. вузов, Математика, № 6, стр. 80 — 89, 1992.
18. А. З. Петров, Пространства Эйнштейна, Москва, Физматгиз, 1961.
19. А. Бессе, Многообразия Эйнштейна, Москва, Мир, том 1, № 2, 1990.
20. S. S. Chern, N. Kuiper, "Some theorems on the isometric imbedding of compact Riemannian manifolds in Euclidean space", Ann. Math., vol. 56, no. 3, pp. 422 — 430, 1952.
21. В. А. Мирзоян, "Конусы с многомерными образующими над эйнштейновыми пространствами", ДАН Армении, том 98, № 4, стр. 265 — 268, 1998.
22. Г. И. Кручкович, "Об одном классе римановых пространств", Труды семинара по вект. и тенз. анализу, МГУ, том XI, стр. 103 — 128, 1961.
23. R. Bishop, B. O'Neill, "Manifolds of negative curvature", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 145, pp. 1 — 49, 1969.
24. П. К. Рашевский, Риманова Геометрия и Тензорный Анализ, Москва, Наука, 1967.

5 февраля 1998

Армянский государственный инженерный университет