ЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В КАТЕГОРИИ МОДУЛЕЙ

А. А. Григорьянц

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 33, № 5, 1998

В статье рассматриваются локальные свойства дифференциальных операторов в категории модулей над коммутативными алгебрами. Доказано, что любой дифференциальный оператор может рассматриваться как оператор, определенный на ростках. Это означает, что локальное свойство имеет алгебраическую природу. Показано также, что джет локализации есть локализация джета.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Классический линейный дифференциальный оператор D в частных производных обладает следующим фундаментальным свойством локальности : для любой функции f значение функции Df в произвольной точке x зависит лишь от значений функции f в сколь угодно малой окрестности точки x. В данной статье доказано, что свойство локальности для дифференциальных операторов в категории модулей над коммутативной алгеброй, означает, что свойство локальности имеет чисто алгебраическую природу. Получено также следующее обобщение свойства локальности : любой дифференциальный оператор можно рассматривать как оператор, определенный на ростках. Показано, что джет локализации есть локализация джета и получено описание модуля джетов с помощью ядра гомоморфизма умножений. Для фактов, содержащих естественные преобразования джет–функторов, мы ссылаемся на [3].

§2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Этот пункт содержит необходимые обозначения и основные определения, которые использованы в [1] и [2]. Пусть k – коммутативное кольцо с единицей; A – коммутативная k-алгебра с единицей; P, Q – A-модули; $Hom_k(P,Q)$ и $Hom_A(P,Q)$ суть A-модуль k– (соответственно A–) линейных отображений из

P в Q. Отметим, что $Hom_k(P,Q)$ обладает естественной структурой бимодуля. Введем скобку $[\Delta, f] : P \longmapsto Q$ следующим образом : $[\Delta, f](p) = \Delta(fp) - f\Delta p, \quad p \in P$. Скобка показывает отклонение правой структуры модуля от левой.

Определение. Модули $D_n(P,Q)$ дифференциальных операторов порядка $\leq n$ определяются по индукции

$$D_n(P,Q) = \{\Delta \in Hom_k(P,Q) : [\Delta, f] \in D_{n-1}(P,Q), \text{ для любого } f \in A\},$$

и $D_n(P,Q) = 0$ при $n < 0$.

Следующие свойства модулей $D_n(P,Q)$ очевидны.

1. $D_n(P,Q) \subset D_m(P,Q)$, если $n \geq m$;
2. $D_0(P,Q) = Hom_A(P,Q)$.

Рассмотрим модуль

$$D(P,Q) \equiv \varinjlim D_n(P,Q).$$

$\Delta \in D(P,Q)$ есть **дифференциальный оператор порядка** n (и будем обозначать $ord(\Delta) = n$), если $\Delta \in D_n(P,Q) \setminus D_{n-1}(P,Q)$. Соответствие $Q \longmapsto D_n(P,Q)$ продолжается с точностью до представимого функтора в категорию A-бимодулей. Представляющий объект $J^n(P)$ этого функтора называется **модулем джетов порядка** $\leq n$ модуля P. Соответствие $P \longmapsto J^n(P)$ продолжается до функтора в категорию A-бимодулей.

A-алгебру частных кольца A и модуль частных A-модуля P относительно мультипликативного множества $S \subset A$ мы будем обозначать через AS^{-1} и PS^{-1}, соответственно.

§3. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассмотрим A-бимодуль $A \otimes_k P$. Пусть $I_n(P)$ означает подмодуль в $A \otimes_k P$, порожденный элементами вида $[...[a \otimes p, f_0]...f_n]$, где $[a \otimes p, f] = a \otimes fp - af \otimes p$. Существует канонический изоморфизм $J^n(P) \cong (A \otimes_k P)/I_n(P)$ (см. [1], §2). В частности, $J^n(A) \cong (A \otimes_k A)/I_n$, где $I_n = I_n(A)$. Описание подмодуля I_n его порождающим множеством иногда неудобно. Теорема 1 ниже проясняет структуру I_n и $J_n(A)$ согласно Предложению 1.2.3 из [1]. Заметим, что $A \otimes_k A$ обладает естественной структурой A-биалгебры с умножением $(a \otimes b) \cdot (c \otimes d) = ac \otimes bd$, а $A \otimes_k P$ обладает структурой $A \otimes_k A$-модуля. Пусть

$$\mu : A \otimes_k A \longmapsto A, \quad a \otimes b \longmapsto ab$$

есть гомоморфизм умножения. Обозначим $K = ker\ \mu$.

Теорема 1. $I_n = K^{n+1}$, **где** K^n – n-**ая степень идеала** K.

Пусть $\tau = \tau_p : P \longmapsto PS^{-1}$, $\tau_p : p \longmapsto p/1$ – каноническое отображение локализации.

Теорема 2 (слабое свойство локальности). Если $\tau_p(p) = 0$, **то** $\tau_Q(\Delta p) = 0$, **где** $p \in P$ **и** $\Delta \in D(P, Q)$.

Иначе говоря Теорема 2 утверждает, что "росток" значения дифференциального оператора на элементе p зависит только от "ростка" элемента p.

Теорема 3 (обобщенное свойство локальности). Для любого оператора $\Delta \in D_n(P, Q)$ **существует единственный оператор** $\Delta' \in D_n(PS^{-1}, QS^{-1})$ **такой, что коммутативна следующая диаграмма :**

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\Delta} & Q \\ \downarrow{\scriptstyle \tau_p} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_Q} \\ PS^{-1} & \xrightarrow{\Delta'} & QS^{-1} \end{array} \qquad (1)$$

Для любого модуля P рассмотрим модули $J^n(PS^{-1})$ и $(J^n(P))S^{-1}$. Из общей конструкции (см. [1], §4) следует, что существует естественный гомоморфизм $(J^n(P))S^{-1} \longmapsto J^n(PS^{-1})$ и он является изоморфизмом (т.е. джет локализации есть локализация джета), а именно справедлива

Теорема 4. Функторы $J^n(-S^{-1})$ **и** $(J^n(\cdot))\,S^{-1}$ **изоморфны.**

§4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Доказательство Теоремы 2 : Равенство $\tau_p(p) = 0$ означает, что существует $f \in S$ такая, что $fp = 0$ (см. [2], §2). Применим индукцию по $ord(\Delta)$. При $ord(\Delta) = 0$ утверждение очевидно. По предположению индукции $\tau_Q([\Delta, f]p) = 0$, т.к. $ord([\Delta, f]) = ord(\Delta) - 1$. С другой стороны

$$\tau_Q([\Delta, f]p) = \tau_Q(\Delta(fp) - f\Delta(p)) = -\tau_Q(f\Delta p) = -\tau_A(f)\tau_Q(\Delta p).$$

Таким образом, $\tau_A(f)\tau_Q(\Delta p) = 0$. Так как $\tau_A(f)$ -- обратимый элемент кольца AS^{-1}, то $\tau_Q(\Delta p) = 0$. Теорема 2 доказана.

Для доказательства Теоремы 1 заметим, что ее утверждение эквивалентно следующему предложению.

Предложение 1. Идеал K^n **порождается как** A-**модуль элементами вида** $[...[1, f_0]...f_n]$, **где** 1 – **единица кольца** $A \otimes_k A$ **и** $f_i \in A$.

Доказательство : Утверждение докажем индукцией по n. При $n = 0$ имеем

$$f \otimes g \in K \Longrightarrow f \cdot g = 0 \Longrightarrow f \otimes g = f(1 \otimes g - g \otimes 1) = f \cdot [1, g].$$

Так как элементы вида $f \otimes g$ порождают K, имеем $K \subset I_0$. И обратно, элементы вида $[1, g]$ содержатся в K. Итак, $K = I_0$. Легко видеть, что для любых элементов $a, b \in A \otimes_k A$ имеют место равенства $[ab, f] = a[b, f] = b[a, f]$. Пусть теперь $t = r \cdot s \in K^{n+1}$, где $r \in K^n$ и $s \in K$. По предположению индукции имеем

$$r = \sum_i a_i([...[1, f_i^0]...f_i^{n-1}]), \quad s = \sum_j b_j[1, g_j].$$

Следовательно,

$$t = \sum_{i,j} a_i b_j([...[1, f_i^0]...f_i^{n-1}][1, g_j]) = \sum_{i,j} a_i b_j \left([[...[1, f_i^0]...f_i^{n-1}]g_j]\right).$$

Итак, имеем $K^{n+1} \subset I_n$. Обратное утверждение очевидно. Предложение 1 доказано.

Доказательство Теоремы 3 начнем со следующей Леммы.

Лемма 1. Пусть $\Delta \in D_n(P, Q)$. Для любого $g \in A$ и $p \in P$ имеет место формула

$$\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i C_{n+1}^i g^{n+1-i} \Delta g^i p \equiv 0. \tag{2}$$

Если g – обратимый элемент из A, то

$$\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i C_{n+1}^i g^{n+1-i} \Delta g^{i-1} p \equiv 0, \quad p \in P. \tag{3}$$

Доказательство : По определению дифференциального оператора порядка n, имеем

$$\Big[\underbrace{[\Delta, g]...g}_{n+1}\Big] p \equiv 0, \quad p \in P, \quad g \in A. \tag{4}$$

Легко видеть, что (2) и (4) совпадают. Подставляя $g^{-1}p$ вместо p в (2), получим (3). Лемма 1 доказана.

Следствие.

$$g^{n+1} \Delta(g^{-1}p) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} C_{n+1}^i g^{n+1-i} \Delta g^{i-1} p. \tag{5}$$

Доказательство : следует из (3).

Доказательство Теоремы 3 : Пусть PS^{-1} – локализация модуля P. Для любого дифференциального оператора $\Delta \in D(P,Q)$ существование продолжения на PS^{-1}, то есть существование оператора Δ', замыкающего коммутативную диаграмму (1), влечет его единственность, так как для элементов вида $p/g \in PS^{-1}$, формула (5) выполняется и образы элементов из PS^{-1} определены однозначно. Докажем существование Δ' по индукции. При $ord\Delta = 0$ оператор Δ' – классическая локализация линейного отображения Δ. Предположим, что существование Δ' при $ord\,\Delta = n$ доказано. Положим

$$\Delta'(p/s) = \frac{1}{s}\left(\Delta(p) - [\Delta, s]'(p/s)\right), \quad \Delta \in D_{n+1}(P,Q), \quad s \in S. \tag{6}$$

Формула (6) определяет отображение, замыкающее диаграмму (1). Сначала покажем, что имеет место равенство

$$\Delta'(p/s) = \frac{1}{hs}\left(\Delta(hp) - [\Delta, hs]'(p/s)\right), \quad h, s \in S. \tag{7}$$

Положим

$$[\Delta, s]'(p/s) = \frac{q}{s^{n+1}}, \quad [\Delta, hs]'(p/s) = \frac{r}{s^{n+1}}, \tag{8}$$

где $q, r \in Q$ определяются равенством (5). Например

$$q = \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}C_{n+1}^{i}s^{n+1-i}[\Delta, s]s^{i-1}p. \tag{9}$$

Учитывая (8) и используя свойства модуля QS^{-1} (см. [2], гл. 2, Следствие 1), равенство (7) можно переписать в виде

$$t(s^{2n+3}h\Delta(p) - hs^{2+n}q) = t(s^{2n+3}\Delta(hp) - s^{2+n}r), \quad t \in S$$

или

$$t's^{n+1}[\Delta, h]p = t'(r - hq), \quad t' = ts^{n+2}. \tag{10}$$

Покажем, что $s^{n+1}[\Delta, h]p = r - hq$. Действительно, имеем

$$r - hq = \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}C_{n+1}^{i}s^{n+1-i}[\Delta, hs]\left(s^{i-1}p\right) -$$

$$-h\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}C_{n+1}^{i}s^{n+1-i}[\Delta, s]\left(s^{i-1}p\right) = \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}C_{n+1}^{i}s^{n+1-i}\Delta(hs^{i}p) -$$

$$-hs\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}C_{n+1}^{i}s^{n+1-i}\Delta(s^{i-1}p) - h\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}C_{n+1}^{i}s^{n+1-i}\Delta(s^{i}p) +$$

$$+hs\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}C_{n+1}^{i}s^{n+1-i}\Delta(s^{i-1}p)=suC_{n+1}^{i}s^{n+1-i}[\Delta,h](s^{i}p). \qquad (11)$$

Так как $ord[\Delta,h]=n$, согласно (2) последнее выражение в (11) есть $s^{n+1}[\Delta,h]p$. Это доказывает равенство (7).

Пусть теперь $\alpha = p/s = p'/s'$ – различные представления $\alpha \in PS^{-1}$. По определению, это означает, что существует $t \in S$ такое, что $ts'p = tsp'$. Тогда, с учетом (7), имеем

$$\Delta'(\alpha)=\frac{1}{tss'}(\Delta(ts'p)-[\Delta,tss']'(\alpha))=\frac{1}{tss'}(\Delta(tsp')-[\Delta,tss']'(\alpha))=$$

$$=\frac{1}{s'}(\Delta(p')-[\Delta,s']'(\alpha)).$$

Таким образом, равенство (6) определяет элемент $\Delta'(\alpha) \in QS^{-1}$. Очевидно, что Δ' замыкает диаграмму (1) и что Δ' – дифференциальный оператор порядка $n+1$, т.е. $ord\ \Delta' = ord\ \Delta$. Теорема 3 доказана.

Доказательство Теоремы 4 : Пусть $F : A \longmapsto B$ – гомоморфизм k-алгебр. Тогда каждый B-модуль можно рассматривать как A-модуль : $a \cdot p = F(a)p$. Соответствующий функтор $Md(B) \longmapsto Md(A)$, где $Md(A)$ – категория A-модулей, будем также обозначать через F. Известно (см. [1]), что существует естественное преобразование функторов Φ : $FJ^n(\cdot) \longmapsto J^nF(\cdot)$. По Теореме 4 для $F(\cdot) = (\cdot)\,S^{-1}$ преобразование Φ является эквивалентностью. Доказательство Теоремы 4 состоит в определении обратного естественного преобразования. По Теореме 3, существует единственный дифференциальный оператор j' порядка n, замыкающий коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\ j_n\ } & J^nP \\ \downarrow & & \downarrow \\ PS^{-1} & \xrightarrow{\ j'\ } & (J^nP)S^{-1} \end{array}, \qquad (12)$$

где j_n – канонический дифференциальный оператор порядка n, а вертикальные стрелки суть отображения локальности. Согласно определению модулей джетов, существует единственное A-линейное отображение μ, замыкающее диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & PS^{-1} & \\ {}^{j_n}\nearrow & & \nwarrow^{j'} \\ J^n(PS^{-1}) & \xrightarrow{\ \mu\ } & (J^nP)S^{-1} \end{array}. \qquad (13)$$

По Предложению 1.4.5 из [1], можно составить результирующую диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & PS^{-1} & \\
J^n(PS^{-1}) \arrow[ur, "j_n"] \arrow[rr, shift left, "\mu"] & & (J^nP)S^{-1} \arrow[ul, "j'"'] \arrow[ll, shift left, "\theta"] \\
 & J^nP \arrow[ul, "j_n(\tau)"] \arrow[ur, "\tau'"'] &
\end{tikzcd}, \tag{14}$$

где τ – морфизм локализации для модуля J^nP, $j_n(\tau)$ – каноническое поднятие морфизма локализации для модуля P, и θ – морфизм, построенный в [1]. На самом деле, θ есть гомоморфизм, который следует из свойства универсальности локализации (см. Предложение 3 из [2], гл. 2).

Покажем, что диаграмма (14) коммутативна. Для этого нужно проверить равенства

$$\theta \circ j' = j_n, \quad \mu \circ j_n(\tau) = \tau. \tag{15}$$

Пусть $p \in P$. Тогда

$$[\mu \circ j_n(\tau)](j_n(p)) = \mu(j_n(\tau)(j_n(p)) = \mu(j_n(p/1)) = j'(p/1) = j_n(p)/1 = \tau(j_n(p)).$$

Так как элементы вида $j_n(p)$ порождают J^nP, то это доказывает второе равенство в (15). Аналогично,

$$\theta \circ j'(p/1) = \theta(j_n(p)/1) = \theta(\tau(j_n(p))) = j_n(\tau)(j_n(p)) = j_n(p/1).$$

Следовательно, согласно (5),

$$\theta(j'(p/s)) = \theta\left(\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}C_{n+1}^i s^{-i} j'(s^{i-1}p/1)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}C_{n+1}^i s^{-i}\theta(j'(s^{i-1}p/1)) = \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}C_{n+1}^i s^{-i} j_n(s^{i-1}p/1) = j_n(p/s),$$

что доказывает первое равенство в (15).

Далее, по свойству универсальности локализации, имеем $\mu \circ \theta = id$, а свойство универсальности джетов дает $\theta \circ \mu = id$. Итак, θ – изоморфизм с обратным изоморфизмом μ. Теорема 4 доказана.

ABSTRACT. The paper considers a localization property of differential operators in categories of modules over commutative algebras, and proves that every differential operator is in fact an operator defined on germs. This means that localization property has algebraic nature. We also show that a jet of a localization is a localization of a jet.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Виноградов, И. С. Красильщик, В. В. Лычагин, Введение в Геометрию Нелинейных Дифференциальных Уравнений, Москва, Наука, 1986.
2. Н. Бурбаки, Коммутативная Алгебра, Москва, Мир, 1971.
3. I. Kolář, Natural Operations in Differential Geometry, Springer, Berlin, 1993.

12 января 1998

Армянский государственный инженерный университет