ДЕФЕКТНЫЕ ФУНКЦИИ ОГРАНИЧЕННОГО ВИДА

А. М. Акопян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 33, № 5, 1998

В 1966 г. Н. У. Аракелян построил пример целой функции порядка $\rho > 1/2$ нормального типа, для которой множество дефектных значений содержит заданную произвольную последовательность $\{a_k\} \subset C$. Этот результат опроверг хорошо известную гипотезу Неванлинны, согласно которой целая функция порядка $\rho > 1/2$ может иметь не более $[2\rho]$ дефектных значений. В этой статье мы изучаем возможные множества дефектных функций для некоторых классов функций, аналитических в единичном круге.

В статье используются стандартные обозначения теории распределения значений Неванлинны (см. [1], [2]). Для трансцендентной целой функции f через E_f обозначим множество относительно "малых" целых функций a, удовлетворяющих условию

$$T(r,a) = o(T(r,f)), \qquad r \to \infty. \tag{1}$$

Положим $M(r,f) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$. Если f имеет порядок $\rho \in (0,\infty)$, то применяя известные двусторонние оценки для характеристики T целой функции a, можно показать, что равенство (1) эквивалентно условию

$$\log^+ M(r,a) = o(r^\rho), \qquad r \to \infty, \tag{2}$$

при условии, что тип функции f конечный, а нижний тип функции f положительный.

Дефект функции $a \in E_f$ относительно f определяется формулой

$$\delta(a,f) := \delta(0, f-a) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{m(r, 1/(f-a))}{T(r,f)}. \tag{3}$$

Функция a называется дефектным для f, если $\delta(a,f)>0$.

Как показано в [3], "соотношение дефектов" Неванлинны (см. [1]) сохраняется также для "малых" целых функций, т.е. $a \in E_f$ влечет $\sum_{a\in E_f} \delta(a,f) \le 1$. В 1966 Н. У. Аракелян построил пример целой функции порядка $\rho > 1/2$ и нормального типа, для которой множество дефектных значений содержит заданную произвольную последовательность $\{a_k\} \subset C$ (см. [4], [5]). Этот результат опроверг хорошо известную гипотезу Неванлинны (см. [1]), согласно которой целая функция порядка $\rho > 1/2$ может иметь не более $[2\rho]$ дефектных значений. В [6] этот результат распространен на последовательности $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ относительно "малых" целых функций.

В настоящей работе мы изучаем возможные множества дефектных функций для некоторых классов функций, аналитических в единичном круге. Отметим, что аналогичный вопрос о множествах дефектных значений рассмотрен в [5].

Будем использовать следующие обозначения. Пусть $H(D)$ – множество функций, голоморфных в единичном круге D. Обозначим через $N \subset H(D)$ класс функций с ограниченной харастеристикой Неванлинны T. Пусть $B \subset N$ означает класс ограниченных функций из $H(D)$.

Известная теорема Р. Неванлинны (см. [1]) утверждает, что каждая функция $w \in N$ представима в виде $w = w_1/w_2$, где $w_1, w_2 \in B$. Для функций $f \in H(D)$ с неограниченной харастеристикой $T(r,f)$, функции $w \in N$ можно рассматривать как относительно "малые" (ср. с условием (1) при $r \to 1$). Дефект таких функций (относительно f) можно определить по формуле (3).

Предложение. При условии

$$\lim_{r\to 1} \frac{T(r,f)}{\log 1/(1-r)} = \infty, \tag{4}$$

выполняется "соотношение дефектов"

$$\sum_{w\in N} \delta(w,f) \le 1. \tag{5}$$

Доказательство : Сначало докажем утверждение для функций $w \in B$. Используя схему доказательства Теоремы 1 из [7], покажем что (4) влечет

соотношение

$$\sum_{w\in B}\delta(w,f)\le 1. \tag{6}$$

Рассмотрим конечный набор попарно различных функций w_1, ..., $w_q\in B$ и обозначим через $L(s)$ линейную оболочку функций $w_1^{n_1}$, ..., $w_q^{n_q}$, где n_1, ..., $n_q\ge 0$ и $n_1+...+n_q=s$. Задавая s, обозначим через β_1, ..., β_n и b_1, ..., b_k базисы $L(s)$ и $L(s+1)$, соответственно. Пусть $P[f]$ – детерминант Вронского для системы функций b_1, ..., b_k, $\beta_1 f$, ..., $\beta_n f$. Ясно, что P является однородным дифференциальным многочленом от f на множестве B и $P[f]\ne 0$. Имеем

$$P[f]=f^n\,Q[f'/f], \tag{7}$$

где Q – дифференциальный многочлен.

Для любого $w\in L(1)$ имеем $w\cdot L(s)\subset L(s+1)$. Следовательно

$$P\left[f-w_i\right]=P\left[f\right],\qquad i=1,2,...,q. \tag{8}$$

В силу теоремы о логарифмической производной (см. [1]) и (7) имеем

$$T\left(r,P\left[f\right]\right)=m\left(r,P\left[f\right]\right)\le n\cdot m(r,f)+S(r,f), \tag{9}$$

где $S(r,f)$ – остаточный член Неванлинны, который при $r\to 1$ имеет вид $O\left(\log(1-r)^{-1}\right)$. Обозначим через $d(z)=\dfrac{1}{2}\min\limits_{i\ne j}|w_i(z)-w_j(z)|$, и пусть

$$E_j=\{z\in D:\ |f(z)-w_j(z)|<d(z)\},\qquad j=1,2,...,q.$$

В силу (7) и (8) на множестве E_j имеем

$$|f(z)-w_j(z)|^n=\frac{|P\left[f(z)\right]|}{|Q_j(z)|}\quad\text{для}\quad Q_j=Q\left[\frac{(f-w_j)'}{f-w_j}\right].$$

Тогда, по определению множества E_j, для всех z

$$\sum_{j=1}^{q}\log^+|f(z)-w_j(z)|^{-1}\le\frac{1}{n}\log^+|P\left[f(z)\right]|^{-1}+$$

$$+n\log^+d^{-1}(z)+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{q}\log^+|Q_j(z)|.$$

Следовательно, в силу (9) и первой основной теоремы Неванлинны, получим

$$\sum_{j=1}^{q}m\left(r,(f-w_j)^{-1}\right)\le\frac{k}{n}T(r,f)+S(r,f). \tag{10}$$

Заметим, что k/n можно выбрать сколь угодно близким к 1. Действительно, пусть $l(s) = \dim L(s)$. Предположим, что $l(s+1) \geq (1+h)\,l(s)$ для $s = 0, 1, ..., h > 0$. Имеем $l(s) \geq (1+h)^s$, что противоречит неравенству $l(s) \leq C_s^{q+s-1}$. Так как $l(s+1) \geq l(s)$, получим $\inf_s \dfrac{l(s+1)}{l(s)} = 1$.
Поскольку f удовлетворяет условию (4), то разделив обе части неравенства (10) на $T(r,f)$ и переходя к нижнему пределу при $r \to 1$, получим требуемое неравенство (6).

Теперь рассмотрим случай произвольных попарно различных функций w_1, w_2, ..., $w_q \in N$. Каждая из этих функций представима в виде $w_i = g_i/h_i$, где $g_i, h_i \in B$, $1 \leq i \leq q$. Не умаляя общности можно предположить, что $|g_i| \leq 1$, $|h_i| \leq 1$ и $h_i(z) \neq 0$, $z \in D$. Обозначим $H = \prod_{i=1}^q h_i$ и рассмотрим функцию $F = f \cdot H$. Так как f удовлетворяет условию (4) и $|H(z)| \leq 1$, $H(z) \neq 0$ при $z \in D$, то функция F необходимо удовлетворяет (4). Полагая $W_i = Hw_i$, заметим, что $W_i \in B$, $1 \leq i \leq q$. Следовательно, в силу (6) имеем

$$\sum_{i=1}^{q} \delta(W_i, F) \leq 1. \tag{11}$$

С другой стороны, $T(r,f) = T(r,F) + O(1)$ при $r \to 1$ и

$$m\left(r, (f - w_i)^{-1}\right) = m(r, H/(F - W_i)) \leq m\left(r, (F - W_i)^{-1}\right)$$

для $i = 1, 2, ..., q$. Отсюда $\delta(w_i, f) \leq \delta(W_i, F)$. Суммируя эти неравенства по всем i и учитывая (11), получаем $\sum\limits_{i=1}^{q} \delta(w_i, f) \leq 1$. Так как q и функции w_1, w_2, ..., w_q произвольны, доказательство Предложения завершено.

Рассмотрим теперь случай, когда f удовлетворяет более слабому чем (4) условию

$$\varliminf_{r \to 1} \frac{T(r,f)}{\log 1/(1-r)} = \lambda \quad \text{и} \quad 0 < \lambda < \infty.$$

Применяя приведенные выше рассуждения и оценку величины $S(r,f)$ вместо (5), для полного дефекта получим

$$\sum_{w \in N} \delta(w, f) \leq 1 + \frac{1}{\lambda}.$$

Для $w = \text{const}$ это неравенство содержится в классической монографии Р. Неванлинны [1]. Из этих неравенств следует, что множество дефектных функций $w \in N$ для f не более чем счетно.

Рассмотрим функцию

$$\nu_\gamma(r) = \begin{cases} (1-r)^{-\gamma}, & \text{если} \quad \gamma > 0 \\ \log(1-r)^{-1}, & \text{если} \quad \gamma = 0. \end{cases}$$

Теорема 1. Для заданного $\gamma > 0$ и последовательности функций $\{w_k\}_{k=1}^{\infty} \subset B$ существует аналитическая в единичном круге функция f порядка γ, для которой w_k, $k = 1, 2, \ldots$ являются дефектными и для некоторых постоянных c_1, $c_2 > 0$

$$c_1 < \frac{T(r,f)}{\nu_\gamma(r)} < c_2 \qquad \text{при} \quad 0 < r_0 \le r < 1. \tag{12}$$

При $\gamma > 0$ условие (12) означает, что f имеет нормальный тип и положительный нижный тип.

Теорема 2. Для заданного $\gamma > 0$ и последовательности функций $\{w_k\}_{k=1}^{\infty} \subset N$ существует аналитическая в единичном круге функция f порядка γ, нормального типа и с положительным нижним типом, для которой w_k, $k = 1, 2, \ldots$ являются дефектными.

Для доказательства Теорем 1 и 2 существенно используется конструкция Н. У. Аракеляна (см. [4], [5]), представляющая касательные приближения на множествах, состоящих из бесконечного числа "островов", сгущающихся к бесконечности.

1°. Предварительные построения. Ниже используются следующие обозначения :

$$D_r = \{z \in \mathbf{C} \colon |z| < r\} \quad \text{для} \quad r > 0, \quad D_1 := D; \quad \Pi := \{z \in \mathbf{C} \colon \operatorname{Re} z \ge 1/2\}.$$

Длину спрямляемой кривой $\gamma \subset C$ обозначим через $|\gamma|$.

Для заданного $\gamma \ge 0$ выберем число $\alpha \in (0, \frac{\pi}{\gamma+1})$. Пусть $\{\theta_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ – последовательность чисел такая, что $\theta_{-k} = -\theta_k$, $\theta_k \uparrow \alpha/2$ при $k \to +\infty$. Полагая $\alpha_k = \min(\theta_{k+1} - \theta_k, \theta_k - \theta_{k-1})$, $k \in Z$ введем следующие обозначения :

$$\Delta_k = \{z \in \mathbf{C} \colon |\arg(1-z) + \theta_k| \le \alpha_k/4\},$$

$$\sigma_n = \{z \in \mathbf{C} \colon 2^{-(n+1)} \le |z-1| \le 2^{-n}\},$$

$$E_{k,n} = \Delta_k \bigcap \sigma_n, \quad \text{где} \quad n \in \mathbb{N}, \quad k \in Z.$$

Очевидно, что множества $E_{k,n}$ попарно непересекаются для разных пар (k, n).

Пусть теперь $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ – некоторая последовательность четных чисел такая, что $n_k \uparrow +\infty$ при $k \to +\infty$ и $n_{-k} = n_k + 1$. Рассмотрим замкнутое в $\mathbb{C}$ множество

$$E = \bigcup_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} \bigcup_{m=0}^{+\infty} E_{k,n_k+2m}.$$

Ясно, что множество E лежит в единичном круге. Обозначим $u(z) = \dfrac{1}{1-z}$ при $z \in D$ и заметим, что $\operatorname{Re}[u(z)] \geq 1/2$. На множестве $u(E)$ рассмотрим аналитическую функцию $\Psi(z) = \exp(-\mu_k \zeta^{\rho})$ для $\zeta \in \Delta_k$, $k \in Z \setminus \{0\}$, где $\rho = \gamma + 1$, $\mu_k = \exp\left(-2^{11}/\alpha_k\right)$. Следовательно, $\mu_{-k} = \mu_k$. Пусть φ – аналитическая функция, определенная на $u(E)$ такая, что при подходящем выборе последовательности n_k

$$\max(|\zeta|, |\varphi(\zeta)|) < |\Psi(\zeta)|^{-1} \quad \text{для} \quad \zeta \in u(E). \tag{13}$$

Мы будем использовать следующий результат (см. Лемму 7 из [6] или Лемму 4 из [5]).

Лемма А. Существует функция $F \in H(\mathbb{U})$ такая, что

$$\log M(r, F) = O(r^{\rho}) \quad \text{при} \quad r \to \infty, \tag{14}$$

$$|F(\zeta) - \varphi(\zeta)| < |\Psi(\zeta)| \quad \text{для} \quad \zeta \in u(E). \tag{15}$$

2°. Доказательство Теоремы 1. На множестве E определим функцию φ, полагая $\widetilde{\varphi}(z) = w_{|k|}(z)$ при $z \in \Delta_k$ и $k \in Z \setminus \{0\}$. Так как $\{w_k\}_{k=1}^{\infty} \subset B$, то функция $\varphi = \widetilde{\varphi} \circ u^{-1}$ удовлетворяет (13). Следовательно, имеем

$$\max(|u(z)|, |\widetilde{\varphi}(z)|) < |\widetilde{\Psi}(z)|^{-1} \quad \text{для} \quad z \in E, \tag{16}$$

где

$$\widetilde{\Psi}(z) = \Psi \circ u(z) = \exp\left(-\mu_k (1-z)^{-\rho-1}\right). \tag{17}$$

Применяя Лемму А для φ, получим функцию $F \in H(\Pi)$, удовлетворящую условиям (14) и (15). Докажем, что $f = F \circ u$ является искомой функцией. Из (15) имеем

$$|f(z) - \widetilde{\varphi}(z)| < |\widetilde{\Psi}(z)| \quad \text{при} \quad z \in E. \tag{18}$$

Пусть j – произвольное натуральное число, и пусть $0 < r < 1$. Положим

$$e_{j,r} = E \bigcap \left(\Delta_j \bigcup \Delta_{-j}\right) \bigcap \partial D_r, \qquad l_{j,r} = \Delta_j \bigcap \partial D_r.$$

Для получения нижней оценки величины $|e_{j,r}|$ при $r \to 1$ заметим, что $|e_{j,r}| = |l_{j,r}|$ при $r_j \le r < 1$, где $0 < r_j < 1$ удовлетворяет условию, что при $r_j \le |z| < 1$ и $z \in \Delta_j$ выполняется неравенство $|z-1| \le 2^{-(n_j+1)}$. Оценим длину дуги $l_{j,r}$. Для этого возьмем $\theta \in (0, \pi/2)$ и пусть $\sin\theta < r < 1$. Выберем $\lambda = \lambda_\theta(r) \in (0, \pi/2)$ из условия $r\,e^{i\lambda} \in \{z \in \mathbb{C}\colon \arg(1-z) = -\theta\}$. В треугольнике с вершинами 0, 1, $r\,e^{i\lambda}$ имеем $\sin\theta = r\,\sin(\lambda+\theta)$. Откуда

$$\frac{1-r}{r}\sin\theta = 2\sin\frac{\lambda}{2}\cos\left(\theta + \frac{\lambda}{2}\right) \quad \text{или} \quad \lim_{r\to 1}\frac{\lambda_\theta(r)}{1-r} = \tan\theta.$$

Если стороны угла Δ_j образуют с полуосью $(-\infty, 1)$ острые углы $\theta_1 < \theta_2$, то с учетом $|l_{j,r}| = r\,\lambda_{\theta_2}(r) - r\,\lambda_{\theta_1}(r)$ для $j \in \mathbb{N}$, получим

$$\lim_{r\to 1}\frac{|e_{j,r}|}{1-r} = d_j > 0. \tag{19}$$

Заметим, что при $|z-1| < 1/4$ и $|\arg(1-z)| \le \pi/4$ (в частности при $z \in E$)

$$|1-z|^{-\gamma-1} \ge 2^{-\gamma-1}\,(1-|z|)^{-\gamma-1}. \tag{20}$$

С другой стороны, согласно (17), получим

$$|\widetilde{\Psi}(z)| < \exp\left(-\mu_k\,|1-z|^{-\gamma-1}\right). \tag{21}$$

По определению функции $\widetilde{\varphi}$ и с учетом (18), (20) и (21), имеем

$$|f(z) - w_k(z)| < \exp\left(-\mu_k\,2^{-\gamma-1}\,(1-r)^{-\gamma-1}\right), \qquad z \in e_{k,r}. \tag{22}$$

Из (19) и (22), для неванлинновской функции приближения m при $r \in [R_k, 1) \subset (r_k, 1)$, получаем оценку

$$\begin{aligned} m(r, w_k, f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(r\,e^{i\theta}) - w_k(r\,e^{i\theta})|}\,d\theta \ge \\ &\ge \frac{|e_{k,r}|}{2\pi}\,\mu_k\,2^{-\gamma-1}\,(1-r)^{-\gamma-1} > \tau_k\,(1-r)^{-\gamma}, \end{aligned} \tag{23}$$

где $\tau_k > 0$ не зависят от r.

Если $\gamma = 0$, из (21) для $r \in [R_k, 1)$ имеем

$$m(r, w_k, f) \geq \frac{\mu_k}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1 - r\,e^{i\theta}|} \geq$$
$$\geq \frac{2\mu_k}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1 - r + r\theta} \geq c_3\,\mu_k \log \frac{1}{1-r}. \tag{24}$$

Нам надо оценить характеристику $T(r, f)$. Из определения функции $f = F \circ u$ и из условия, что $F \in H(\Pi)$ – функция нормального типа порядка ρ, следует существование постоянной $\sigma > 0$ такой, что

$$|f(z)| < \exp\left(\sigma\left(|1 - z|^{-\gamma-1} + 1\right)\right), \quad \text{при} \quad |z| < 1. \tag{25}$$

Следовательно, для $r \in [0, 1)$

$$T(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(r\,e^{i\theta})|\, d\theta < \sigma + \frac{\sigma}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{|1 - r\,e^{i\theta}|^{\gamma+1}}.$$

Заметим, что если $0 < \theta < \pi$ и $r \in [1/4, 1)$, то

$$|1 - r\,e^{i\theta}|^2 = (1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{\theta}{2} \geq (1-r)^2 + r\left(\frac{2\theta}{\pi}\right)^2 \geq \frac{1}{2}\left(1 - r + \frac{\theta}{\pi}\right)^2.$$

Таким образом, имеем оценку

$$T(r, f) < \sigma + 2^{\gamma+1}\sigma\,\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(1 - r + \frac{\theta}{\pi}\right)^{-\gamma-1} d\theta < c_2\,\nu_\gamma(r). \tag{26}$$

Второе неравенство в (26) следует из (23) и (24), поскольку

$$T(r, f) \geq m(r, w_k, f) + c_4. \tag{27}$$

Таким образом, построенная функция f имеет порядок γ, нормальный тип и положительный нижний тип, т.е. f удовлетворяет (12). Кроме того, из (23), (24) и (26) имеем

$$\delta(w_k, f) = \varliminf_{r \to 1} \frac{m(r, w_k, f)}{T(r, f)} \geq c_5\,d_k > 0.$$

Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Теорема 1 фактически представляет двусторонние оценки для $M(r,f)$. Действительно, поскольку $T(r,f) \le \log^+ M(r,f)$, то с учетом (25) и (27) имеем

$$c_1\, \nu_\gamma(r) < \log^+ M(r,f) < \sigma\,(1-r)^{-\gamma-1}, \qquad \sigma > 0, \quad \gamma \ge 0.$$

Замечание 2. Из доказательства Теоремы 1 следует, что дефектные величины удовлетворяют неравенствам

$$\delta(w_k, f) > \exp\left(-c\,\alpha_k^{-1}\right), \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

где $c > 0$ – постоянная, а $\alpha_k > 0$ – произвольные параметры, удовлетворяющие условию $\sum \alpha_k < \infty$. Отметим, что используя метод доказательства Теоремы 1 из [6], для дефектных величин получаем оценки

$$\delta(w_k, f) > \exp\left(-c\,k\right), \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

где $c > 0$ – некоторая постоянная.

3°. Доказательство Теоремы 2. Используя предыдущие обозначения, определим функцию $\widetilde{\varphi} \in H(E)$, полагая $\widetilde{\varphi}(z) = w_{|k|}(z)$ для $z \in \Delta_k$, $k \in Z \setminus \{0\}$, где $\{w_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$.

Функцию $w \in \mathbb{N}$ представим в виде $w = w_1/w_2$, где w_1, $w_2 \in B$. Как и выше, можно считать, что $|w_1| < 1$, $|w_2| < 1$ и w_2 не обращается в нуль. Имеем $\log|w| \le \log|w_2|^{-1}$. Последняя функция не отрицательна и гармонична в D. Применяя неравенство Гарнака, получим

$$M(r, w) < \exp\left(c_6\,(1-r)^{-1}\right) \quad \text{для} \quad 0 < r_0 \le r < 1,$$

где $c_6 = 2\log|w_2(0)|^{-1}$. Следовательно, в силу (20) и (21) для $\gamma > 0$ построенная функция $\widetilde{\varphi}(z)$ удовлетворяет неравенству (16). Как и выше можно применить Лемму А. Теорема 2 доказана.

Автор выражает благодарность профессору Н. У. Аракеляну за обсуждение результатов и полезные замечания.

ABSTRACT. In 1966 N. U. Arakelian constructed an example of an entire function of order $\rho > 1/2$ and of normal type, for which the set of deficient values contains any given in advance sequence $\{a_k\} \subset C$. This result rejects a well-known conjecture of Nevanlinna according to which an entire function of order $\rho > 1/2$ can have at most $[2\rho]$ deficient values. In this paper we study possible sets of deficient functions for some classes of analytic in the unit disk functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Неванлинна, Однозначные Аналитические Функции, Изд. тех-теор. лит., Москва, 1941.
2. А. А. Гольдберг, И. В. Островский, Распределение Значений Мероморфных функций, Наука, Москва, 1970.
3. Chi–tai Chuang, "Une generalisation d'une inegalite de Nevanlinna, Scientia Sinica, vol. 13, no. 6, pp. 887 — 895, 1964.
4. N. U. Arakelian, "Entire functions of finite order with infinite set of deficient values", Soviet Math. Doklady, vol. 7, no. 5, pp. 1303 — 1306, 1966.
5. Н. У. Аракелян, "Целые и аналитические функции ограниченного роста с бесконечным множеством дефектных значений", Изв. АН Арм. ССР, Математика, том 5, № 6, стр. 486 — 506, 1970.
6. N. U. Arakelian, A. Hakopian, "Entire functions with infinite set of deficient functions", "Israel Math. Conferences Proceedings", 1999.
7. N. Steinmetz, Eine Verallgemeinerung des zweiten Nevanlinnaschen Hauptsatzes", vol. 368, pp. 152 — 167, 1986.

14 января 1998

Ереванский государственный университет